Esercitazione n. 11 (svolgimento)

1) Una primitiva delle funzioni assegnate con la relativa verifica, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=sen2x$, si ha: $\int sen2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+c\right)=-\frac{1}{2}D(\cos 2x+c)=-\frac{1}{2}(-2sen2x+0)=sen2x$ quindi la primitiva trovata è corretta.

b) Data la funzione $f(x)=\cos^2 xsenx$, si ha: $\int \cos^2 xsenxdx=-\frac{1}{3}\cos^3 x+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x+c\right)=-\frac{1}{3}D(\cos^3 x+c)=\frac{1}{3}(3\cos^2 xsenx+0)=\cos^2 xsenx$ quindi la primitiva trovata è corretta.

c) Data la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$, si ha: $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\frac{1}{3}arcsen3x+c$, ovvero $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx=-\frac{1}{3}\arccos 3x+c$; infatti se consideriamo la loro derivata, si ha: $D\left(\frac{1}{3}arcsen3x+c\right)=\frac{1}{3}D(arcsen3x+c)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}+0\right)=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ ed anche $D\left(-\frac{1}{3}\arccos 3x+c\right)=-\frac{1}{3}D(\arccos x+c)=-\frac{1}{3}\left(\frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}}+0\right)=\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$ quindi le primitive trovate sono corrette.

d) Data la funzione $f(x)=\frac{1}{1+4x^2}$, si ha: $\int \frac{1}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}arctg2x+c$, ovvero $\int \frac{1}{1+4x^2}dx=-\frac{1}{2}arc\cot g2x+c$ infatti se consideriamo le loro derivate, si ha: $D\left(\frac{1}{2}arctg2x+c\right)=\frac{1}{2}D(arctg2x+c)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+(2x)^2}+0\right)=\frac{1}{1+4x^2}$ ed anche

$D\left(-\frac{1}{2}arc\cot g2x+c\right)=-\frac{1}{2}D(arc\cot g2x+c)=-\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{1+(2x)^2}+0\right)=\frac{1}{1+4x^2}$ quindi le primitive trovate sono corrette.

e) Data la funzione $f(x)=3^{2x-1}$, si ha: $\int 3^{2x-1}dx=\frac{1}{\log 9}3^{2x-1}+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(\frac{1}{\log 9}3^{2x-1}+c\right)=\frac{1}{\log 9}D\left(3^{2x-1}+c\right)=\frac{1}{\log 9}\left(3^{2x-1}2\log 3+0\right)=3^{2x-1}$ quindi la primitiva trovata è corretta.

f) Data la funzione $f(x)=\frac{1}{3x}$, si ha: $\int\frac{1}{3x}dx=\frac{1}{3}\log|3x|+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(\frac{1}{3}\log|3x|+c\right)=\frac{1}{3}D(\log|3x|+c)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{|3x|}\frac{|3x|}{3x}3+0\right)=\frac{1}{3x}$ quindi la primitiva trovata è corretta.

g) Data la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{3x^2}}+4x^3$, si ha: $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3x^2}}+4x^3\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt[4]{3x^2}}dx+\int 4x^3dx$, e quindi $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int x^{-\frac{1}{2}}dx+4\int x^3dx=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{3}}+x^4+c$ infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{3}}+x^4+c\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{x}}+4x^3+0=\frac{1}{\sqrt[4]{3x}}+4x^3$ quindi la primitiva trovata è corretta.

h) Data la funzione $f(x)=\cos\pi x$, si ha: $\int\cos\pi x dx=\frac{1}{\pi}sen\pi x+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(\frac{1}{\pi}sen\pi x+c\right)=\frac{1}{\pi}D(sen\pi x+c)=\frac{1}{\pi}(\pi\cos\pi x+0)=\cos\pi x$ quindi la primitiva trovata è corretta.

