Esercitazione n. 09 (svolgimento)

1) Per le funzioni assegnate, risultano le seguenti convessità:

a) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$, il dominio risulta $\forall x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$; ed essendo

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}-(x-1)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{(x^2-4)}=\frac{x^2-4-x^2+x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}=\frac{x-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$, si ha:

$$f''(x)=\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}-(x-4)\left[2x\sqrt{x^2-4}+\dfrac{(x^2-4)2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right]}{\left((x^2-4)\sqrt{x^2-4}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x)=\frac{(x^2-4)(x^2-4)-(x-4)\left(2x(x^2-4)+(x^2-4)x\right)}{\left((x^2-4)\sqrt{x^2-4}\right)^2\sqrt{x^2-4}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x)=(x^2-4)\frac{(x^2-4)-(x-4)(3x)}{(x^2-4)^3\sqrt{x^2-4}}=\frac{-2x^2+12x-4}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-4}},$$ pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $-2x^2+12x-4>0\Leftrightarrow 2x^2-12x+4<0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}\right[$ pertanto la funzione è *strettamente convessa* in $\forall x\in\left]3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}\right[\cap\left(\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\right)\Leftrightarrow\forall x\in\left]2,3+\sqrt{7}\right[$ ed è *strettamente concava* in $\forall x\in\left(\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\right)\cap-\left]3-\sqrt{7},3+\sqrt{7}\right[\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]3+\sqrt{7},+\infty\right[$, con *punto di flesso proprio* in $3+\sqrt{7}$.

b) Data la funzione $f(x)=\log_{1/2}\log_2 x\in R$, il dominio risulta $\forall x\in\left]1,+\infty\right[\cap\left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow\forall x\in\left]1,+\infty\right[$; ed essendo

$$f'(x)=\log_{1/2}\log_2 x=\frac{\log_{1/2}e}{\log_2 x}\frac{\log_2 e}{x}=\log_2 e\log_{1/2}e\frac{1}{x\log_2 x}$$, si ha:

$$f''(x)=\frac{-\log_2 e\log_{1/2} e\left[\log_2 x+\frac{x}{x}\log_2 e\right]}{(x\log_2 x)^2}=\frac{-\log_2 e\log_{1/2} e(\log_2 x+\log_2 e)}{(x\log_2 x)^2}$$; ed essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $-\log_2 e\log_{1/2} e(\log_2 x-\log_2 e)>0$, per cui si osserva che $\log_{1/2} e<0$ e che $\log_2 e>0$ pertanto $-\log_{1/2} e\log_2 e>0$, per cui essendo $\log_2 x+\log_2 e>0 \Leftrightarrow \log_2 x>-\log_2 e \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$, ovvero risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow \forall x\in \left]\frac{1}{e},+\infty\right[\cap]1,+\infty[\Leftrightarrow \forall x\in\cap]1,+\infty[$ pertanto la funzione *è strettamente convessa* nel suo dominio.

c) Data la funzione $f(x)=2^{x^2-1}-3\in R$, il dominio risulta $\forall x\in R$; ed essendo $f'(x)=\frac{2^{x^2-1}}{\log_2 e}2x$, si ha: $f''(x)=\frac{2^{x^2-1}}{\log_2 e}\left(2+4x^2\log_e 2\right)$, che come si può osservare risulta $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in R$ e conseguentemente $f''(x)<0\Leftrightarrow x\in\varnothing$ pertanto la funzione *è strettamente convessa* nel suo dominio.

d) Data la funzione $f(x)=arcsen(2x-1)\in R$, il dominio risulta $\forall x\in[0,1]$; ed essendo $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$, si ha:

$$f''(x)=-\frac{\frac{4(2x-1)2}{2\sqrt{1-(2x-1)^2}}}{\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^2}=-\frac{4(2x-1)}{\left(\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)^2\sqrt{1-(2x-1)^2}},$$ pertanto risulta $f''(x)>0\Leftrightarrow -4(2x-1)>0\Leftrightarrow 2x-1<0$ quindi la funzione *è strettamente convessa* per $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[$, mentre risulta *strettamente concava* per $x\in\left]\frac{1}{2},1\right]$, conseguentemente il punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ risulterà un *punto di flesso proprio* per *f.*

e) Data la funzione $f(x)=\log_{1/2}(2senx-1)\in R$, il dominio risulta $\forall x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right[$, di periodo 2π; ed essendo $f'(x)=\log_{1/2}(2senx-1)=2\log_{1/2} e\frac{\cos x}{(2senx-1)}$, si ha: $f''(x)=2\log_{1/2} e\frac{-senx(2senx-1)-2\cos^2 x}{(2senx-1)^2}=2\log_{1/2} e\frac{-2+senx}{(2senx-1)^2}$, pertanto si osserva che

