Esercitazione n. 08 (svolgimento)

1) Verificate le ipotesi del teorema degli Zeri, il punto di approssimazione per le seguenti funzioni, risulta:

a) Data la funzione $f(x)=\log(2x-1)$, continua nell'intervallo $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$, ed essendo $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{5}{3}\right)>0$, non ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\nexists x_0 \in \left]\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[\,/\, f(x_0)=0$.

b) Data la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}-2x^3-1$, continua nell'intervallo $\left[-\frac{5}{4},0\right]$, ed essendo $f\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot f(0)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli Zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]-\frac{5}{4},0\right[\,/\, f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 7^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 7^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{7^{-1}}\leq 2^{n+1} \Leftrightarrow n\geq \frac{\log((b-a)7)}{\log 2}-1$ quindi $n\geq \frac{\log\left(\frac{35}{4}\right)}{\log 2}-1=2.12$ pertanto, posto $n=3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 7^{-1}$ risulta:

N	An	bn	cn	f(an)	f(bn)	f(cn)
0	-5/4	0	-5/8	+	—	—
1	-5/4	-5/8	-15/16	+	—	—
2	-5/4	-15/16	-35/32	+	—	+
3	-15/16	-35/32	-75/64	—	+	

essere $c_3=-\frac{75}{74}$, in quanto $\left|-\frac{35}{32}+\frac{75}{64}\right|\leq\frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{5}{64}\leq\frac{1}{7}$.

c) Data la funzione $f(x)=\log(2x^2-2x)$, continua nell'intervallo $\left[\frac{3}{2},2\right]$, ed essendo $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f(2)>0$, non ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\nexists x_0 \in \left]\frac{3}{2},2\right[\,/\, f(x_0)=0$.

.

d) Data la funzione $f(x)=xe^x-1$, continua nell'intervallo $[0,1]$, e risultando $f(0)\cdot f(1)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0\in\,]0,1[\,/\,f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 9^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 9^{-1}\Leftrightarrow \frac{b-a}{9^{-1}}\le 2^{n+1}\Leftrightarrow n\ge\frac{\log((b-a)9)}{\log 2}-1$ quindi $n\ge\frac{\log 9}{\log 2}-1=2.16$ pertanto, posto $n=3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\le 9^{-1}$ risulta:

N	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	0	1	1/2	—	+	—0.11
1	1	1/2	3/4	+	—	+
2	1/2	3/4	5/8	—	+	+
3	1/2	5/8	9/16	—	+	

essere $c_3=\frac{9}{16}$, in quanto $\left|\frac{9}{16}-\frac{5}{8}\right|\le\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{16}\le\frac{1}{9}$.

2) Date le seguenti funzioni, in merito ai loro punti di discontinuità, si ha:

a) Essendo $f(x)=\begin{cases}\log e^{x-1} & \text{se } x\ge 1\\ tg\left(arctg\,\frac{1}{x-1}\right) & \text{se } x<1\end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{1\}$; si osserva che $f(1)=\log e^{1-1}=0$, il $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\log e^{x-1}=0$ ed il $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}tg\left(arctg\,\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$; pertanto il punto 1 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *seconda specie*.

b) Essendo $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{se } x>0\\ \cos x & \text{se } x\le 0\end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=\cos 0=1$, il $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\cos x=1$ ed il $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{|x|}}=0\ne f(0)$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

c) Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+x & \text{se } x<0 \\ \arccos x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, per cui f è continua in $[-1,1]-\{0\}$; si osserva che $f(0)=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arccos x=\frac{\pi}{2}$ ed il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}+x=0$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

d) Essendo $f(x)=\begin{cases} arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)-\pi & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ senx & \text{se } x>0 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=1$, il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)-\pi=0$ ed il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} senx=0$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità *eliminabile*.

e) Essendo $f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x>-1 \\ 0 & \text{se } x=-1 \\ arctg\,\frac{1}{x+1} & \text{se } x<-1 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{-1\}$; si osserva che $f(-1)=0$, il $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} arctg\,\frac{1}{x+1}=-\frac{\pi}{2}$ ed il $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\frac{\pi}{2}$; il punto -1 per la funzione data, è un punto di discontinuità *eliminabile*.

