Esercitazione n. 10 (svolgimento)

1) Lo studio ed il grafico delle funzioni assegnate, risulta:

a) Data la funzione $f : X \to f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1} \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,+\infty[$,
il denominatore $\forall x \in R - \{1\}$,
pertanto $X = [-2,+\infty[\cap (R-\{1\}) = [-2,1[\cup]1,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in [-2,1[\cup]1,+\infty[$, ovvero

$$f : [-2,1[\cup]1,+\infty[\to f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \in R$$

Segno della funzione:
Essendo il numeratore sempre positivo, vedere dove $f(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[\cap X =]1,+\infty[$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cap X =]-2,1[$

Si osserva che $f(-2) = 0$, quindi tocca il punto $(-2,0)$. Mentre $f(0) = -\sqrt{2}$ pertanto passa per il punto $(0,-\sqrt{2})$.

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x+2} \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \sqrt{3}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+2} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \sqrt{3}(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Pertanto la retta $x=1$ è un asintoto verticale a destra ed a sinistra, mentre le retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x)=\frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+2}}{(x-1)^2}=\frac{x-1-2(x+2)}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}=\frac{-x-5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}=-\frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}$$., quindi

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}>0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}<0$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, tranne nel punto -2, è sufficiente studiare $x+5<0 \Leftrightarrow x<-5 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-5\right[\cap X=\emptyset$, ed osservare che $-\lim_{x\to -2^+}\frac{x+5}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}}=-\infty$ conseguentemente la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

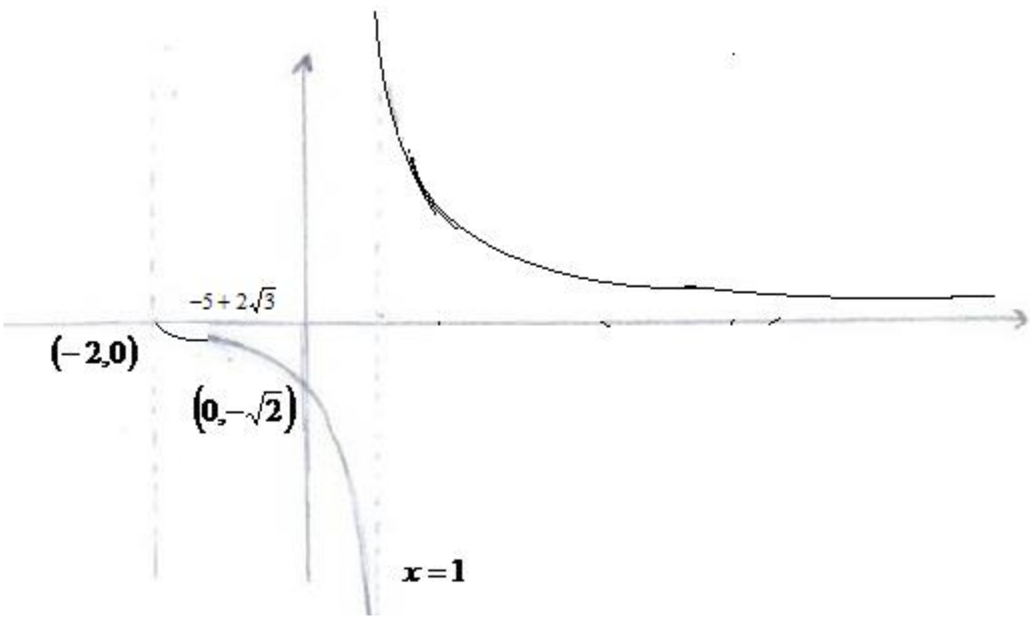
Derivata seconda e concavità:

$$f''(x)=-\frac{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}-(x+5)\left[2(x-1)2\sqrt{x+2}+\frac{2(x-1)^2}{2\sqrt{x+2}}\right]}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{(x-1)^2 2(x+2)-(x+5)2(x-1)2(x+2)-(x+5)(x-1)^2}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2\sqrt{x+2}}=$$

$$=-\frac{(x-1)\left((x-1)(2x+4)-(x+5)(4x+8)-(x+5)(x-1)\right)}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2\sqrt{x+2}}=\frac{(x-1)\left(3x^2+30x+39\right)}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2\sqrt{x+2}}$$, pertanto

essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $(x-1)\left(3x^2+30x+39\right)>0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-2,-5+2\sqrt{3}\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\forall x\in \left]-2,-5+2\sqrt{3}\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ mentre è strettamente concava in $\forall x\in \left]-5+2\sqrt{3},1\right[$ con punto di flesso proprio in $-5+2\sqrt{3}$.



b) Data la funzione $f : X \to f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $\forall x \in R$,
il denominatore, $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[$
pertanto $X = x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\cap R = x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[$, ovvero

$$f : \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\to f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} \in R$$

Segno della funzione:
Essendo il denominatore sempre positivo, vedere dove $f(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[\cap X = \left]2,+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow \left]-\infty,1\right[\cap X = \left]-\infty,-2\right[$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x-1) \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = -3(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-1) \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = 1(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1$$

Pertanto la retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale a sinistra, mentre la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale a destra. Inoltre le rette $x = -2$ e $x = 2$ sono rispettivamente due asintoti verticali a sinistra ed a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}-(x-1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{\left(x^2-4\right)}=\frac{x^2-4-x^2+x}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}=\frac{x-4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}$$., quindi

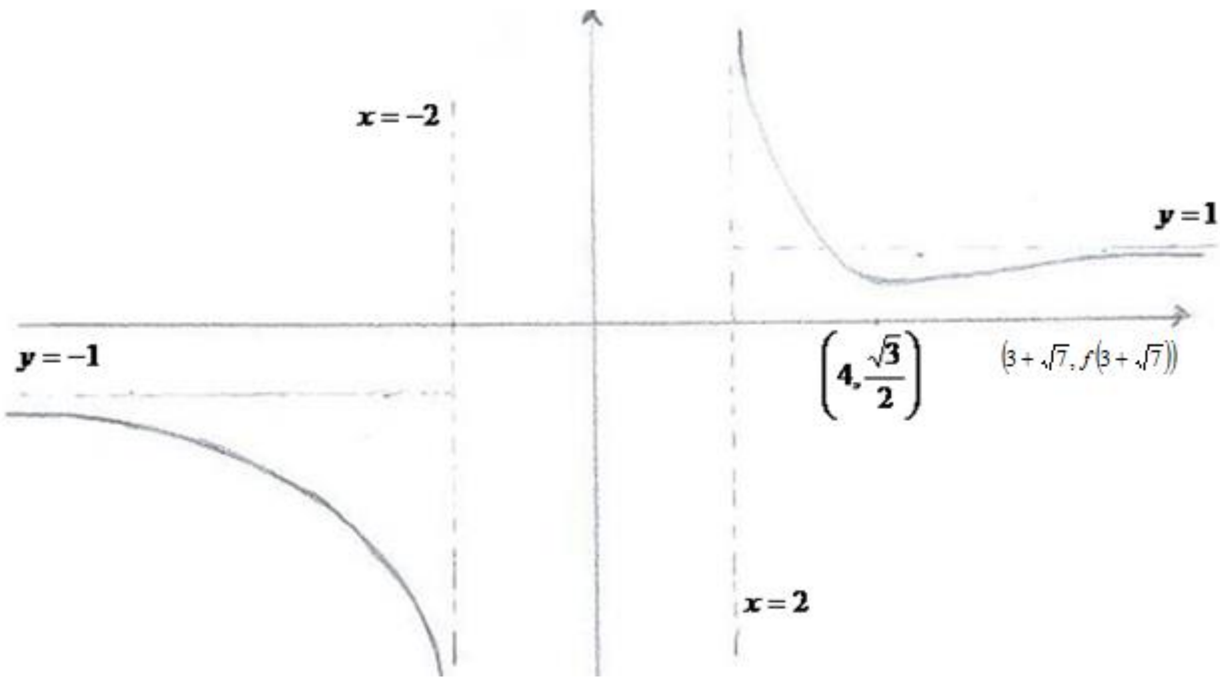
$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}}>0$, pertanto al denominatore essendo la radice positiva nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente studiare $\dfrac{x-4}{\left(x^2-4\right)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{(x-2)(x+2)}>0$, conseguentemente $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]4,+\infty[$ ed è $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]2,4[$ pertanto la funzione è strettamente decrescente in $]-\infty,-2[\,\cup\,]2,4[$ e strettamente crescente in $]4,+\infty[$. Conseguentemente $f'(4)=0$ quindi la funzione ha un punto di minimo relativo ed il suo minimo è $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}-(x-4)\left[2x\sqrt{x^2-4}+\dfrac{\left(x^2-4\right)2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right]}{\left(\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2-4\right)-(x-4)2x\left(x^2-4\right)-x(x-4)\left(x^2-4\right)}{\left(\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2-4}\right)^2\sqrt{x^2-4}}==\frac{\left(-2x^2+12x-4\right)}{\left(x^2-4\right)^2\sqrt{x^2-4}}$$, pertanto essendo

il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $-2x^2+12x-4>0 \Leftrightarrow 2x^2-12x+4<0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\,]3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}[$ pertanto la funzione è strettamente concava in $]-\infty,-2[$, è strettamente convessa in $]2,3+\sqrt{7}[$ mentre ritorna strettamente concava in $]3+\sqrt{7},+\infty[$ con punto di flesso proprio in $3+\sqrt{7}$.