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\log_{1/2} e \dfrac{-2+senx}{(2senx-1)^2} > 0$ e considerando che $2\log_{1/2} e < 0$ e che $-2+senx > 0 \Leftrightarrow senx > 2 \Leftrightarrow \forall x \in \emptyset$; si ha $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R \cap \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$ pertanto sempre positiva, *nel suo dominio*, quindi la funzione *è strettamente convessa*.

2) In merito alle ipotesi dei teoremi di Weierstrass e/o di Bolzano per le funzioni assegnate, risulta:

a) La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \forall x \le 1 \\ \log_2 2^{\frac{e}{x}} & \forall x > 1 \end{cases}$, è definita in $R - \{0\}$; composta da funzioni elementari, ed osservando che $f(1) = e^{\frac{1}{1}} = e$, il $\lim_{x \to 1^-} f(x) = e$ ed il $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log_2 2^{\frac{e}{x}} = e$; pertanto la funzione è continua anche nel punto 1, e quindi continua nell'insieme di definizione $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, ma non essendo questo un intervallo, ne tantomeno una parte chiusa e limitata, la funzione *non soddisfa le ipotesi dei due Teoremi*.

b) La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\log(x-1)} & \forall x > 1 \\ \arccos x & \forall x \le 1 \end{cases}$, è definita $\forall x \in [-1, +\infty[$; composta da funzioni elementari, ed osservando che $f(1) = \arccos 1 = 0$, il $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \arccos x = 0$ ed il $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{\log(x-1)} = 0$, quindi continua nel suo dominio, pertanto la funzione *soddisfa le ipotesi del Teorema Bolzano*, ma *non quelle del teorema di Weierstrass*, in quanto il dominio è chiuso, ma non limitato.

c) La funzione $f(x) = sen2x - e^x arctg^2 x$, definita $\forall x \in \{1,2,3\} \cup [0,1[\Leftrightarrow \forall x \in \{2,3\} \cup [0,1]$; risulta continua nel suo insieme di definizione, in quanto somma e prodotto di funzioni continue, ed osservando che il suo dominio risulta $\{2,3\} \cup [0,1] \subseteq R$ chiusa e limitata, la funzione *soddisfa le ipotesi del Teorema Weierstrass*, ma *non quelle del teorema di Bolzano*, in quanto il dominio *non è un intervallo*.

d) La funzione $f(x) = arctg \dfrac{1}{x}$, definita $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \cup \{2,3,5\}$ risulta continua nel suo insieme di definizione, che risulta essere $([-1, 0[\cup]0, 1] \cup \{2,3,5\}) \subseteq R$, quindi né un intervallo, né una parte di R chiusa e limitata, pertanto la funzione *non soddisfa le ipotesi dei due teoremi*.

e) La funzione $f(x)=\begin{cases} -h\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x>-1 \\ \pi & \text{se } x=-1 \\ arc\cot g\,\dfrac{1}{x+1} & \text{se } x<-1 \end{cases}$, definita in R, ed osservando che

$f(-1)=\pi$, il $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} arc\cot g\,\dfrac{1}{x+1}=\pi$ ed il $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-h\dfrac{\pi}{2}$, risulta continua anche nel punto -1 se $-h\dfrac{\pi}{2}=\pi \Leftrightarrow h=-2$, in tal caso la funzione risulterebbe continua nel suo insieme di definizione *R*, pertanto la funzione *soddisfa le ipotesi del Teorema Bolzano*, ma *non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass*.