f) Essendo $f(x)=\begin{cases} tg\left(e^{\frac{1}{x}}\right) & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, per cui f è continua in $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$; si osserva che $f(0)=1$, il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} tg\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=0$ ed il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$; il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

g) Essendo $f(x)=\begin{cases} \log(x+e) & \text{se } x>0 \\ e^{x+1} & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$, per cui f è continua in $[-e,+\infty[-\{0\}$; si osserva che $f(0)=e$, il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=e$ ed il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\log(x+e)=1$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

3) In merito agli asintoti obliqui delle seguenti funzioni ed alle loro rette, si ha:

a) Essendo la funzione $f(x) = arcsen\dfrac{-2x+1}{\dfrac{x}{2}-1}$ una funzione limitata in quanto $f(X) = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la stessa *non ha asintoti obliqui*.

b) Essendo la funzione $f(x) = arctg\dfrac{-x+2}{-\dfrac{x+1}{3}}$ una funzione limitata in quanto $f(X) = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ la stessa *non ha asintoti obliqui*.

c) Essendo la funzione $f(x) = \dfrac{-x^2-2}{x+1}$ una funzione razionale, quindi definita $\forall x \in R - \{-1\}$, ed osservando che il $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2-2}{x+1} = \mp\infty$, vi potrebbero essere degli asintoti obliqui, pertanto si osserva che il $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2-2}{(x+1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(-1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = -1$ ed il $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2-2}{x+1} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2-2+x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x+1} = 1$; quindi la retta $y = -x+1$ *è un asintoto obliquo destro e sinistro* per la funzione.

d) Essendo la funzione $f(x) = \dfrac{x^4-4}{x^3-2x}$ una funzione razionale, quindi definita $\forall x \in R - \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$, ed osservando che il $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4-4}{x^3-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4-4}{x^3-2x} = \pm\infty$, vi potrebbero essere degli asintoti obliqui, pertanto si osserva che il $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4-4}{(x^3-2x)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4\left(1-\dfrac{4}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)} = 1$ ed il $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4-4}{x^3-2x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4-4-x^4+2x^2}{x^3-2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2-4}{x^3-2x} = 0$ la retta $y = x$ *è un asintoto obliquo destro e sinistro* per la funzione.

e) Essendo la funzione $f(x) = \dfrac{x+\log(x+1)}{x-1}$ una funzione definita $\forall x \in R - \{1\} \cap]-1, +\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-1, 1[\cup]1, +\infty[$, ed osservando che il

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\log(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{1+x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{1+x}=1$, la funzione *non è dotata di asintoti obliqui*.

4) Per le funzioni assegnate, risultano le seguenti derivabilità:

a) Data la funzione $f(x)=\arccos(3x+1)$, definita $\forall x\in\left[-\frac{2}{3},0\right]$, pertanto osservando che la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$ definita $1-(3x+1)^2\neq 0\Leftrightarrow |3x+1|\neq 1\Leftrightarrow \begin{cases}3x+1\neq 1\\3x+1\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq -\frac{2}{3}\end{cases}$ quindi $\forall x\in\left]-\frac{2}{3},0\right[$; pertanto la funzione *f è derivabile* $\forall x\in\left]-\frac{2}{3},0\right[$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nei punti $x=-\frac{2}{3}$ ed $x=0$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists\lim_{x\to x_0}f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+}\frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}=-\infty$ ed analogamente $\lim_{x\to 0^-}\frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}=-\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=-\frac{2}{3}$ e risulta $f'_d\left(-\frac{2}{3}\right)=-\infty$ ed *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta $f'_s(0)=-\infty$.

b) Data la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$, definita $\forall x\in R$, la cui funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ definita $\forall x\in R-\{1\}$; quindi possiamo affermare che la funzione f è *derivabile* $\forall x\in R-\{1\}$; quindi verifichiamo l'esistenza della sua derivabilità nel punto $x=1$, per cui deve $\exists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x-1}=+\infty$ ed $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^{1-\frac{1}{3}}}=+\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=1$ ed il punto 1 *è un punto di flesso ascendente* per la funzione data.

c) Data la funzione $f(x)=arctg(2x-1)$, definita $\forall x\in R$, la cui funzione derivata prima risulta $f'(x)=\dfrac{2}{1+(2x-1)^2}$ definita $\forall x\in R$; quindi possiamo affermare che la funzione *f* è *derivabile* nel suo dominio, ovvero $\forall x\in R$.