c) Data la funzione $f : X \rightarrow f(x) = \log_{1/2} \log_2 x \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione composta della funzione logaritmica, deve essere $\log_2 x > 0 = \log_2 1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$,
pertanto $X =]1,+\infty[$
Quindi tale funzione è definita $\forall x \in]1,+\infty[$, ovvero

$$f :]1,+\infty[\rightarrow f(x) = \log_{1/2} \log_2 x \in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{1/2} \log_2 x > 0 = \log_{1/2} 1 \Leftrightarrow \log_2 x < 1 = \log_2 2 \Leftrightarrow x < 2$
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,2[\cap X =]1,2[$
Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]2,+\infty[\cap X =]2,+\infty[$

Si osserva che $f(2) = 0$, quindi passa per il punto $(2,0)$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\log_{1/2} \log_2 x)$, trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x \to 1^+} \log_2 x = 0$ e conseguentemente $\lim_{y \to 0} \log_{1/2} y = +\infty$, quindi $\lim_{x \to 1^+} (\log_{1/2} \log_2 x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\log_{1/2} \log_2 x) = -\infty$, in quanto $\lim_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y \to +\infty} \log_{1/2} y = -\infty$

Pertanto la retta $x = 1$ è un asintoto verticale a destra.

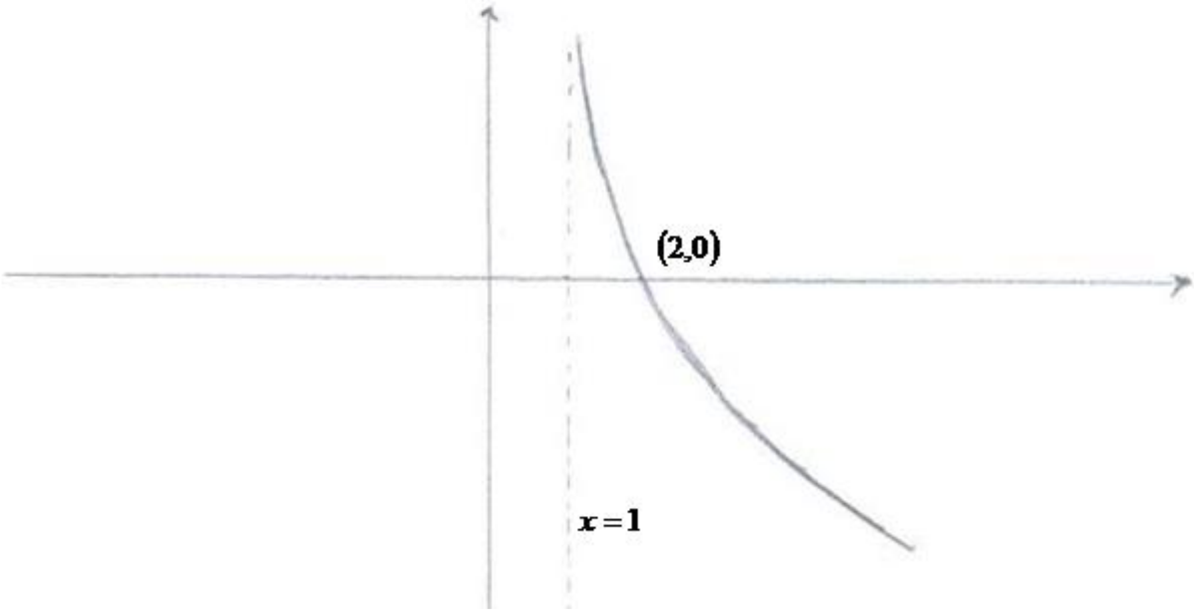
Derivata prima e monotonia:
$f'(x) = \log_{1/2} \log_2 x = \frac{\log_{1/2} e}{\log_2 x} \frac{\log_2 e}{x} = \log_2 e \log_{1/2} e \frac{1}{x \log_2 x}$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 e \log_{1/2} e}{x \log_2 x} > 0$, pertanto essendo il denominatore positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente constatare che $\log_{1/2} e$ è negativo, quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ mentre $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$ pertanto la funzione è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione $]1,+\infty[$.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x)=\frac{-\log_2 e\log_{1/2} e\left[\log_2 x+\frac{x}{x}\log_2 e\right]}{(x\log_2 x)^2}=\frac{-\log_2 e\log_{1/2} e(\log_2 x+\log_2 e)}{(x\log_2 x)^2}=.$$

$=\frac{-\log_2 e\log_{1/2} e\log_2 x-(\log_2 e)^2\log_{1/2} e}{(x\log_2 x)^2}$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $-\log_2 e\log_{1/2} e\log_2 x>(\log_2 e)^2\log_{1/2} e\Leftrightarrow -\log_2 e\log_2 x>(\log_2 e)^2$, ovvero risulta $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]1,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa nel suo dominio.



d) Data la funzione $f:X\to f(x)=\log_2(x+2)\in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione logaritmica, deve essere $x+2>0\Leftrightarrow x\in\left]-2,+\infty\right[$,
pertanto $X=\left]-2,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-2,+\infty\right[$, ovvero

$$f:\left]-2,+\infty\right[\to f(x)=\log_2(x+2)\in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x)>0\Leftrightarrow \log_2(x+2)>0=\log_2 1\Leftrightarrow x+2>1\Leftrightarrow x>-1$
Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]-1,+\infty\right[\cap X=\left]-1,+\infty\right[$
Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty-1\right[\cap X=\left]-2,-1\right[$

Si osserva che, $f(-1)=0$ ed , $f(0)=1$ quindi passa per i punti $(-1,0)$ e $(0,1)$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

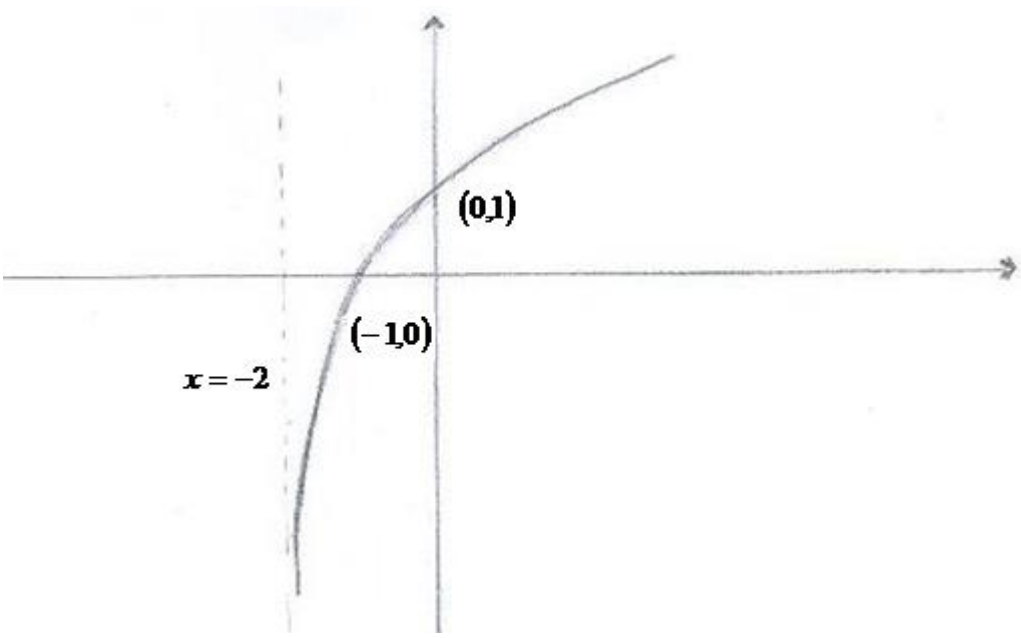
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \log_2(x+2) = -\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x \to -2^+} (x+2) = 0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y \to 0} \log_2 y = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2(x+2) = +\infty$, sempre trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$ e conseguentemente $\lim\limits_{y \to +\infty} \log_2 y = +\infty$

Pertanto la retta $x = -2$ è un asintoto verticale a destra.

Derivata prima e monotonia:
$f'(x) = \dfrac{\log_2 e}{x+2}$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 e}{x+2} > 0$, pertanto essendo il denominatore positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente constatare che $\log_2 e$ è positivo, quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2,+\infty\right[$ ovvero la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione $\left]-2,+\infty\right[$.