i) Data la funzione $f(x)=-\frac{1}{1+\sqrt{4}x^2}$, si ha: $-\int\frac{1}{1+\sqrt{4}x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}arc\cot g\sqrt{2}x+c$, ovvero $-\int\frac{1}{1+\sqrt{4}x^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}x+c$ infatti se consideriamo le loro derivate, si ha: $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arc\cot g\sqrt{2}x+c\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}D\left(arc\cot g\sqrt{2}x+c\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}+0\right)=-\frac{1}{1+\sqrt{4}x^2}$ ed anche $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}x+c\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}D\left(arctg\sqrt{2}x+c\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}+0\right)=-\frac{1}{1+\sqrt{4}x^2}$

quindi le primitive trovate sono corrette.

j) Data la funzione $f(x)=\frac{senx}{\cos x}$, si ha: $\int \frac{senx}{\cos x}dx=-\log|\cos x|+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, si ha: $D(-\log|\cos x|+c)=-\frac{1}{|\cos x|}\frac{|\cos x|}{\cos x}(-senx)=\frac{senx}{\cos x}$, quindi la primitiva trovata è corretta.

k) Data la funzione $f(x)=-\frac{\cos x}{senx}$, si ha: $\int -\frac{\cos x}{senx}dx=-\log|senx|+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, si ha: $D(-\log|senx|+c)=-\frac{1}{|senx|}\frac{|senx|}{senx}(\cos x)=-\frac{\cos x}{senx}$, quindi la primitiva trovata è corretta.

2) Delle funzioni assegnate, la primitiva richiesta, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=\cos(2x+\pi)-x\sqrt[4]{x}$, si ha: $\int\left(\cos(2x+\pi)-x\sqrt[4]{x}\right)dx$, e quindi $\int\cos(2x+\pi)dx-\int x\sqrt[4]{x}dx=\frac{1}{2}sen(2x+\pi)-\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+c=\frac{1}{2}sen(2x+\pi)-\frac{4\sqrt[4]{x^9}}{9}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}sen(\pi)+c=1$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{1}{2}sen(2x+\pi)-\frac{4\sqrt[4]{x^9}}{9}+1$.

b) Data la funzione $f(x)=\frac{1}{\cos^2(x+\pi)}$, si ha: $\int\frac{1}{\cos^2(x+\pi)}dx=tg(x+\pi)+c$, e quindi per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=0\Leftrightarrow tg(\pi)+c=0\Leftrightarrow c=0$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=tg(x+\pi)$.

c) Data la funzione $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}$, si ha: $\int\left(e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}\right)dx$, e quindi $\int e^{\frac{x}{2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{\pi}arcsen(\pi x)+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=1\Leftrightarrow 2e^{\frac{0}{2}}-\frac{1}{\pi}arcsen(\pi 0)+c=1\Leftrightarrow c=-1$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{\pi}arcsen(\pi x)-1$.

d) Data la funzione $f(x)=2^{3x-1}+\frac{1}{sen^2 x}$, si ha: $\int\left(2^{3x-1}+\frac{1}{sen^2 x}\right)dx$, e quindi $\int 2^{3x-1}dx+\int\frac{1}{sen^2 x}dx=\frac{1}{3\log 2}2^{3x-1}-\cot gx+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(1)=1\Leftrightarrow\frac{1}{3\log 2}2^{3-1}-\cot g1+c=1\Leftrightarrow c=1-\frac{4}{\log 8}+\cot g1$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{1}{3\log 2}2^{3x-1}-\cot gx+1-\frac{4}{\log 8}+\cot g1$.

e) Data la funzione $f(x)=e^{\frac{\pi x-1}{2}}+\frac{1}{(1+2x)^3}$, si ha: $\int\left(e^{\frac{\pi x-1}{2}}+\frac{1}{(1+2x)^3}\right)dx$, e quindi $\int e^{\frac{\pi x-1}{2}}dx+\int\frac{1}{(1+2x)^3}dx=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi x-1}{2}}-\frac{1}{4(1+2x)^2}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=0\Leftrightarrow\frac{2}{\pi}e^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{4}+c=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi\sqrt{e}}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi x-1}{2}}-\frac{1}{4(1+2x)^2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi\sqrt{e}}$.