3) In merito alle ipotesi del teorema di Rolle, per le funzioni assegnate, risulta:

a) Essendo la funzione $f(x)=kx^2-2x+\dfrac{1}{2}$, definita $\forall x\in[0,1]$, quindi continua e derivabile nel suo dominio, ed osservando che il $f(0)=\dfrac{1}{2}$ ed $f(1)=k-\dfrac{3}{2}$, affinché soddisfi tutte le ipotesi del Teorema di Rolle deve risultare $f(0)=f(1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=k-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow k=2$; pertanto per il parametro $k=2$ la funzione *soddisfa le ipotesi* del Teorema di Rolle.

b) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} 1+h & x=0 \\ e^x\,\dfrac{arcsen\log(x+1)}{x}-hx & \forall x\in\,]0,1] \end{cases}$, ed osservando che $f(0)=1+h$, il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1+h$ ed il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x\,\dfrac{arcsen\log(x+1)}{x}-hx$, ovvero $\lim_{x\to 0^+} e^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\dfrac{arcsen\log(x+1)}{\log(x+1)}\,\dfrac{\log(x+1)}{x}-hx=1$, quindi risulta continua in $[0,1]$ nel caso $1+h=1\Leftrightarrow h=0$, ed essendo derivabile $]0,1[$, ed osservando che $f(0)=1+h$ ed $f(1)=e\cdot arcsen\log 2-h$ per soddisfare le ipotesi del Teorema di Rolle deve risultare $f(0)=f(1)\Leftrightarrow 1+h=e\cdot arcsen\log 2-h\Leftrightarrow h=\dfrac{e\cdot arcsen\log 2-1}{2}\neq 0$, quindi la funzione *non soddisfa le ipotesi* del teorema di Rolle.

c) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} h & \forall x=\{-1,1\} \\ (1-x^2)arcsenx & \forall x\in\,]-1,1[\end{cases}$ ed osservando che $f(-1)=f(1)=h$ e che il $\lim_{x\to -1^+}(1-x^2)arcsenx=0$ ed il $\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)arcsenx=0$, la funzione risulterebbe continua se $h=0$; ed essendo derivabile in $]-1,1[$, in quanto $f'(x)=-2xarcsenx+\frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$, la funzione *soddisfa le ipotesi* del Teorema di Rolle.

d) Data la funzione $f(x)=\begin{cases}2x+h & \forall x=[-2,1[\\ 2^x-h & \forall x\in[1,2]\end{cases}$, ed osservando che $f(1)=2-h$, e che il $\lim_{x\to 1^-}f(x)=2+h$ ed il $\lim_{x\to 1^+}f(x)=2-h$, la funzione risulta continua se $2+h=2-h \Leftrightarrow h=0$; ed inoltre essendo derivabile in $[-2,2]$, per soddisfare tutte le ipotesi deve essere $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow h-4=4-h\Leftrightarrow h=4$, ma in tal caso non sarebbe continua, pertanto *non soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle*.

e) Essendo la funzione $f(x)=k2x^2-2kx-\frac{1}{3}$ definita $\forall x\in[-1,1]$, quindi continua e derivabile nel suo dominio, ed osservando che il $f(-1)=f(1)\Leftrightarrow 4k-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=0$, pertanto per il parametro $k=0$ la *funzione soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle*.

4) Le funzioni assegnate, soddisfano le seguenti ipotesi del teorema del Punto Fisso:

a) Essendo la funzione $f(x)=hx^2-2h$, definita $\forall x\in[0,1]$, quindi continua nel suo dominio, ed osservando che il $f(0)=-2h$ ed $f(1)=-h$; per soddisfare tutte le ipotesi del Teorema del Punto Fisso, deve anche risultare $f(0)\in[0,1]\Leftrightarrow -2h\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le -2h\le 1\Leftrightarrow h\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, ed anche $f(1)\in[0,1]\Leftrightarrow -h\in[0,1]\Leftrightarrow h\in[-1,0]$, quindi $h\in\left(\left[-\frac{1}{2},0\right]\cap[-1,0]\right)\Leftrightarrow h\in\{0\}$. Pertanto solo nel caso del parametro $h=0$ la funzione *soddisfare le ipotesi del Teorema del Punto Fisso*.