Derivata seconda e concavità:
$f''(x) = \dfrac{-\log_2 e}{(x+2)^2}$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x) > 0$ è sufficiente constatare che $\log_2 e$ è positivo, quindi $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ conseguentemente risulta $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente concava nel suo dominio.



e) Data la funzione $f : X \to f(x) = 2^{x^2-1} - 3 \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione esponenziale meno una costante, è definita in tutto *R*, pertanto $X = R$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in R$, ovvero

$$f : R \to f(x) = 2^{x^2-1} - 3 \in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} > 3 = 2^{\log_2 3} \Leftrightarrow x^2 - 1 > \log_2 3 \Leftrightarrow x^2 > 1 + \log_2 3$
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{1+\log_2 3} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{1+\log_2 3}\right[\cup \left]\sqrt{1+\log_2 3}, +\infty\right[$
Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{1+\log_2 3}, \sqrt{1+\log_2 3}\right[$

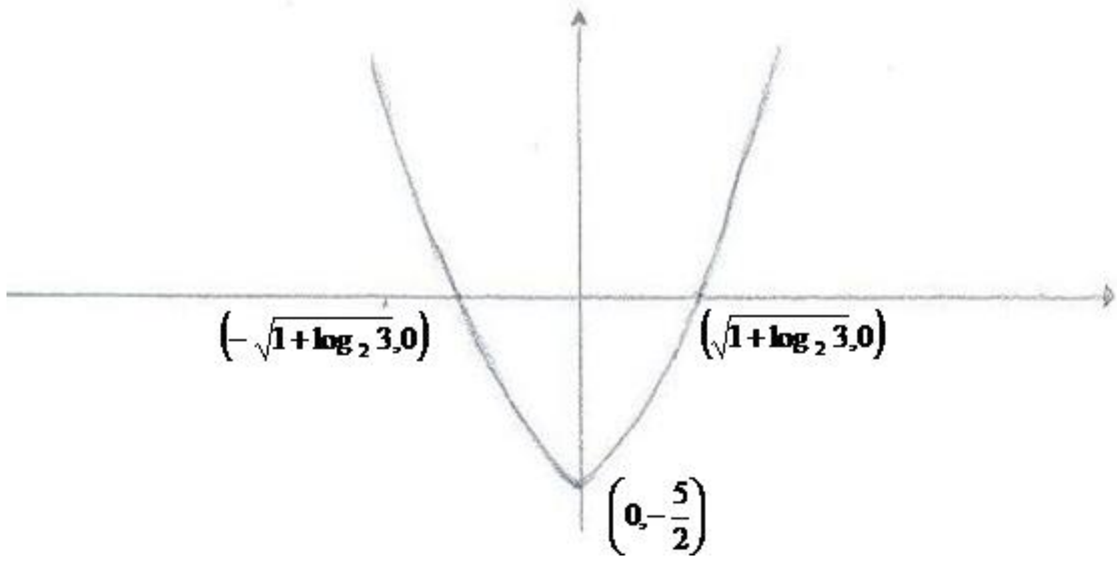
Si osserva che è una funzione pari, $f\left(-\sqrt{1+\log_2 3}\right) = f\left(\sqrt{1+\log_2 3}\right) = 0$, quindi passa per i punti $\left(-\sqrt{1+\log_2 3}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{1+\log_2 3}, 0\right)$. Inoltre essendo $f(0) = -\frac{5}{2}$, tocca il punto $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nell'estremo inferiore e superiore del dominio.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2^{x^2-1} - 3\right) = +\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 1\right) = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y \to +\infty} 2^y - 3 = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2^{x^2-1} - 3\right) = +\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 1\right) = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y \to +\infty} 2^y - 3 = +\infty$

Derivata prima e monotonia:
$f'(x) = \frac{2^{x^2-1}}{\log_2 e} 2x$., pertanto, trattandosi del rapporto tra una funzione esponenziale ed un logaritmo positivo, risulta $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0$, quindi la funzione è strettamente crescente in $\left]0, +\infty\right[$ ovvero strettamente decrescente in $\left]-\infty, 0\right[$. Conseguentemente ha in zero un punto di minimo assoluto $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

Derivata seconda e concavità:
$f''(x) = \frac{2^{x^2-1}}{\log_2 e}\left(2 + 4x^2 \log_e 2\right)$, che come si può osservare risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R$ e conseguentemente $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ pertanto la funzione è strettamente convessa nel suo dominio.



f) Data la funzione $f : X \to f(x) = \log_{1/5}\left(1-2^x\right) \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione logaritmica, deve essere $1-2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 1 = 2^0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[$
pertanto $X = \left]-\infty,0\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]-\infty,0\right[$, ovvero

$$f : \left]-\infty,0\right[\to f(x) = \log_{1/5}\left(1-2^x\right) \in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{1/5}\left(1-2^x\right) > 0 = \log_{1/5} 1 \Leftrightarrow 1-2^x < 1 \Leftrightarrow 2^x > 0$
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R \cap X = \left]-\infty,0\right[$
Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo inferiore.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \log_{1/5}\left(1-2^x\right) = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-2^x\right) = 0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to 0} \log_{1/5} y = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \log_{1/5}\left(1-2^x\right) = 0$, sempre trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-2^x\right) = 1$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to 1} \log_{1/5} y = 0$

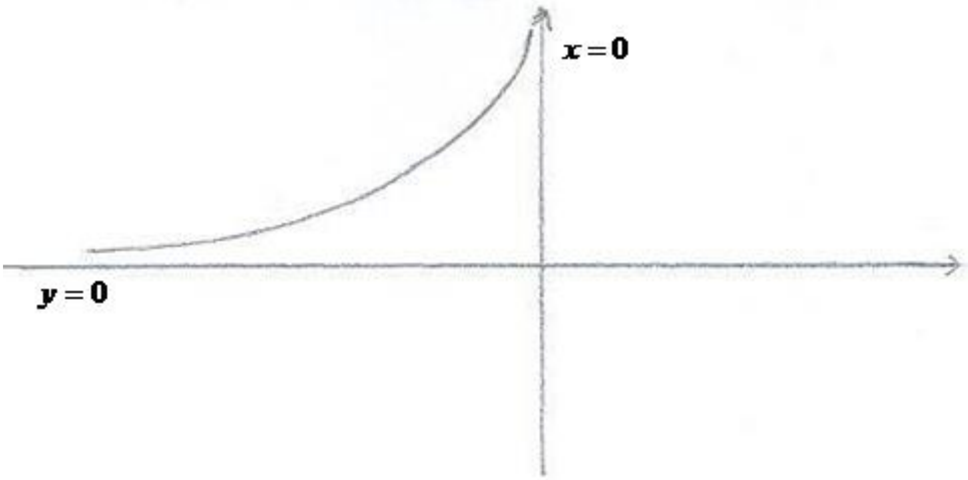
Pertanto la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a sinistra e la retta $x = 0$ è un asintoto verticale a sinistra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x)=\log_{1/5} e\frac{-2^x}{1-2^x}\log_e 2$., quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \log_{1/5} e\frac{-2^x}{1-2^x}\log_e 2>0$, ed osservando che il logaritmo decrescente è negativo come pure la funzione, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,0\right[$ quindi la funzione è strettamente crescente in $\left]-\infty,0\right[$, ovvero nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x)=-\frac{\log_e 2}{\log_e 1/5}\frac{(1-2^x)2^x\log_e 2-2^x(-2^x\log_e 2)}{(1-2^x)^2}=-\frac{\log_e 2}{\log_e 1/5}\frac{2^x\log_e 2}{(1-2^x)^2}$, ed osservando che il logaritmo decrescente è negativo, risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,0\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa nel suo dominio.



g) Data la funzione $f: X \to f(x)=\log_2 \frac{x-1}{x+1}\in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione logaritmica, deve essere $\frac{x-1}{x+1}>0$, quindi il numeratore è positivo $x\in \left]1,+\infty\right[$ il denominatore è positivo $x\in \left]-1,+\infty\right[$, conseguentemente $\frac{x-1}{x+1}>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$
pertanto $X=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to f(x)=\log_2\frac{x-1}{x+1}\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0 \Leftrightarrow \log_2\frac{x-1}{x+1}>0=\log_2 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}>1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1}>0$
Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-1\right[\cap X=\left]-\infty,-1\right[$
Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-1,+\infty\right[\cap X=\left]1,+\infty\right[$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ e conseguentemente $\lim_{y\to1} \log_2 y = 0$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \log_2 \frac{x-1}{x+1} = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} (x-1) \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x+1} = -2 \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x+1} = -2(-\infty) = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty} \log_2 y = +\infty$

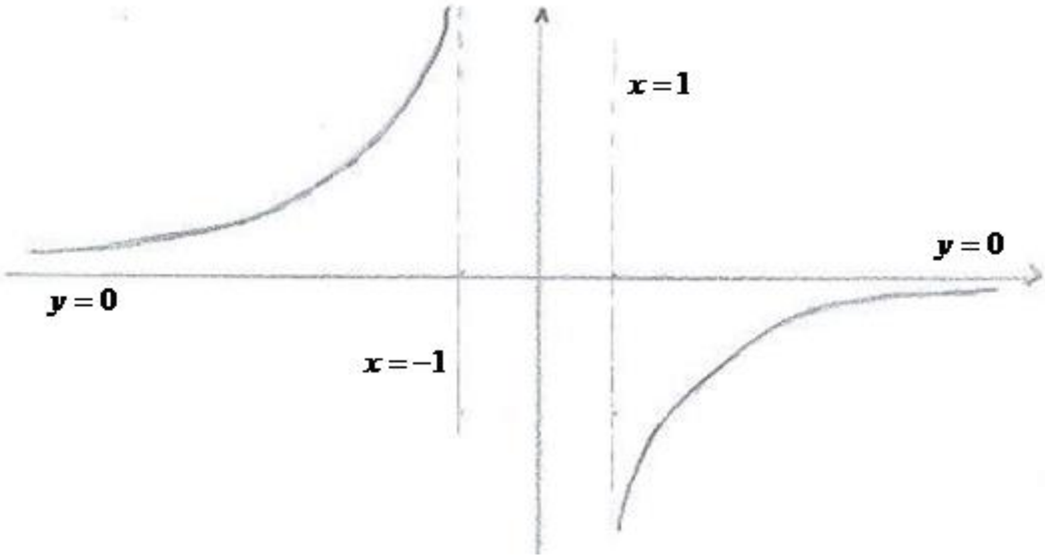
$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \log_2 \frac{x-1}{x+1} = -\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{x+1} = 0$ e conseguentemente $\lim_{y\to0} \log_2 y = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ e conseguentemente $\lim_{y\to1} \log_2 y = 0$

Pertanto la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a sinistra e a destra, mentre le rette $x = -1$ ed $x = 1$ sono rispettivamente due asintoto verticali a sinistra ed a destra.