f) Data la funzione $f(x)=3^{\frac{2x-1}{3}}-\frac{1}{\pi x}$, si ha: $\int\left(3^{\frac{2x-1}{3}}-\frac{1}{\pi x}\right)dx$, e quindi $\int 3^{\frac{2x-1}{3}}dx-\int\frac{1}{\pi x}dx=\frac{3}{\log 9}3^{\frac{2x-1}{3}}-\frac{1}{\pi}\log|x|+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(1)=0\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{3}}{\log 9}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{3\sqrt{3}}{\log 9}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{3}{\log 9}3^{\frac{2x-1}{3}}-\frac{1}{\pi}\log|x|-\frac{3\sqrt{3}}{\log 9}$.

g) Data la funzione $f(x)=2^{\frac{-2x+1}{2}}+\frac{1}{sen^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$, si ha: $\int\left(2^{\frac{-2x+1}{2}}+\frac{1}{sen^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\right)dx$, e quindi $\int 2^{\frac{-2x+1}{2}}dx+\int\frac{1}{sen^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}dx=\frac{-1}{\log 2}2^{\frac{-2x+1}{2}}-\cot g\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log 2}2^{\frac{1}{2}}-\cot g\left(\frac{\pi}{2}\right)+c=1 \Leftrightarrow c=1+\frac{\sqrt{2}}{\log 2}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{-1}{\log 2}2^{\frac{-2x+1}{2}}-\cot g\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{\sqrt{2}}{\log 2}+1$.

h) Data la funzione $f(x)=4x-2$, si ha: $\int(4x-2)dx=\int 2(2x-1)dx=\frac{(2x-1)^2}{2}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(1)=1 \Leftrightarrow \frac{(2-1)^2}{2}+c=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{(2x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}$.

i) Data la funzione $f(x)=x(x^2+2)$, si ha: $\int x(x^2+2)dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+2)dx=\frac{(x^2+2)^2}{4}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=0 \Leftrightarrow \frac{(0+2)^2}{4}+c=0 \Leftrightarrow c=-1$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{(x^2+2)^2}{4}-1$.

3) Una primitiva delle funzioni date, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=\frac{2x^2+x-5}{3x-1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\frac{2x^2+x-5}{3x-1}dx=\int\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}-\frac{\frac{40}{9}}{3x-1}\right)dx=\frac{2}{3}\int xdx+\frac{5}{9}\int dx-\frac{40}{27}\int\frac{3}{3x-1}dx$, conseguentemente una primitiva risulta: $F(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x-\frac{40}{27}\log|3x-1|+c$.

b) Data la funzione $f(x)=\frac{3x^3-2x^2-1}{2x-1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\frac{3x^3-2x^2-1}{2x-1}dx=\int\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}-\frac{9}{16x-8}\right)dx$, ovvero $\frac{3}{2}\int x^2dx-\frac{1}{4}\int xdx-\frac{1}{8}\int dx-\int\frac{9}{16x-8}dx$, conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{9}{16}\log|16x-8|+c$.

c) Data la funzione $f(x)=\dfrac{5x^4-2x^2-1}{5x+1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\dfrac{5x^4-2x^2-1}{5x+1}dx=\int\left(x^3-\dfrac{1}{5}x^2-\dfrac{9}{25}x+\dfrac{9}{125}-\dfrac{134}{125}\dfrac{1}{5x+1}\right)dx$, ovvero $\int x^3dx-\dfrac{1}{5}\int x^2dx-\dfrac{9}{25}\int xdx+\dfrac{9}{125}\int dx-\dfrac{134}{125}\int\dfrac{1}{5x+1}dx$, conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{15}-\dfrac{9}{50}x^2+\dfrac{9}{125}x-\dfrac{134}{625}\log|5x+1|+c$.

d) Data la funzione $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+2}{2x+1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\dfrac{4x^2+3x+2}{2x+1}dx=\int\left(2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4x+2}\right)dx=2\int xdx+\dfrac{1}{2}\int dx+\int\dfrac{3}{4x+2}dx$, conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}\log|4x+2|+c$.

e) Data la funzione $f(x)=\dfrac{2x^4+2x^2+1}{x^2+1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\dfrac{2x^4+2x^2+1}{x^2+1}dx=\int\left(2x^2+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=2\int x^2dx+\int\dfrac{1}{x^2+1}dx$, conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=\dfrac{2}{3}x^3+arctgx+c$.

f) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^4-x^3-1}{x^2-1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\dfrac{x^4-x^3-1}{x^2-1}dx=\int\left(x^2-x+1-\dfrac{x}{x^2-1}\right)dx$, ovvero $\int\dfrac{x^4-x^3-1}{x^2-1}dx=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{x^2-1}dx$ conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{1}{2}\log|x^2-1|+c$.

g) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3+1}$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3+1}dx=\int\left(1-\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)dx$, ovvero $\int\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3+1}dx=x-\dfrac{1}{3}\int\dfrac{3x^2}{x^3+1}dx$ conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=x-\dfrac{1}{3}\log|x^3+1|+c$.

4) Una primitiva delle funzioni assegnate, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=\frac{2x+1}{3x^2-x}$, si ha: $\int\frac{2x+1}{3x^2-x}dx$, e quindi se si osserva che $D(3x^2-x)=6x-1$, possiamo scrivere la funzione razionale $\frac{2x+1}{3x^2-x}=\frac{2x}{3x^2-x}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{1}{3}\frac{6x-1+1}{3x^2-x}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{1}{3}\frac{6x-1}{3x^2-x}+\frac{1}{3}\frac{1}{3x^2-x}+\frac{1}{3x^2-x}$, si ha $\int\frac{2x+1}{3x^2-x}dx=\int\left(\frac{1}{3}\frac{6x-1}{3x^2-x}+\frac{4}{3}\frac{1}{3x^2-x}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{6x-1}{3x^2-x}dx+\frac{4}{3}\int\frac{1}{3x^2-x}dx$; ovvero $\frac{1}{3}\log\left|3x^2-x\right|+\frac{4}{3}\int\frac{1}{3x^2-x}dx$ e per quest'ultimo integrale, essendo in delta positivo si ha $\frac{1}{3x^2-x}=\frac{1}{3x\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{A}{3x}+\frac{B}{x-\frac{1}{3}}=\frac{A\left(x-\frac{1}{3}\right)+B3x}{3x\left(x-\frac{1}{3}\right)}$ di cui al numeratore $Ax+B3x-\frac{A}{3}$ e per l'identità dei polinomi, si ha $\begin{cases}A+B3=0\\-\frac{A}{3}=1\end{cases}=\begin{cases}B=1\\A=-3\end{cases}$ per cui $\int\frac{1}{3x^2-x}dx=-\int\frac{3}{3x}dx+\int\frac{1}{x-\frac{1}{3}}dx=-\log|3x|+\log\left|x-\frac{1}{3}\right|$ conseguentemente una primitiva risulta : $F(x)=\frac{1}{3}\log\left|3x^2-x\right|-\frac{4}{3}\log|3x|+\frac{4}{3}\log\left|x-\frac{1}{3}\right|+c$.

b) Data la funzione $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$, si ha: $\int\frac{x-1}{x^2-2x}dx$, e quindi se si osserva che $D(x^2-2x)=2x-2$, possiamo scrivere la funzione razionale $\frac{x-1}{x^2-2x}=\frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x}$, si ha $\int\frac{x-1}{x^2-2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x}dx=\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x\right|$; conseguentemente una primitiva risulta $F(x)=\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x\right|+c$.

c) Data la funzione $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-2x+1}$, si ha: $\int\frac{2x-3}{x^2-2x+1}dx$, e quindi se si osserva che $D(x^2-2x+1)=2x-2$, possiamo scrivere la funzione razionale $\frac{2x-3}{x^2-2x+1}=\frac{2x-3+1-1}{x^2-2x+1}=\frac{2x-2}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2-2x+1}$, pertanto si ha $\int\frac{2x-3}{x^2-2x+1}dx=\int\frac{2x-2}{x^2-2x+1}dx-\int\frac{1}{x^2-2x+1}dx=\log\left|x^2-2x+1\right|-\int\frac{1}{x^2-2x+1}dx$; per quest'ultimo integrale, essendo in delta nullo si ha $\int \frac{1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int (x-1)^{-2}dx = -\frac{1}{x-1}$ e conseguentemente una primitiva risulta $F(x) = \log\left|x^2-2x+1\right| + \frac{1}{x-1} + c$.

d) Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{x^2-2x+2}$, si ha: $\int \frac{3x^2-x+2}{x^2-2x+2}dx$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int \frac{3x^2-x+2}{x^2-2x+2}dx = 3\int dx + \int \frac{5x-4}{x^2-2x+2}dx$ e quindi se si osserva che $D(x^2-2x+2) = 2x-2$, il secondo integrale lo possiamo scrivere $\int \frac{5x-4}{x^2-2x+2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \frac{5}{2}\int \frac{2}{x^2-2x+2}dx - \int \frac{4}{x^2-2x+2}dx$, ovvero $\int \frac{5x-4}{x^2-2x+2}dx = \frac{5}{2}\log\left|x^2-2x+2\right| + \int \frac{1}{x^2-2x+2}dx$; per quest'ultimo integrale, essendo in delta negativo si ha $\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+\frac{4}{4}}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx = arctg(x-1)$; e conseguentemente una primitiva risulta $F(x) = 3x + \frac{5}{2}\log\left|x^2-2x+2\right| + arctg(x-1) + c$.

e) Data la funzione $f(x) = \frac{4x^3-2x+1}{2x^2-2x-1}$, si ha: $\int \frac{4x^3-2x+1}{2x^2-2x-1}dx$, considerato che è possibile effettuare la divisione tra i polinomi, si ha: $\int \frac{4x^3-2x+1}{2x^2-2x-1}dx = 2\int xdx + 2\int dx + \int \frac{4x+3}{2x^2-2x-1}dx = x^2+2x+\int \frac{4x+3}{2x^2-2x-1}dx$ e quindi se si osserva che $D(2x^2-2x-1) = 4x-2$, possiamo scrivere la funzione razionale $\frac{4x+3}{2x^2-2x-1} = \frac{4x+3-2+2}{2x^2-2x-1} = \frac{4x-2}{2x^2-2x-1} + \frac{5}{2x^2-2x-1}$, pertanto si ha $\int \frac{4x+3}{2x^2-2x-1}dx = \int \frac{4x-2}{2x^2-2x-1}dx + \int \frac{5}{2x^2-2x-1}dx = \log\left|2x^2-2x-1\right| + 5\int \frac{1}{2x^2-2x-1}dx$; e per quest'ultimo integrale, essendo il delta positivo si ha $\frac{1}{2x^2-2x-1} = \frac{1}{2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{A}{\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{B}{\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$, ovvero $\frac{1}{2}\frac{A\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+B\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{Ax-A\frac{1-\sqrt{3}}{2}+Bx-B\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$ di cui dal numeratore per l'identità dei polinomi, si ha $\begin{cases} A+B=0 \\ -A\frac{1-\sqrt{3}}{2}-B\frac{1+\sqrt{3}}{2}=1 \end{cases} = \begin{cases} A=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ B=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ per cui

$\int \frac{1}{2x^2-2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}dx,$ ovvero

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}dx - \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right| + c$$

conseguentemente una primitiva risulta :

$F(x) = x^2+2x+\log\left|2x^2-2x-1\right| + \frac{5}{2\sqrt{3}}\log\left|x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right| - \frac{5}{2\sqrt{3}}\log\left|x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right| + c$.

5) La primitiva delle funzioni date, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=sen^2x$, si ha: $\int sen^2xdx = \int(senxsenx)dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=senx \to f'(x)=\cos x$; e posto $g'(x)=senx \to g(x)=-\cos x$; per cui $\int sen^2xdx = -senx\cos x + \int \cos x\cos xdx = -senx\cos x + \int \cos^2 xdx$ e ricordando che $\cos^2 x = 1-sen^2x$, si ha $\int sen^2xdx = -senx\cos x + \int 1-sen^2xdx = -senx\cos x + x - \int sen^2xdx$ ovvero $2\int sen^2xdx = -senx\cos x + x \Leftrightarrow \int sen^2xdx = \frac{-senx\cos x + x}{2}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}+c=\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+c=\pi \Leftrightarrow c=\frac{3\pi}{4}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{-senx\cos x + x}{2}+\frac{3}{4}\pi$.