b) Essendo la funzione $f(x)=\begin{cases}h & \forall x=\{-1,1\}\\ (1-x^2)sen(1-x^2) & \forall x\in]-1,1[\end{cases}$, ed osservando che $f(-1)=f(1)=h$ e che il $\lim_{x\to -1^+}(1-x^2)sen(1-x^2)=0$ ed il $\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)sen(1-x^2)=0$, la funzione risulterebbe continua nel suo dominio per $h=0$; ed in tal caso $f(-1)=f(1)=0\in[-1,1]$, quindi per il parametro $h=0$, la funzione *soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto Fisso*.

c) Essendo la funzione $f(x)=\sqrt{x^2-x-1}$, definita $\forall x \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right]$, quindi continua nel suo dominio, ed osservando che il $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$ ed $f(2)=1$; per cui $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0 \notin \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right]$, ed anche $f(2)=1 \notin \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right]$, pertanto la *funzione non soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto Fisso*.

d) Essendo la funzione $f(x)=\left|x^2-h\right|$, definita $\forall x \in [-1,2]$, quindi continua nel suo dominio, ed osservando che il $f(-1)=|1-h|$ ed $f(2)=|4-h|$; per soddisfare le ipotesi del Teorema del Punto Fisso, deve risultare $f(-1)\in[-1,2] \Leftrightarrow -1 \le |1-h| \le 2 \Leftrightarrow |1-h| \le 2 \Leftrightarrow h \in [-1,3]$, ed anche $f(2)\in[-1,2] \Leftrightarrow -1 \le |4-h| \le 2 \Leftrightarrow |4-h| \le 2 \Leftrightarrow h \in [2,6]$, ovvero $h \in ([-1,3]\cap[2,6]) \Leftrightarrow h \in [2,3]$, in tale ipotesi la funzione *soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto Fisso*.

e) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \forall x \in [-1,0[\\ 3x-1 & \forall x \in [01] \end{cases}$, si osserva che $f(0)=-1$ e che il $\lim_{x\to 0^-} x^2+1=1$ ed il $\lim_{x\to 0^+} 3x-1=-1$, la funzione non risulta continua in 0, quindi *non soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto Fisso*.

5) Per quanto riguarda il codominio limitato e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo relativi ed assoluti delle funzioni assegnate, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=sen(x^2)$, definita $\forall x \in \left[0,\sqrt{\frac{5}{2}\pi}\right]$, quindi continua nel suo dominio, parte chiusa e limitata, pertanto per il teorema di Weierstrass, è dotata di minimo e di massimo assoluti, quindi la *funzione è limitata*. Servendosi del teorema dei Punti Critici, si nota che $f'(x)=2x\cos x^2$, per cui la funzione è derivabile nel suo dominio, quindi non ci sono punti in cui la derivata non esiste; osserviamo ora che $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\cos x^2=0$, quindi $x=0$ e $\cos x^2=0=\cos\arccos 0 \Leftrightarrow x^2=\arccos 0 \Leftrightarrow x^2=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e notando che $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \notin \left[0,\sqrt{\frac{5}{2}\pi}\right]$ restano i punti in cui $\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi} \in \left[0,\sqrt{\frac{5}{2}\pi}\right], \forall k \in Z$, ovvero la funzione derivata prima si annulla nei punti $S=\left\{0,\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{3\frac{\pi}{2}},\sqrt{5\frac{\pi}{2}}\right\}$, che come possiamo osservare comprendono anche i punti di frontiera; e risultando $f(0)=0$, $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=1$, $f\left(\sqrt{3\frac{\pi}{2}}\right)=-1$ ed $f\left(\sqrt{5\frac{\pi}{2}}\right)=1$; la funzione ha *massimo assoluto* pari a 1 e *due punti di massimo assoluto*; inoltre ha *minimo assoluto* pari a -1 ed *un punto di minimo assoluto* ed un *minimo relativo* pari a 0.