Derivata prima e monotonia:
$f'(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1} = \log_2 e \frac{x+1}{x-1} \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \log_2 e \frac{2}{(x-1)(x+1)}$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log_2 e \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0$, ed osservando che il logaritmo crescente è positivo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:
$f''(x) = \log_2 e \frac{2}{(x^2-1)} = \log_2 e^2 \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$, ed osservando che il logaritmo è positivo, risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \log_2 e^2 \frac{-2x}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[$ conseguentemente $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $]-\infty,-1[$ ed è strettamente concava in $]1,+\infty[$.



h) Data la funzione $f : X \to f(x) = \log ar\cos \log_{1/4}(2^x - 1) \in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione logaritmica, deve essere $ar\cos \log_{1/4}(2^x - 1) > 0 = \arccos(\cos 0)$, quindi $-1 \le \log_{1/4}(2^x - 1) < \cos 0 = 1 \Leftrightarrow -1 \cdot \log_{1/4}\frac{1}{4} \le \log_{1/4}(2^x - 1) < 1 = \log_{1/4}\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^x - 1 \le 4$

infine $\frac{5}{4} < 2^x \le 5 \Leftrightarrow 2^{\log_2 \frac{5}{4}} < 2^x \le 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x \in \left]\log_2 \frac{5}{4}, \log_2 5\right]$

pertanto $X = \left]\log_2 \frac{5}{4}, \log_2 5\right]$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]\log_2 \frac{5}{4}, \log_2 5\right]$, ovvero

$$f : \left]\log_2 \frac{5}{4}, \log_2 5\right] \to f(x) = \log ar\cos \log_{1/4}(2^x - 1) \in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log ar\cos \log_{1/4}(2^x - 1) > 0 = \log 1$ quindi $ar\cos \log_{1/4}(2^x - 1) > 1 = ar\cos(\cos 1) \Leftrightarrow -1 \cdot \log_{1/4}\frac{1}{4} \le \log_{1/4}(2^x - 1) < \cos 1 = \cos 1 \cdot \log_{1/4}\frac{1}{4}$

pertanto

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1} < 2^x - 1 \le 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1} + 1 = 2^{\log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1} + 1\right)} < 2^x \le 5 = 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x \in \left]\log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1} + 1\right), \log_2 5\right]$

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1} + 1\right), \log_2 5\right] \cap X = \left]\log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1} + 1\right), \log_2 5\right]$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1}+1\right)\right[\cap X = \left]\log_2 \frac{5}{4}, \log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1}+1\right)\right[$

Si osserva che $f(\log_2 5) = \log ar\cos\log_{1/4}\left(2^{\log_2 5}-1\right) = \log ar\cos\log_{1/4}(4) = \log\pi$, quindi tocca il punto $(\log_2 5, \log\pi)$ ed inoltre $f\left(\log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1}+1\right)\right)=0$ quindi passa per il punto $\left(\log_2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos 1}+1\right), 0\right)$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio.

$\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-} \log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right) = -\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-}\left(2^x-1\right) = \frac{5}{4}-\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$, quindi $\lim_{y\to\frac{1}{4}} \log_{1/4} y = 1$, ovvero $\lim_{z\to 1} arco\cos z = 0$ e $\lim_{k\to 0}\log_2 k = -\infty$ conseguentemente $\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-} \log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right) = -\infty$

Pertanto la retta $x = \log_2\frac{5}{4}$ è un asintoto verticale a sinistra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x) = \log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right) = \frac{1}{ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}}\frac{\log_{1/4} e}{2^x-1}2^x\log_e 2.,$$

quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}}\frac{\log_{1/4} e}{2^x-1}2^x\log_e 2>0$, ed osservando che il logaritmo decrescente è negativo e la funzione al denominatore è strettamente positiva, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]\log_2\frac{5}{4}, \log_2 5\right]$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = -\frac{\log_e 2}{\log_e 1/4}\frac{2^x}{\left(2^x-1\right)\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\,ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)}=,$$

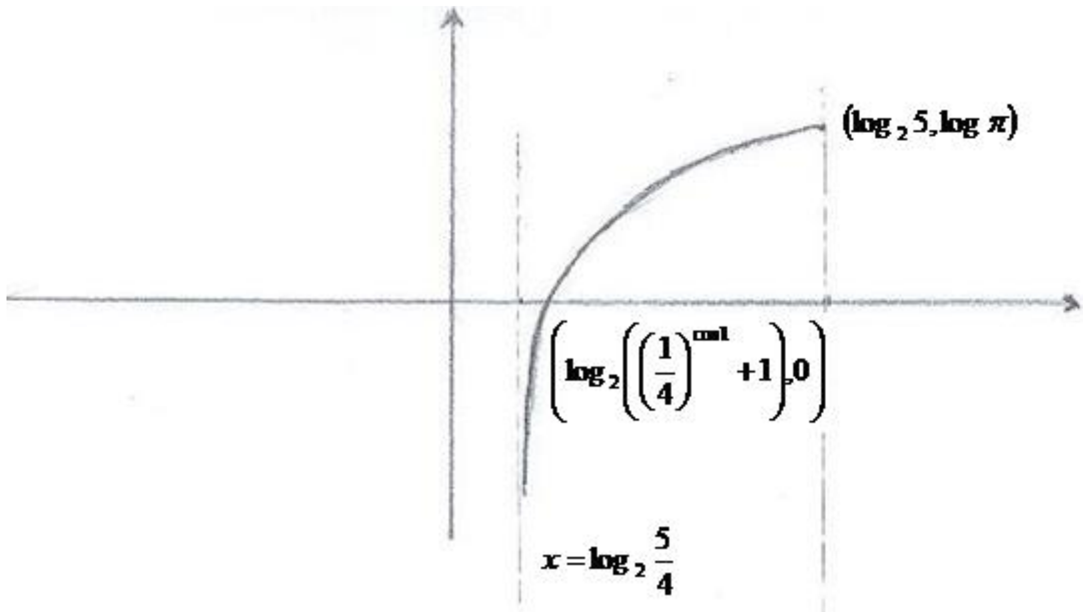
$$= -\frac{\log_e 2}{\log_e 1/4}\frac{2^x\log_e 2\left(2^x-1\right)\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\,ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right) - D\left[\left(2^x-1\right)\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\,ar\cos\mathrm{lo}\right.}{\left(2^x-1\right)\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\,ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)}$$

svolgiamo separatamente la $D\left(2^x-1\right)\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\,ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)=$

$$= 2^x\log_e 2\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\,ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)+\frac{\left(2^x-1\right)ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)}{2\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}}\frac{2\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)}{\left(2^x-1\right)}2^x\log_e 2+$$

$$+\left(2^x-1\right)\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)^2}}\frac{2\left(\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\right)}{\left(2^x-1\right)}2^x\log_e 2$$ pertanto risulta

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ conseguentemente $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]\log_2\frac{5}{4},\log_2 5\right]$ pertanto la funzione è strettamente concava nel suo insieme di definizione.



i) Data la funzione $f: X \to f(x) = arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)\in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione arcotangente definita in *R*, è sufficiente studiare la funzione logaritmica, quindi $3^x-9>0 \Leftrightarrow 3^x>3^2 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in\left]2,+\infty\right[$,

pertanto $X=\left]2,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]2,+\infty\right[$, ovvero

$$f: \left]2,+\infty\right[\to f(x) = arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0 \Leftrightarrow arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)>0=arctg(tg0)$ quindi $\log_{3/2}\left(3^x-9\right)>(tg0)=0=\log_{3/2}1 \Leftrightarrow 3^x-9>1 \Leftrightarrow 3^x>10=3^{\log_3 10} \Leftrightarrow x>\log_3 10 \Leftrightarrow x\in\left]\log_3 10,+\infty\right[$

Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]\log_3 10,+\infty\right[\cap X=\left]\log_3 10,+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\log_3 10\right[\cap X=\left]2,\log_3 10\right[$