b) Data la funzione $f(x)=\cos^2 x$, si ha: $\int \cos^2 xdx = \int(\cos x\cos x)dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=\cos x \to f'(x)=-senx$; e posto $g'(x)=\cos x \to g(x)=senx$; per cui $\int \cos^2 xdx = \cos xsenx + \int senxsenxdx = \cos xsenx + \int sen^2xdx$ e ricordando che $sen^2x = 1-\cos^2 x$, si ha $\int \cos^2 xdx = \cos xsenx + \int 1-\cos^2 xdx = \cos xsenx + x - \int \cos^2 xdx$ ovvero $2\int \cos^2 xdx = \cos xsenx + x \Leftrightarrow \int \cos^2 xdx = \frac{\cos xsenx + x}{2}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(\pi)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos x sen x + x}{2}+c=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+c=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c=0$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=\frac{\cos x sen x + x}{2}$.

c) Data la funzione $f(x)=\arccos \pi x$, si ha: $\int \arccos \pi x dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=\arccos \pi x \to f'(x)=-\frac{\pi}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}$; e posto $g'(x)=1 \to g(x)=x$; per cui $\int \arccos(\pi x)dx = x\arccos(\pi x)-\int \frac{-\pi x}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}dx$ e per quest'ultimo integrale $\int \frac{\pi x}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}dx=\int \pi x\left(1-(\pi x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$ ricordando che $D\left(1-(\pi x)^2\right)=0-2(\pi x)\pi$, si ha $\frac{1}{-2\pi}\int -2\pi\pi x\left(1-(\pi x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{-1}{\pi}\int -\pi\pi x\left(1-(\pi x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{2\sqrt{1-(\pi x)^2}}{2\pi}+c$; quindi $\int \arccos(\pi x)dx = x\arccos(\pi x)-\frac{\sqrt{1-(\pi x)^2}}{\pi}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\arccos(\pi 0)-\frac{\sqrt{1-(\pi 0)^2}}{\pi}+c=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow c=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}=\frac{\pi^2+2}{2\pi}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=x\arccos(\pi x)-\frac{\sqrt{1-(\pi x)^2}}{\pi}+\frac{\pi^2+2}{2\pi}$.

d) Data la funzione $f(x)=arctg\frac{\pi}{2}x$, si ha: $\int arctg\frac{\pi}{2}xdx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=arctg\frac{\pi}{2}x \to f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}\frac{\pi}{2}$; e posto $g'(x)=1 \to g(x)=x$; per cui $\int arctg\frac{\pi}{2}xdx = xarctg\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\int \frac{x}{1+\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}dx$ e per quest'ultimo integrale $\int \frac{x}{1+\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2}dx=\int \frac{x}{1+\frac{\pi^2}{4}x^2}dx$ ricordando che $D\left(1+\frac{\pi^2}{4}x^2\right)=\frac{\pi^2}{2}x$, si ha $\int \frac{x}{1+\frac{\pi^2}{4}x^2}dx=\frac{1}{\frac{\pi^2}{2}}\int \frac{\frac{\pi^2}{2}x}{1+\frac{\pi^2}{4}x^2}dx=\frac{2}{\pi^2}\log\left|1+\frac{\pi^2}{4}x^2\right|$; quindi $\int arctg\frac{\pi}{2}xdx = xarctg\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{\pi}\log\left|1+\frac{\pi^2}{4}x^2\right|+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(1)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow xarctg\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{\pi}\log\left|1+\frac{\pi^2}{4}x^2\right|+c=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow arctg\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}\log\frac{4+\pi^2}{4}+c=\frac{\pi}{2}$, ovvero $c=\frac{\pi}{2}-arctg\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\log\frac{4+\pi^2}{4}$ conseguentemente la primitiva è: $F(x)=xarctg\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{\pi}\log\left|1+\frac{\pi^2}{4}x^2\right|+\frac{\pi}{2}-arctg\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\log\frac{4+\pi^2}{4}$.