b) Data la funzione $f(x)=\left|x^2-x\right|$, definita $\forall x\in[-1,2]$, quindi continua nel suo dominio, parte chiusa e limitata, pertanto per il teorema di Weierstrass, è dotata di minimo e di massimo assoluti, quindi la *funzione è limitata*. Servendosi del teorema dei Punti Critici, essendo $f'(x)=\frac{\left|x^2-x\right|}{x^2-x}(2x-1)$ si nota che la funzione data non è derivabile in $x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$ ovvero $C=\{0,1\}$; mentre per i punti in cui la derivata si annulla, si ha $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, quindi $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ed infine i punti di frontiera $F=\{-1,2\}$; pertanto possiamo calcolare la funzione in tali punti ed osservare che $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$, $f(1)=0$ ed $f(2)=2$; quindi la funzione ha *massimo assoluto* pari a 2 e due punti di massimo assoluto, *minimo assoluto* pari a 0 e due punti di minimo assoluto ed un *massimo relativo* pari a $\frac{1}{4}$, ed un punto di *massimo relativo*.

c) Data la funzione $f(x)=e^{-x^2}\sqrt{x}$, definita $\forall x\in[0,2]$, quindi continua nel suo dominio, parte chiusa e limitata, pertanto per il teorema di Weierstrass, è dotata di minimo e di massimo assoluti, quindi la *funzione è limitata*. Servendosi del teorema dei Punti Critici, essendo $f'(x)=-2xe^{-x^2}\sqrt{x}+e^{-x^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{-x^2}\left(1-4x^2\right)}{2\sqrt{x}}$, per cui la funzione è derivabile in $[0,2]-\{0\}$ e quindi $S=\{0\}$; ed inoltre risulta $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-4x^2=0 \Leftrightarrow 1-4x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$, quindi $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ed $F=\{0,2\}$ possiamo pertanto calcolare la funzione in tali punti ed osservare che $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e\sqrt{2}}$ ed $f(2)=\frac{\sqrt{2}}{e^4}$; ed essendo $\frac{1}{e\sqrt{2}}>\frac{\sqrt{2}}{e^4}$ risulta che la funzione ha *massimo assoluto* pari a $\frac{1}{e\sqrt{2}}$ ed un punto di massimo assoluto, e *minimo assoluto* pari a 0 ed un punto di minimo assoluto ed un *minimo relativo* pari a $\frac{\sqrt{2}}{e^4}$ ed un punto di minimo relativo.

d) Data la funzione $f(x)=\arccos(\log x)^2$, risulta definita per $-1 \le (\log x)^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le (\log x)^2 \le 1$ ovvero $|\log x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \log x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \le x \le e$ ovvero definita $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, quindi continua nel suo dominio, parte chiusa e limitata, pertanto per il teorema di Weierstrass, la *funzione è limitata*. Servendosi del teorema dei Punti Critici, si nota che $f'(x) = -\frac{2\log x}{x\sqrt{1-(\log x)^4}}$, per cui la funzione non è derivabile in $x\sqrt{1-(\log x)^4} = 0$ ovvero per $x=0$ e $(\log x)^4 = 1 \Leftrightarrow |\log x| = 1 = \log e \Leftrightarrow x = \pm e$; pertanto è derivabile in $\left[\frac{1}{e}, e\right] - \{e\}$ e quindi $C = \{e\}$; inoltre risulta che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, quindi $S = \{1\}$ ed essendo $F = \left\{\frac{1}{e}, e\right\}$; possiamo calcolare la funzione in tali punti ed osservare che: $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$ ed $f(e) = 0$ quindi la funzione ha *massimo assoluto* pari a $\frac{\pi}{2}$ ed un punto di massimo assoluto, e *minimo assoluto* pari a 0 e due punti di minimo assoluto.

e) Data la funzione $f(x) = arcsen(e^x - 1)$, risulta definita per $-1 \le e^x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le e^x \le 2$ ovvero $e^x \le e^{\log 2} \Leftrightarrow x \le \log 2$ ovvero definita $\forall x \in]-\infty, \log 2]$, quindi continua nel suo dominio, parte chiusa ma non limitata, quindi la *funzione non è limitata*. Servendosi del teorema dei Punti Critici, si nota che $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x-1)^2}}$, per cui la funzione è derivabile in $]-\infty, \log 2] - \{\log 2\}$ e quindi $C = \{\log 2\}$, e risulta che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, quindi $S = \{\varnothing\}$ ed $F = \{\log 2\}$ possiamo pertanto calcolare la funzione in tali punti ed osservare che $f(\log 2) = \frac{\pi}{2}$ ed osservando che $\lim_{x \to -\infty} arcsen(e^x - 1) = -\frac{\pi}{2}$, la funzione ha *massimo assoluto* pari a $\frac{\pi}{2}$ ed un punto di massimo assoluto.