Si osserva che $f(\log_3 10) = arctg \log_{3/2}\left(3^{\log_3 10} - 9\right) = arctg \log_{3/2} 1 = 0$, quindi passa per il punto $(\log_3 10{,}0)$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio e nell'estremo superiore.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} arctg \log_{3/2}\left(3^x - 9\right) = -\frac{\pi}{2}$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x \to 2^+}\left(3^x - 9\right) = 0$, quindi $\lim_{y \to 0} \log_{3/2} y = -\infty$ e conseguentemente $\lim_{z \to -\infty} arctgz = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} arctg \log_{3/2}\left(3^x - 9\right) = \frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to +\infty}\left(3^x - 9\right) = +\infty$ quindi $\lim_{y \to +\infty} \log_{3/2} y = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{z \to +\infty} arctgz = \frac{\pi}{2}$

Pertanto la retta $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a destra, mentre a sinistra, tende al punto $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Derivata prima e monotonia:

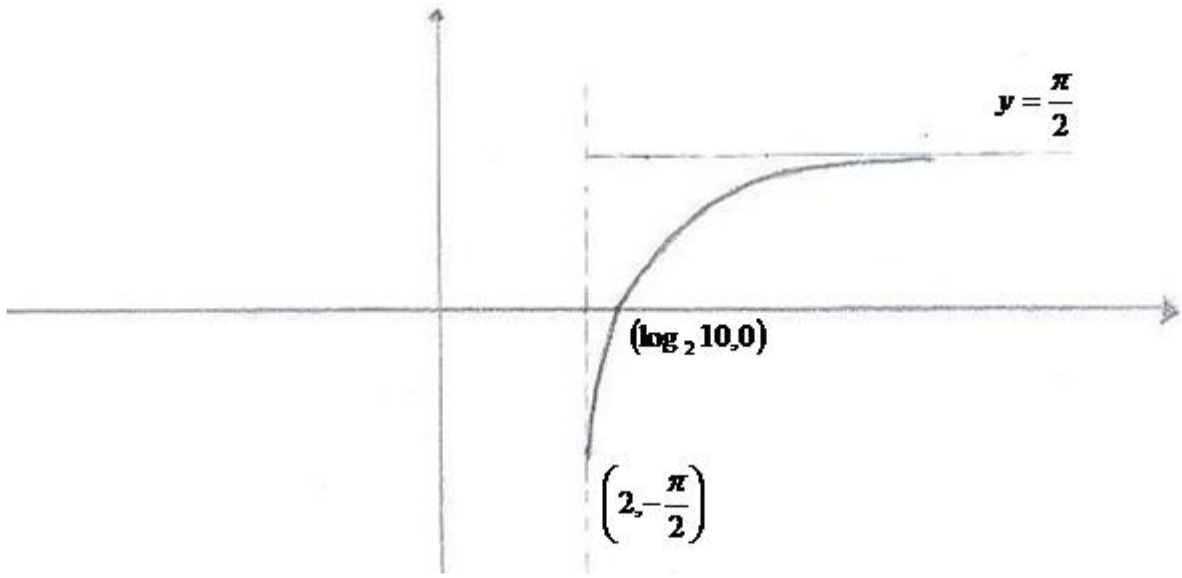
$f'(x) = \frac{1}{1 + \left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)\right]^2} \frac{\log_{3/2} e}{\left(3^x - 9\right)} 3^x \log_e 3$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\log_{3/2} e}{1 + \left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)\right]^2} \frac{3^x \log_e 3}{\left(3^x - 9\right)} > 0$, ed osservando che sia il numeratore che il denominatore sono strettamente positivi, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]2, +\infty\right[$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = \frac{\log_e 3}{\log_e 3/2} \frac{3^x \log_e 3 - 3^x \left(\left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)^2\right] \frac{3^x \log_e 3 \log_{3/2} e}{\left(3^x - 9\right)} \left(3^x - 9\right) + 3^x \log_e 3 \left(1 + \left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)\right]^2\right) \right)}{\left[\left(1 + \left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)\right]^2\right)\left(3^x - 9\right)\right]^2}$$

, $= \frac{3^x (\log_e 3)^2}{\log_e 3/2} \frac{1 - 3^x \left(\left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)^2\right] \log_{3/2} e + \left(1 + \left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)\right]^2\right)\right)}{\left[\left(1 + \left[\log_{3/2}\left(3^x - 9\right)\right]^2\right)\left(3^x - 9\right)\right]^2}$ dove si osserva che il numeratore , nel suo insieme di definizione è sempre negativo, pertanto risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ conseguentemente $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]2, +\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente concava nel suo insieme di definizione.



j) Data la funzione $f: X \to f(x) = arcsen(2x-1) \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione arcoseno, deve essere $-1 \le 2x-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2x \le 2 \Leftrightarrow x \in [0,1]$, pertanto $X = [0,1]$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in [0,1]$, ovvero

$$f: [0,1] \to f(x) = arcsen(2x-1) \in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow arcsen(2x-1) > 0 = arcsen(sen0) \Leftrightarrow 0 < 2x-1 \le 1 \Leftrightarrow 1 < 2x \le 2$.
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2},1\right] \cap X = \left]\frac{1}{2},1\right]$
Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\cap X = \left[0,\frac{1}{2}\right[$

Si osserva che $f\left(\frac{1}{2}\right) = arcsen(2x-1) = 0$, quindi passa per il punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$, inoltre $f(0) = arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$, mentre $f(1) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$, quindi la funzione tocca i punti $\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato non ha senso calcolare ulteriori limiti.

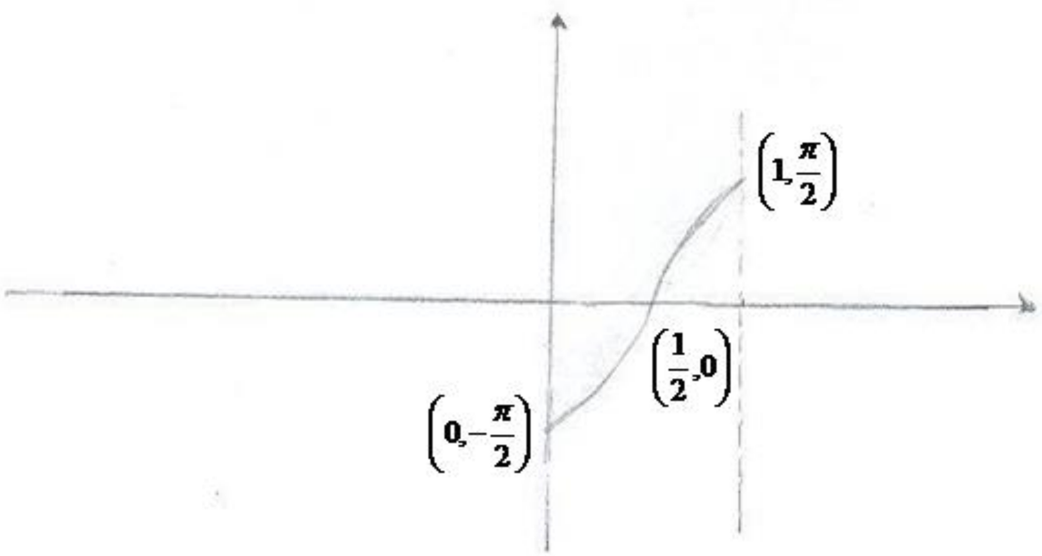
Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = arcsen(2x-1) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} > 0$, ed osservando che il denominatore è strettamente positivo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0,1]$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = -\frac{\frac{4(2x-1)2}{2\sqrt{1-(2x-1)^2}}}{\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^2} = -\frac{4(2x-1)}{\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^2 \sqrt{1-(2x-1)^2}},$$ pertanto risulta

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -4(2x-1) > 0 \Leftrightarrow 2x-1 < 0$ quindi la funzione è strettamente convessa per $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, mentre risulta strettamente concava per $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, conseguentemente il punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ risulterà un punto di flesso proprio per *f*.



k) Data la funzione $f : X \to f(x) = arcsen(2^x - 1) \in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione arcoseno, deve essere $-1 \le 2^x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2^x \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$,
pertanto $X =]-\infty, 1]$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in]-\infty, 1]$, ovvero

$$f :]-\infty, 1] \to f(x) = arcsen(2^x - 1) \in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow arcsen(2^x - 1) > 0 = arcsen(sen0) \Leftrightarrow 0 < 2^x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 2^0 = 1 < 2^x \le 2$.
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0,1] \cap X =]0,1]$
Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cap X =]-\infty, 0[$

Si osserva che $f(0) = arcsen(2^0 - 1) = 0$, quindi passa per il punto $(0,0)$, mentre $f(1) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$, quindi la funzione tocca il punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