e) Data la funzione $f(x)=tg2\pi x$, si ha: $\int tg2\pi x dx=\int\frac{sen2\pi x}{\cos 2\pi x}dx$, e ricordando che $D\cos 2\pi x=-2\pi sen2\pi x$, si ha $-\frac{1}{2\pi}\int\frac{2\pi sen2\pi x}{\cos 2\pi x}dx=-\frac{1}{2\pi}\log|\cos 2\pi x|+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(1)=\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2\pi}\log|\cos 2\pi x|+c=\pi \Leftrightarrow c=\pi$, conseguentemente la primitiva è: $F(x)=-\frac{1}{2\pi}\log|\cos 2\pi x|+\pi$.

6) Una primitiva delle funzioni date, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=(3x^2-x)\log(2x+1)$, si ha: $\int(3x^2-x)\log(2x+1)dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=\log(2x+1)\to f'(x)=\frac{2}{2x+1}$; e posto $g'(x)=3x^2-x\to g(x)=x^3-\frac{x^2}{2}$; per cui $\int(3x^2-x)\log(2x+1)dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\log(2x+1)-\int\frac{2x^3-x^2}{2x+1}dx$ e per quest'ultimo integrale effettuando al divisione si ha quindi $\int(3x^2-x)\log(2x+1)dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\log(2x+1)-\int x^2dx+\int xdx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{2}{2x+1}dx$; conseguentemente una primitiva risulta: $F(x)=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\log(2x+1)-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\log|2x+1|+c$.

b) Data la funzione $f(x)=(2x^2+x)arctg(x-1)$, si ha: $\int(2x^2+x)arctg(x-1)dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=arctg(x-1)\to f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}$; e posto $g'(x)=2x^2+x\to g(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}$; per cui

$$\int(2x^2+x)arctg(x-1)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)arctg(x-1)-\int\frac{\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}}{1+(x-1)^2}dx$$ e per quest'ultimo integrale effettuando al divisione si ha $\frac{\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}}{x^2-2x+2}=2x+\frac{11}{6}+\frac{\frac{7}{3}x-\frac{22}{6}}{x^2-2x+2}$ quindi

$$\int(2x^2+x)arctg(x-1)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)arctg(x-1)-2\int xdx-\frac{11}{6}\int dx-\int\frac{\frac{7}{3}x-\frac{22}{6}}{x^2-2x+2}dx;$$ per quest'ultimo integrale, si osserva che $D(x^2-2x+2)=2x-2$, pertanto

$$\frac{\frac{7}{3}x-\frac{22}{6}}{x^2-2x+2}=\frac{7}{6}\frac{2x-2+2}{x^2-2x+2}-\frac{22}{6}\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{7}{6}\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{6}\frac{14}{x^2-2x+2}-\frac{1}{6}\frac{22}{x^2-2x+2}$$

quindi l'ultimo integrale diventa $\int\frac{\frac{7}{3}x-\frac{22}{6}}{x^2-2x+2}dx=\frac{7}{6}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx-\frac{8}{6}\int\frac{1}{x^2-2x+2}dx$, pertanto si ha

$$\int(2x^2+x)arctg(x-1)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)arctg(x-1)-x^2-\frac{11}{6}x-\frac{7}{6}\log\left|x^2-2x+2\right|+\frac{8}{6}\int\frac{1}{x^2-2x+2}dx$$

e per l'ultimo integrale si osserva che il delta è negativo, pertanto si ha $\int\frac{1}{(x-1)^2+1}dx=arctg(x-1)$ conseguentemente una primitiva risulta:

$$F(x)=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{8}{6}\right)arctg(x-1)-x^2-\frac{11}{6}x-\frac{7}{6}\log\left|x^2-2x+2\right|+c.$$

c) Data la funzione $f(x)=(5x^4+1)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)$, si ha: $\int(5x^4+1)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)\rightarrow f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{x^2+1}$; e posto $g'(x)=5x^4+1\rightarrow g(x)=x^5+x$; per cui

$$\int(5x^4+1)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)dx=(x^5+x)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)+\int\frac{x^5+x}{x^2+1}dx$$ e per quest'ultimo integrale effettuando al divisione si ha $\frac{x^5+x}{x^2+1}=x^3-x+\frac{2x}{x^2+1}$ quindi

$$\int(5x^4+1)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)dx=(x^5+x)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)+\int x^3dx-\int xdx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx;$$

conseguentemente una primitiva risulta: $F(x)=(x^5+x)arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\log\left|x^2+1\right|+c$.