6) I limiti significativi delle funzioni assegnate, risultano:

a) Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ essendo definita $\forall x \in [-2,1[\cup]1,+\infty[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x+2} \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \sqrt{3}(-\infty) = -\infty$;

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+2}\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \sqrt{3}(+\infty) = +\infty$ e

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$. Pertanto la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a destra, mentre la retta $x=1$ è un asintoto verticale sia a sinistra che a destra.

b) Data la funzione $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$ essendo definita $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, ha senso calcolare i seguenti limiti:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$;

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} (x-1) \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = -3(+\infty) = -\infty$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-1) \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = 1(+\infty) = +\infty$ e

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1$. Pertanto la retta $y=-1$ è un asintoto orizzontale a sinistra e la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale a destra, mentre le rette $x=-2$ ed $x=2$ sono rispettivamente due asintoti verticali a sinistra ed a destra.

c) Data la funzione $f(x) = \log_{1/2}(\log_2(x))$ essendo definita $\forall x \in]1,+\infty[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\log_{1/2}\log_2 x) = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to 1^+}\log_2 x = 0$ e conseguentemente $\lim_{y\to 0}\log_{1/2} y = +\infty$ ed il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\log_{1/2}\log_2 x) = -\infty$, in quanto $\lim_{x\to+\infty}\log_2 x = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty}\log_{1/2} y = -\infty$.

d) Data la funzione $f(x) = \log_2(x+2)$ essendo definita $\forall x \in]-2,+\infty[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\log_2(x+2) = -\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to-2^+}(x+2) = 0$ e conseguentemente $\lim_{y\to 0}\log_2 y = -\infty$ ed il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\log_2(x+2) = +\infty$, sempre trattandosi di funzione composta, si ha

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to+\infty}\log_2 y=+\infty$. Pertanto la retta $x=-2$ è un asintoto verticale a destra.

e) Data la funzione $f(x)=2^{x^2-1}-3$ essendo definita $\forall x\in R$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^{x^2-1}-3\right)=+\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to+\infty}2^y-3=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{x^2-1}-3\right)=+\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to+\infty}2^y-3=+\infty$.

f) Data la funzione $f(x)=\log_{1/5}\left(1-2^x\right)$ essendo definita $\forall x\in\left]-\infty,0\right[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\log_{1/5}\left(1-2^x\right)=0$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-2^x\right)=1$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to1}\log_{1/5}y=0$ ed il $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\log_{1/5}\left(1-2^x\right)=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-2^x\right)=0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to0}\log_{1/5}y=+\infty$. Pertanto la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

g) Data la funzione $f(x)=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}$ essendo definita $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to1}\log_2 y=0$; $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}(x-1)\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=-2\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=-2(-\infty)=+\infty$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to+\infty}\log_2 y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=-\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{x+1}=0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to0}\log_2 y=-\infty$ ed in fine il $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\dfrac{x-1}{x+1}=0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to1}\log_2 y=0$. Pertanto la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a sinistra e a destra, mentre le rette $x=-1$ ed $x=1$ sono rispettivamente due asintoti verticali a sinistra ed a destra.

h) Data la funzione $f(x)=\log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)$ essendo definita $\forall x\in\left]\log_2\frac{5}{4},\log_2 5\right]$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-}\log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)=-\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-}\left(2^x-1\right)=\frac{5}{4}-\frac{4}{4}=\frac{1}{4}$, quindi $\lim_{y\to\frac{1}{4}}\log_{1/4} y=1$, ovvero $\lim_{z\to 1} arco\cos z=0$ e $\lim_{k\to 0}\log_2 k=-\infty$ conseguentemente $\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-}\log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)=-\infty$. Pertanto la retta $x=\log_2\frac{5}{4}$ è un asintoto verticale a sinistra.