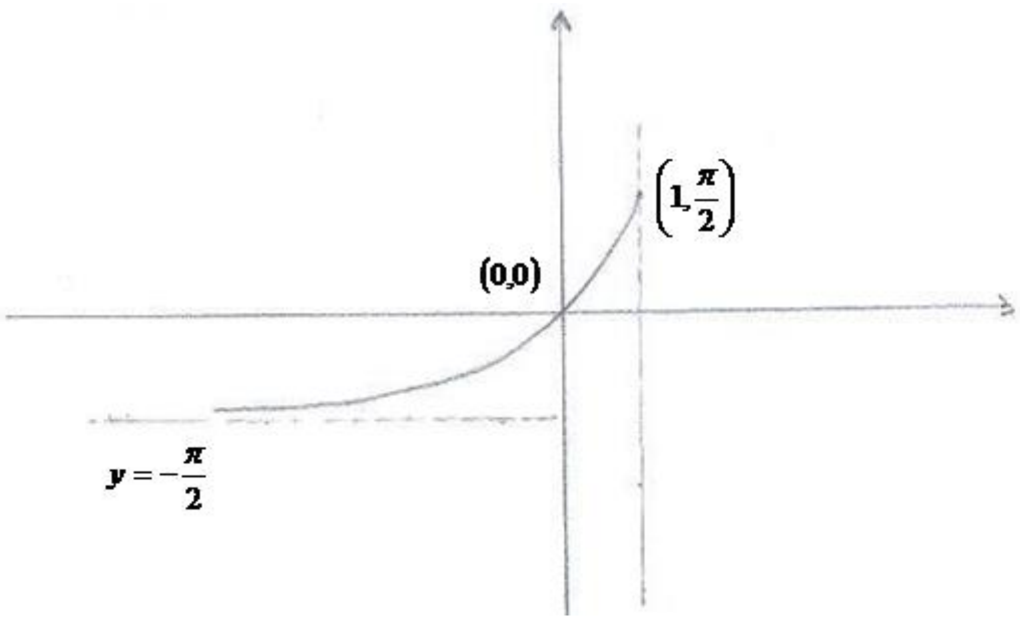
Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare solo il limite nell'estremo inferiore.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} arcsen(2^x - 1) = -\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to -\infty} (2^x - 1) = -1$ quindi $\lim_{y \to -1} arcseny = -\frac{\pi}{2}$

Pertanto la retta $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

Derivata prima e monotonia:
$f'(x) = arcsen(2^x - 1) = \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}}$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}} > 0$, ed osservando che sia numeratore che il denominatore sono strettamente positivi, e che la funzione derivata non è definita nel punto 1, e si osserva che $\lim_{x \to 1^-} \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}} = 2 \log_e 2(+\infty) = +\infty$, pertanto $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right]$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:
$f''(x) = 2^x (\log_e 2)^2 \frac{\left(1 - (2^x - 1)^2\right) + 2^x (2^x - 1)}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2} \left(\sqrt{1 - (2x - 1)^2}\right)^2} = \frac{2^x (\log_e 2)^2 2^x}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2} \left(\sqrt{1 - (2x - 1)^2}\right)^2}$, come si può osservare risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right]$ quindi la funzione è strettamente convessa nel suo insieme di definizione.



l) Data la funzione $f: X \to f(x) = ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right) \in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione arco coseno, deve essere $-1 \le 2-\log_{1/2}(2x+1) \le 1$, ovvero $-3 \le -\log_{1/2}(2x+1) \le -1 \Leftrightarrow \log_{1/2}\frac{1}{2} \le \log_{1/2}(2x+1) \le 3\log_{1/2}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le 2x+1 \le \frac{1}{2}$, quindi $\frac{1}{8}-1 \le 2x \le \frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow -\frac{7}{16} \le x \le -\frac{1}{4}$

pertanto $X = \left[-\frac{7}{16}, -\frac{1}{4}\right]$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left[-\frac{7}{16}, -\frac{1}{4}\right]$, ovvero

$$f: \left[-\frac{7}{16}, -\frac{1}{4}\right] \to f(x) = ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right) \in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right) > 0 = ar\cos(\cos 0) \Leftrightarrow -1 \le 2-\log_{1/2}(2x+1) < 1$, quindi $-3 \le -\log_{1/2}(2x+1) < -1 \Leftrightarrow 1 < \log_{1/2}(2x+1) \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le 2x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{16} \le x < -\frac{1}{4}$

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{16}, -\frac{1}{4}\right[\cap X = \left[-\frac{7}{16}, -\frac{1}{4}\right[$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \cap X = \varnothing$

Si osserva che $f\left(-\frac{7}{16}\right) = ar\cos\left(2-\log_{1/2}\left(-\frac{7}{8}+1\right)\right) = \pi$, mentre $f\left(-\frac{1}{4}\right) = ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right) = 0$, quindi tocca i punti $\left(-\frac{7}{16}, \pi\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato non ha senso calcolare ulteriori limiti.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}} \frac{-2\log_{1/2} e}{(2x+1)}$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\log_{1/2} e}{(2x+1)\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}} > 0$, ed osservando che il logaritmo al numeratore è negativo, mentre il denominatore nel suo dominio è strettamente positivo, pertanto

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$, quindi risulta $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{7}{16},-\frac{1}{4}\right[$ ed osservando che $f'_d\left(-\frac{7}{16}\right)=\lim_{x\to-\frac{7}{16}^+} f'(x)=-\infty=f'_s\left(-\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to-\frac{1}{4}^-} f'(x)=-\infty$, pertanto la funzione è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione.

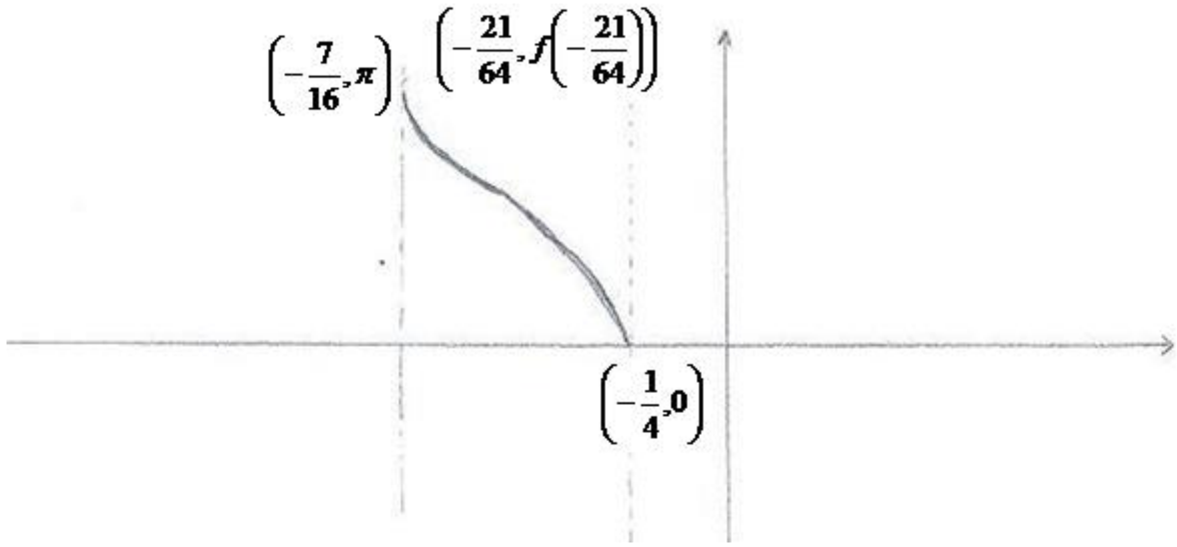
Derivata seconda e concavità:

$$f''(x)=-2\log_{1/2}e\,\frac{2\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}+(2x+1)\frac{-2\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)}{2\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}}\left(-\frac{2\log_{1/2}e}{2x+1}\right)}{\left[(2x+1)\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}\right]^2}=$$

$$=-4\log_{1/2}e\,\frac{\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}+\frac{\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)\left(2\log_{1/2}e\right)}{\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}}}{\left[(2x+1)\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}\right]^2}=$$

$$=-4\log_{1/2}e\,\frac{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2+\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)\left(2\log_{1/2}e\right)}{\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}\left[(2x+1)\sqrt{1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2}\right]^2}=$$

come si può osservare il primo fattore è positivo, come pure il denominatore, quindi è sufficiente studiare il numeratore $f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2+\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)\left(2\log_{1/2}e\right)>0$ se si pone $1-\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)^2+\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)\left(2\log_{1/2}e\right)=g(x)$ e si osserva che, in $g\left(-\frac{7}{16}\right)=-\log_{\frac{1}{2}}e>0$, e che $g\left(-\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}e<0$, esisterà un punto intorno a $g\left(-\frac{21}{64}\right)=0$, pertanto $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{7}{16},-\frac{21}{64}\right[$ e conseguentemente $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{21}{64},-\frac{1}{4}\right]$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\left[-\frac{7}{16},-\frac{21}{64}\right[$, e strettamente concava in $\left]-\frac{21}{64},-\frac{1}{4}\right]$, con un punto di flesso proprio in $\left(-\frac{21}{64},f\left(-\frac{21}{64}\right)\right)$. Siamo ora in grado di tracciare approssimativamente il grafico della funzione.



m) Data la funzione $f:X\to f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}}\in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione radice quadrata, deve essere $\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}\geq 0$, pertanto il numeratore $x^4-16\geq 0\Leftrightarrow {x^2}^2-4^2\geq 0\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4)\geq 0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)\geq 0\Leftrightarrow x\leq -2\cup x\geq 2$, quindi $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.