d) Data la funzione $f(x)=(x^2-x)2^{\frac{3x+1}{2}}$, si ha: $\int (x^2-x)2^{\frac{3x+1}{2}}dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=(x^2-x)\to f'(x)=2x-1$; e posto $g'(x)=2^{\frac{3x+1}{2}}\to g(x)=\frac{2}{\log 8}2^{\frac{3x+1}{2}}$; per cui $\int (x^2-x)2^{\frac{3x+1}{2}}dx=\frac{2}{\log 8}(x^2-x)2^{\frac{3x+1}{2}}-\frac{2}{\log 8}\int (2x-1)2^{\frac{3x+1}{2}}dx$; e per quest'ultimo integrale, integrando ancora per parte e posto $f(x)=(2x-1)\to f'(x)=2$; e posto $g'(x)=2^{\frac{3x+1}{2}}\to g(x)=\frac{2}{\log 8}2^{\frac{3x+1}{2}}$; quindi $\int (2x-1)2^{\frac{3x+1}{2}}dx=\frac{2}{\log 8}(2x-1)2^{\frac{3x+1}{2}}-\frac{4}{\log 8}\int 2^{\frac{3x+1}{2}}dx=\frac{2}{\log 8}(2x-1)2^{\frac{3x+1}{2}}-\frac{8}{\log^2 8}2^{\frac{3x+1}{2}}$; conseguentemente una primitiva risulta: $F(x)=\frac{2}{\log 8}(x^2-x)2^{\frac{3x+1}{2}}-\frac{2}{\log 8}\left(\frac{2}{\log 8}(2x-1)2^{\frac{3x+1}{2}}-\frac{8}{\log^2 8}2^{\frac{3x+1}{2}}\right)+c$; ovvero $F(x)=2^{\frac{3x+1}{2}}\frac{2}{\log 8}\left((x^2-x)-\frac{2}{\log 8}(2x-1)+\frac{8}{\log^2 8}\right)+c$.

e) Data la funzione $f(x)=(2x^3-x^2)e^{-\frac{x}{2}}$, si ha: $\int (2x^3-x^2)e^{-\frac{x}{2}}dx$, è possibile procedere per parte, quindi posto $f(x)=2x^3-x^2\to f'(x)=6x^2-2x$; e posto $g'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\to g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}$; per cui $\int (2x^3-x^2)e^{-\frac{x}{2}}dx=-2(2x^3-x^2)e^{-\frac{x}{2}}+2\int (6x^2-2x)e^{-\frac{x}{2}}dx$; e per quest'ultimo integrale, integrando ancora per parte e posto $f(x)=6x^2-2x\to f'(x)=12x-2$; e posto $g'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\to g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}$; quindi $\int (6x^2-2x)e^{-\frac{x}{2}}dx=-2(6x^2-2x)e^{-\frac{x}{2}}-2\int (12x-2)e^{-\frac{x}{2}}dx$; ed ancora per quest'ultimo integrale, integrando ancora per parte e posto $f(x)=12x-2\to f'(x)=12$ e posto $g'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\to g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}$, per cui $\int (12x-2)e^{-\frac{x}{2}}dx=-2(12x-2)e^{-\frac{x}{2}}+24\int e^{-\frac{x}{2}}dx$; conseguentemente una primitiva risulta:

$$F(x) = -2\left(2x^3 - x^2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2\left(6x^2 - 2x\right)e^{-\frac{x}{2}} - 2\left(-2(12x-2)e^{-\frac{x}{2}} + 24\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)\right) + c\,;$$

ovvero $F(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(-4x^3 - 22x^2 + 104x + 176\right) + c$.