d) Data la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$, definita $\forall x\in[1,+\infty[$, la cui funzione derivata prima risulta $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x+1}{2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}}{(x+1)^2}=\dfrac{3-x}{2\sqrt{x-1}(x+1)^2}$ definita $\forall x\in]1,+\infty[$; quindi possiamo affermare che la funzione *f* è *derivabile* $\forall x\in[1,+\infty[-\{1\}$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nel punto $x=1$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3-x}{2\sqrt{x-1}(x+1)^2}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$, pertanto la funzione *è dotata di derivata* in $x=1$ e risulta $f'_d(1)=+\infty$.

e) Data la funzione $f(x)=arc\cot g\sqrt{2x}$, definita $\forall x\in[0,+\infty[$, la cui funzione derivata prima risulta $f'(x)=\dfrac{-2\dfrac{1}{2\sqrt{2x}}}{1+2x}=-\dfrac{1}{(1+2x)\sqrt{2x}}$ definita $\forall x\in]0,+\infty[$; quindi possiamo affermare che la funzione *f* è *derivabile* $\forall x\in[0,+\infty[-\{0\}$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nel punto $x=0$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{(1+2x)\sqrt{2x}}=-\infty$, pertanto la funzione *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta $f'_d(0)=-\infty$.

f) Data la funzione $f(x)=arcsen(2x-1)$, definita $\forall x\in[0,1]$, pertanto osservando che la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$ definita $1-(2x-1)^2\neq0\Leftrightarrow|2x-1|\neq1\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\neq1\\2x-1\neq-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\x\neq0\end{cases}$ quindi $\forall x\in]0,1[$; pertanto la funzione *f* è *derivabile* $\forall x\in]0,1[$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nei punti $x=0$ ed $x=1$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=+\infty$ ed analogamente $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = +\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta $f'_d(0)=+\infty$ ed *è dotata di derivata* in $x=1$ e risulta $f'_s(1)=+\infty$.

5) Date le funzioni assegnate, la loro monotonia risulta:

a) Data la funzione $f(x)=\frac{\log x}{x}$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ e la derivata, $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$; pertanto studiare la monotonia della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\log x}{x^2}>0 \Leftrightarrow \log x<1 \Leftrightarrow x<e \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,e\right[$ ed $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in -\left]-\infty,e\right[$, infine $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$; quindi la funzione data risulta *strettamente crescente* $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\cap \left]-\infty,e\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]0,e\right[$, risulta *strettamente decrescente* $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\cap \left]e,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]e,+\infty\right[$ ed infine il punto $x=e$ sarà per la funzione, un punto di massimo relativo proprio.

b) Data la funzione $f(x)=e^x-2x$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in R$ e la derivata, $f'(x)=e^x-2$; pertanto studiare la monotonia della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2=e^{\log 2} \Leftrightarrow x>\log 2 \Leftrightarrow \forall x \in \left]\log 2,+\infty\right[$ ed $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in -\left]\log 2,+\infty\right[$, infine $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\log 2$; quindi la funzione data risulta *strettamente crescente* $\forall x \in R \cap \left]\log 2,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]\log 2,+\infty\right[$, risulta *strettamente decrescente* $\forall x \in R \cap -\left]\log 2,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,\log 2\right[$ ed infine il punto $x=\log 2$ sarà per la funzione, un punto di minimo relativo proprio.

c) Data la funzione $f(x)=x+\log_{\frac{2}{3}}(x-1)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in \left]1,+\infty\right[$ e la derivata, $f'(x)=1+\frac{1}{x-1}\log_{\frac{2}{3}} e = \frac{x-1+\log_{\frac{2}{3}} e}{x-1}$; pertanto studiare la monotonia della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-1+\log_{\frac{2}{3}} e}{x-1}>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]1-\log_{\frac{2}{3}} e,+\infty\right[$ ed $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]1,1-\log_{\frac{2}{3}} e\right[$, infine $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1-\log_{\frac{2}{3}} e$; quindi la funzione data risulta *strettamente crescente* $\forall x \in \left]1,+\infty\right[\cap \left]1-\log_{\frac{2}{3}} e,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]1-\log_{\frac{2}{3}} e,+\infty\right[$, risulta *strettamente decrescente* $\forall x \in \left]1,+\infty\right[\cap \left]1,1-\log_{\frac{2}{3}} e\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]1,1-\log_{\frac{2}{3}} e\right[$ ed infine il punto $x = 1-\log_{\frac{2}{3}} e$ è per la funzione un punto di minimo relativo proprio.