Mentre il denominatore risulta $3+2x-x^2>0\Leftrightarrow x^2-2x-3<0$, osservando che $\Delta=16$, si ha $x_{1,2}=\dfrac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$, pertanto il denominatore è positivo $x\in\left]-1,3\right[$, per cui

$\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[\right)\cap\left]-1,3\right[=\left[-2,-1\right[\cup\left[2,3\right[$

pertanto $X=\left[-2,-1\right[\cup\left[2,3\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left[-2,-1\right[\cup\left[2,3\right[$, ovvero

$$f:\left[-2,-1\right[\cup\left[2,3\right[\to f(x)=\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}}>0\Leftrightarrow\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}>0$, quindi $x\in\left]-2,-1\right[\cup\left]2,3\right[$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]-2,-1\right[\cup\left]2,3\right[\cap X=\left]-2,-1\right[\cup\left]2,3\right[$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\varnothing\cap X=\varnothing$

Si osserva che $f(-2)=f(2)=0$, quindi passa per i punti $(-2,0)$ e $(2,0)$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio.

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}=\lim_{x\to -1^-}\left(x^4-16\right)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{3+2x-x^2}=-15(-\infty)=+\infty$, quindi $\lim_{y\to +\infty}\sqrt{y}=+\infty$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}=\lim_{x\to 3^-}\left(x^4-16\right)=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3+2x-x^2}=65(+\infty)=+\infty$, quindi $\lim_{y\to +\infty}\sqrt{y}=+\infty$

Pertanto le rette $x=-1$ e $x=3$ sono due asintoti verticali a sinistra.

Derivata prima e monotonia:

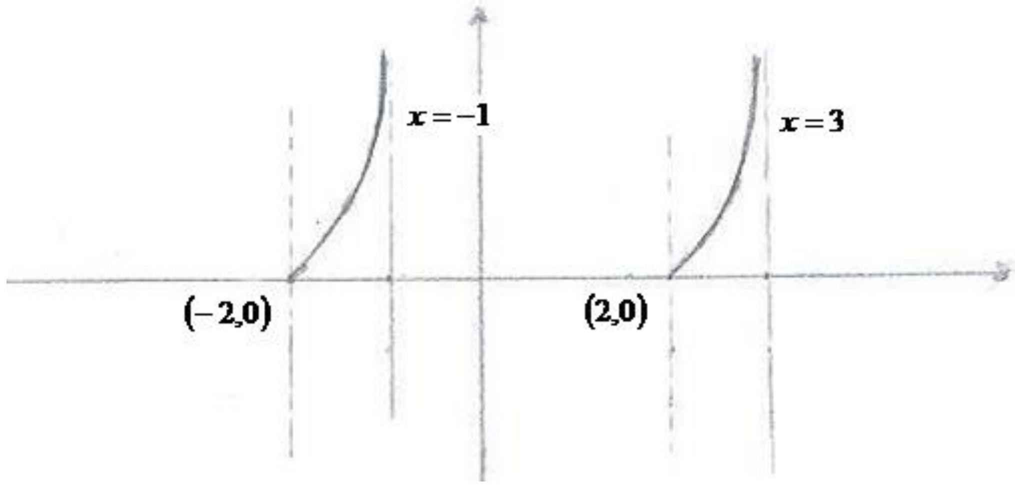
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}}\frac{4x^3\left(3+2x-x^2\right)-\left(x^4-16\right)(2-2x)}{\left(3+2x-x^2\right)^2}$., si osserva che $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in[-2,-1[\cup[2,3[-\{-2,2\}$ pertanto è necessario calcolare il $\lim_{x\to -2^+} f'(x)$ ed il $\lim_{x\to 2^+} f'(x)$, per cui è sufficiente calcolare il $\lim_{x\to -2^+} f'(x)\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}}$, in quanto $\lim_{x\to -2^+} f'(x)\frac{4x^3\left(3+2x-x^2\right)-\left(x^4-16\right)(2-2x)}{\left(3+2x-x^2\right)^2}>0$ e si osserva che $\lim_{x\to -2^+} f'(x)\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}}=+\infty$, cosi come il $\lim_{x\to 2^+} f'(x)\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}}=+\infty$ pertanto la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x)=\frac{\left[12x^2\left(3+2x-x^2\right)+4x^3(2-2x)-4x^3(2-2x)-2\left(x^4-16\right)\right]\left(3+2x-x^2\right)^2 2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}}{\left[\left(3+2x-x^2\right)^2 2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}\right]^2}-$$

$$-\left[4x^3\left(3+2x-x^2\right)-\left(x^4-16\right)(2-2x)\right]2\left(3+2x-x^2\right)(2-2x)\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}-2\left(3+2x-x^2\right)^2\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4-16}{3+2x-x^2}}}$$

$\frac{4x^3\left(3+2x-x^2\right)-\left(4x^4-16\right)(2-2x)}{\left(3+2x-x^2\right)^2}$, da cui si constata che $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in[-2,-1[\cup[2,3[-\{-2,2\}$ e procedendo in analogo allo studio della derivata prima, si constata che la funzione è strettamente convessa nel suo insieme di definizione.



n) Data la funzione $f : X \to f(x) = \log_{1/2}(2senx - 1) \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione logaritmica, deve essere $2senx - 1 > 0 \Leftrightarrow senx > \frac{1}{2} \Leftrightarrow senx > \frac{1}{2} = sen\left(arcsen\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{6}$, ricordando che la funzione seno è periodica, e che risulta $\frac{\pi}{2}$-simmetrica, pertanto $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ e ricordando che $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ per cui $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ quindi $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$ conseguentemente $sen\frac{\pi}{6} = sen\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$ e tenendo conto che la funzione seno è strettamente crescente in $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ per cui $senx > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{6}$, mentre la funzione seno è strettamente decrescente in $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right[$ per cui $senx > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{5}{6}\pi$, quindi $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$.
pertanto $X = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$, ovvero

$$f : \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[\to f(x) = \log_{1/2}(2senx - 1) \in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{1/2} 2senx - 1 > 0 = \log_{1/2} 1 \Leftrightarrow 2senx - 1 < 1 \Leftrightarrow senx < 1 \Leftrightarrow x \in X - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, quindi $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Inoltre $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \cap X = \varnothing$

Si osserva che $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, quindi passa per il punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio.

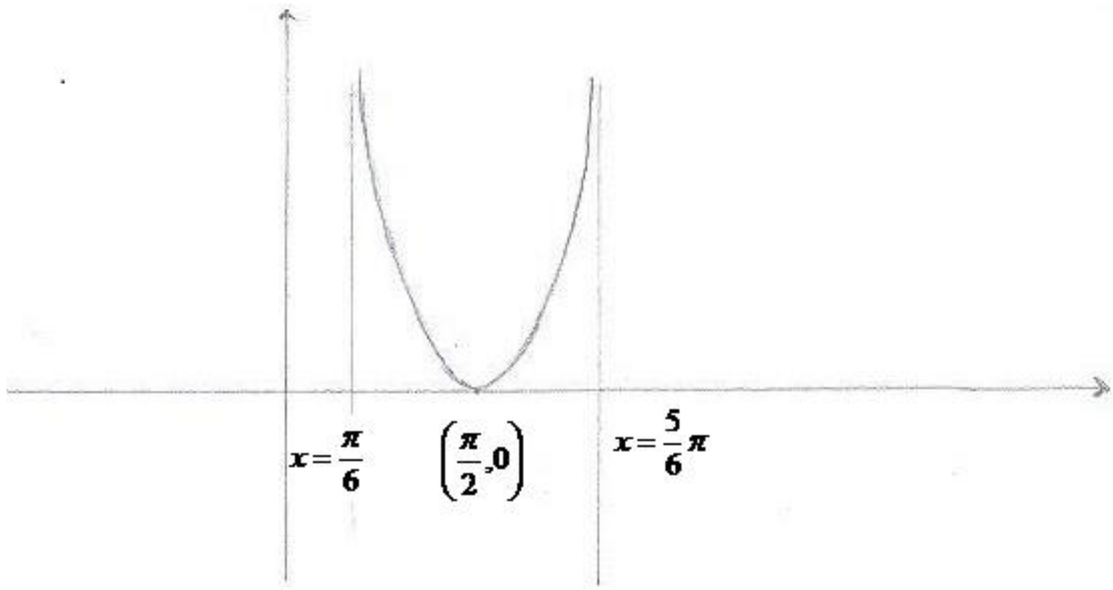
$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} \log_{1/2}(2senx - 1) = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} (2senx - 1) = 0$, quindi $\lim_{y \to 0} \log_{1/2} y = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{5}{6}\pi^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{5}{6}\pi^-} \log_{1/2}(2senx - 1) = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x \to \frac{5}{6}\pi^-} (2senx - 1) = 0$, quindi $\lim_{y \to 0} \log_{1/2} y = +\infty$

Pertanto le rette $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$ sono rispettivamente due asintoti verticali a destra ed a sinistra.