i) Data la funzione $f(x)=arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)$ essendo definita $\forall x\in\left]2,+\infty\right[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)=-\frac{\pi}{2}$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to 2^+}\left(3^x-9\right)=0$, quindi $\lim_{y\to 0}\log_{3/2} y=-\infty$ e conseguentemente $\lim_{z\to-\infty} arctgz=-\frac{\pi}{2}$ ed il $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)=\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to+\infty}\left(3^x-9\right)=+\infty$ quindi $\lim_{y\to+\infty}\log_{3/2} y=+\infty$ e conseguentemente $\lim_{z\to+\infty} arctgz=\frac{\pi}{2}$. Pertanto la retta $y=\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a destra, mentre la funzione a sinistra, tende al punto $\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$.

j) Data la funzione $f(x)=arcsen(2x-1)$ essendo definita $\forall x\in[0,1]$, essendo una funzione continua per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato non ha senso calcolare ulteriori limiti.

k) Data la funzione $f(x)=arcsen\left(2^x-1\right)$ essendo definita $\forall x\in\left]-\infty,1\right]$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} arcsen\left(2^x-1\right)=-\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to-\infty}\left(2^x-1\right)=-1$ quindi $\lim_{y\to-1} arcseny=-\frac{\pi}{2}$ Pertanto la retta $y=-\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

l) Data la funzione $f(x)=ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)$ essendo definita $\forall x\in\left[-\frac{7}{16},-\frac{1}{4}\right]$, essendo una funzione continua per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato non ha senso calcolare ulteriori limiti.

m) Data la funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}}$ essendo definita $\forall x\in[-2,-1[\cup[2,3[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^4-16\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{3+2x-x^2}=-15(-\infty)=+\infty$, quindi $\lim\limits_{y\to +\infty}\sqrt{y}=+\infty$ ed il $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^4-16\right)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{3+2x-x^2}=65(+\infty)=+\infty$, quindi $\lim\limits_{y\to +\infty}\sqrt{y}=+\infty$ Pertanto le rette $x=-1$ e $x=3$ sono due asintoti verticali a sinistra.

n) Data la funzione $f(x)=\log_{1/2}(2senx-1)$ essendo definita $\forall x\in\left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi\right[$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^+}\log_{1/2}(2senx-1)=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^+}(2senx-1)=0$, quindi $\lim\limits_{y\to 0}\log_{1/2} y=+\infty$ ed il $\lim\limits_{x\to\frac{5}{6}\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{5}{6}\pi^-}\log_{1/2}(2senx-1)=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to\frac{5}{6}\pi^-}(2senx-1)=0$, quindi $\lim\limits_{y\to 0}\log_{1/2} y=+\infty$ Pertanto le rette $x=\dfrac{\pi}{6}$ e $x=\dfrac{5}{6}\pi$ sono rispettivamente due asintoti verticali a destra ed a sinistra.

o) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x\cdot|x|}{1+x}$ essendo definita $\forall x\in R-\{-1\}$, ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x^2}{1+x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x^2}{x(1/x+1)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x}{1/x+1}=+\infty$, per cui si osserva che $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x}{1+x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-1}{1/x+1}=-1$, e conseguentemente $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{-x^2}{1+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{1+x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{1/x+1}=1$;

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x^2}{1+x}=-\lim\limits_{x\to -1^-}x^2\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{1+x}=-(-\infty)=+\infty$; ed il $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-x^2}{1+x}=-\lim\limits_{x\to -1^-}x^2\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{1+x}=-(+\infty)=-\infty$; infine il $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{1+x}=$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x(1/x+1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{1/x+1}=+\infty$, per cui si osserva che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1/x+1}=1$$ e conseguentemente $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1/x+1}=-1.$$ Pertanto la funzione *f* ha tre asintoti: la retta di equazione $y=-x+1$ asintoto obliquo a sinistra, la retta di equazione $x=-1$ asintoto verticale a sinistra e a destra e la retta di equazione $y=x-1$ asintoto obliquo a destra.

p) Data la funzione $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$ essendo definita $\forall x\in R$, ha senso calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2},$$ ed il

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=+\infty$$ per cui si osserva che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2$$ e conseguentemente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$ Pertanto la funzione *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y=-1/2$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y=2x+1/2$ asintoto obliquo a destra.