Derivata prima e monotonia:
$f'(x) = \log_{1/2}(2senx - 1) = \log_{1/2} e \frac{2\cos x}{(2senx - 1)}$., pertanto $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\log_{1/2} e \frac{\cos x}{(2senx - 1)} > 0$ ovvero considerando che il denominatore è sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente verificare $2\log_{1/2} e \cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right[$ conseguentemente $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ pertanto la funzione risulta strettamente decrescente in $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ e strettamente crescente in $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right[$.

Derivata seconda e concavità:
$f''(x) = 2\log_{1/2} e \frac{-senx(2senx - 1) - 2\cos^2 x}{(2senx - 1)^2}$, pertanto si osserva che $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -2\log_{1/2} e \frac{senx(2senx - 1) + 2\cos^2 x}{(2senx - 1)^2} > 0$ quindi considerando che il logaritmo è negativo e la funzione sempre positiva, si constata che la funzione è strettamente convessa nel suo insieme di definizione.



o) Data la funzione $f : X \to f(x) = \frac{x \cdot |x|}{1+x} \in R$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione razionale fratta, è definita in tutto R, tranne per il denominatore diverso da zero.
Quindi tale funzione è definita $\forall x \in R - \{-1\}$,

$$f :]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[\to f(x) = \frac{x \cdot |x|}{1+x} \in R$$

Ovvero

$$f : x \in]-\infty,-1[\cup]-1+\infty[\to \frac{x \cdot |x|}{1+x} = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x} & \text{se} \quad x \in [0,+\infty[\\ \frac{-x^2}{1+x} & \text{se} \quad x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\end{cases}$$

Segno della funzione:
$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x \in]0,+\infty[\text{ e } 1+x>0) \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$, oppure
$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\text{ e } 1+x<0) \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[- (]-\infty,-1[\cup [0,+\infty[) =]-1,0[$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]-\infty,-1[$ ed in $]0,+\infty[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $]-1,0[$.

Si osserva che ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0,0)$.

Limiti significativi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{1+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x(1/x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{1/x+1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1/x+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{1+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1/x+1}=1,$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^2}{1+x}=-\lim_{x\to-1^-}x^2\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{1+x}=-(-\infty)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x^2}{1+x}=-\lim_{x\to-1^-}x^2\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{1+x}=-(+\infty)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(1/x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1/x+1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1/x+1}=1$$

e $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1/x+1}=-1$

Pertanto il grafico di *f* ha tre asintoti: la retta di equazione $y=-x+1$ asintoto obliquo a sinistra, la retta di equazione $x=-1$ asintoto verticale a sinistra e a destra e la retta di equazione $y=x-1$ asintoto obliquo a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x)=\begin{cases} D\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\\ D\dfrac{-x^2}{1+x}=\dfrac{-2x(1+x)+x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{-2x-x^2}{(1+x)^2} & \text{se } x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\end{cases}$$

E ricordando che il valore assoluto non è derivabile in zero, si osserva che

$$f_s'(0)=\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{-2x-x^2}{(1+x)^2}\right)=0,\quad f_d'(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}\right)=0$$

quindi *f* è derivabile in $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$ essendo $f'(0)=0$ è:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\left(x\in\left]0,+\infty\right[\text{ e } 2x+x^2>0\right)\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[,\text{ oppure}$$
$$f'(x)>0\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\text{ e } -2x-x^2>0\right)\Leftrightarrow x\in\left]-2,-1\right[\cup\left]-1,0\right[$$
$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+x^2=0\Leftrightarrow x=-2\text{ o } x=0$$
$$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[-\left(\left[-2,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,-2\right[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left[-2,-1\right[$ e in $\left]-1,+\infty\right[$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-2\right]$, -2 è un punto di minimo relativo proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per il punto $(-2,f(-2))=(-2,4)$.

Derivata seconda e concavità:

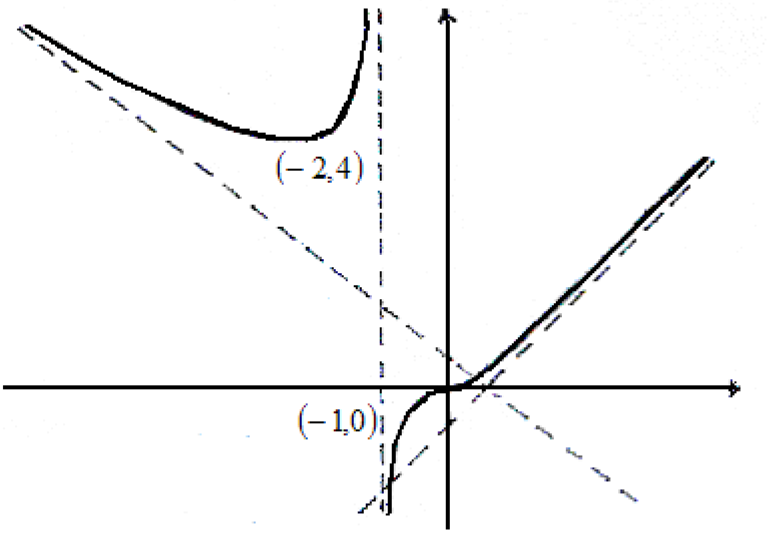
$$f''(x)=\begin{cases} D\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{2}{(1+x)^3} & \text{se}\quad x\in\left]0,+\infty\right[\\ D\dfrac{-2x-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{-(2+2x)(1+x)^2+(2x+x^2)2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{-2}{(1+x)^3} & \text{se}\quad x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\end{cases}$$

è:

$$f''(x)>0\Leftrightarrow(x\in\left]0,+\infty\right[\text{ e }1+x>0)\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[,\text{ oppure}$$
$$f''(x)>0\Leftrightarrow(x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\text{ e }1+x<0)\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[$$
$$f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$$
$$f''(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-(\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[)=\left]-1,0\right[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]0,+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]-1,0\right[$ e zero è un punto di flesso proprio per *f*.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[)=R$, $f(\left]-\infty,-2\right])=f(\left[-2,-1\right[)=\left[4,+\infty\right[$, $f(\left]-1,+\infty\right[)=R$, f non è biunivoca, le restrizioni di *f* a $\left]-\infty,-2\right]$ ed a $\left[-2,-1\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left[4,+\infty\right[$ e la restrizione di *f* a $\left]-1,+\infty\right[$ è biunivoca su *R*.

p) Data la funzione $f:X\to f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x\in R$

Insieme di definizione:
Essendo $x^2+x+1>0$ per ogni elemento *x* di *R*, l'insieme di definizione di *f* è *R* e quindi è:
Quindi tale funzione è definita $\forall x\in R$,

$$f:R\to f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x\in R$$

Ovvero

Segno della funzione:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}>-x \Leftrightarrow x\in[0,+\infty[\quad \text{, oppure}$$

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}>-x \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } x^2+x+1>x^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x<0 \text{ e } x>-1) \Leftrightarrow x\in]-1,0[$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}+x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}=-x \Leftrightarrow x<0 \text{ e } x^2+x+1=x^2 \Leftrightarrow x=-1$$

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in -[-1,+\infty[=]-\infty,-1[$$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]-1,+\infty[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $]-\infty,-1[$.

Si osserva che ha in comune con gli assi i punti $(-1, f(-1))=(-1,0)$ e $(0, f(0))=(0,1)$.

Limiti significativi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2$$

e $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y=-1/2$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y=2x+1/2$ asintoto obliquo a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1$$

Pertanto $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}>0$

Esseno il denominatore sempre positivo, è sufficiente vedere quando il numeratore è positivo, ovvero

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x+1} > -2x-1$

Ora se si osserva che $-2x-1 > 0 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$;

conseguentemente $-2x-1 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

pertanto

se $x > -\frac{1}{2}$, si ha che $-2x-1 < 0$ ed essendo la radice sempre positiva, la disuguaglianza $2\sqrt{x^2+x+1} > -2x-1$ sarà sempre vera, pertanto la funzione strettamente crescente;

se $x < -\frac{1}{2}$, essendo $-2x-1 > 0$, occorre risolvere la disuguaglianza $2\sqrt{x^2+x+1} > -2x-1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 > (-2x-1)^2 \Leftrightarrow 4\left(x^2+x+1\right) > 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 4 > 1$ pertanto sempre vera

quindi la funzione è strettamente crescente anche per $x < -\frac{1}{2}$, per cui in tutto il suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

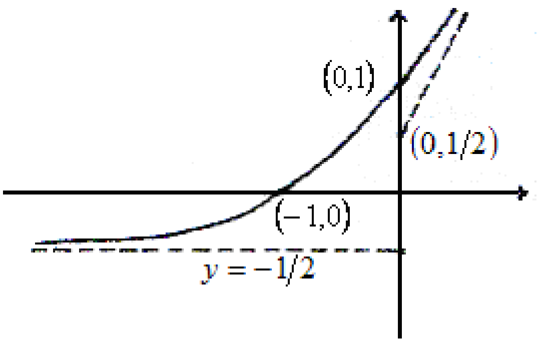
$$f''(x) = D\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{3}{4\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}} \quad \text{se} \quad x \in R$$

è:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

e pertanto *f* è strettamente convessa.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R) =]-1/2, +\infty[$, *f* è biunivoca su $]-1/2, +\infty[$, $\inf f(R) = -1/2$ e $\sup f(R) = +\infty$.