d) Data la funzione $f(x) = arctg\left(\frac{2x+1}{x}\right)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in R - \{0\}$ e la derivata, $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2}\frac{4x+1}{x^2} = \frac{4x+1}{x^2+(2x+1)^2}$; pertanto studiare la monotonia della funzione f equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x+1}{5x^2 4x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4},+\infty\right[$ ed $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in -\left]-\frac{1}{4},+\infty\right[$, infine $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$; quindi la funzione data risulta *strettamente crescente* $\forall x \in R - \{0\} \cap \left]-\frac{1}{4},+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{1}{4},0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$, risulta *strettamente decrescente* $\forall x \in R - \{0\} \cap -\left]-\frac{1}{4},+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[$ ed infine il punto $x = -\frac{1}{4}$ sarà per la funzione, un punto di minimo relativo proprio.

e) Data la funzione $f(x) = arc\cot g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in R - \{-1\}$ e la derivata, $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{2}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}$; pertanto studiare la monotonia della funzione f equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x^2+1)} < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$ ed $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in -\varnothing$, infine $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varnothing$; quindi la funzione data risulta *strettamente crescente* $\forall x \in R - \{-1\} \cap \varnothing \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$, risulta *strettamente decrescente* $\forall x \in R - \{-1\} \cap -\varnothing \Leftrightarrow \forall x \in R - \{-1\}$ ed infine il punto $x = \varnothing \notin R - \{-1\}$ pertanto la funzione, non avrà punti stazionari.

6) Date le funzioni assegnate, la loro convessità risulta:

a) Data la funzione $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$; la derivata, $f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$, e la derivata seconda $f''(x)=\dfrac{-\dfrac{x^2}{x}-(1-\log x)2x}{x^4}=-\dfrac{3-\log x^2}{x^3}$; pertanto studiare la convessità della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata seconda, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^3}\left(\log x^2-3\right)>0$ pertanto osserviamo che $\log x^2>3=\log e^3 \Leftrightarrow |x|>\sqrt{e^3}$ e quindi in definitiva risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\sqrt{e^3},0\right[\cup\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[$ e tenendo conto che $f''(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in -\left(\left]-\sqrt{e^3},0\right[\cup\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[\right)$, infine $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e^3}$; quindi la funzione data risulta *strettamente convessa* $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\cap\left(\left]-\sqrt{e^3},0\right[\cup\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[\right)\Leftrightarrow \forall x \in \left]\sqrt{e^3},+\infty\right[$, risulta *strettamente concava* $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\cap-\left(\left]-\sqrt{e^3},0\right[\cup\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[\right)\Leftrightarrow \forall x \in \left]0,\sqrt{e^3}\right[$ ed infine il punto $x=\sqrt{e^3}$ sarà per la funzione, un punto di flesso proprio.

b) Data la funzione $f(x)=x-\log(x+1)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[$, la derivata prima $f'(x)=\dfrac{x}{x+1}$ e la derivata seconda $f''(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ pertanto studiare la convessità della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata seconda, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2}>0 \Leftrightarrow \forall x \in R-\{-1\}$ e tenendo conto che $f''(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in -(R-\{-1\})$, infine $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\varnothing$; quindi la funzione data risulta *strettamente convessa* $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[\cap(R-\{-1\})\Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$, risulta *strettamente concava* $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[\cap-(R-\{-1\})\Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$ ed infine essendo il punto $x=\varnothing$ la funzione non avrà punti di flesso proprio.

c) Data la funzione $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{2x-1}$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in \left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$; la derivata, $f'(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{(2x-1)^2}$, e la derivata seconda $f''(x)=\dfrac{(8x-4)(2x-1)^2-\left(4x^2-4x+1\right)4(2x-1)}{(2x-1)^4}=(2x-1)\dfrac{(8x-4-8x+4)}{(2x-1)^4}=0$; pertanto studiare la convessità della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata seconda, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$ ed anche $f''(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$, infine $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=R$; quindi la funzione data risulta *sia concava che convessa*, essendo appunto una retta.

d) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2x+1}$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, la derivata prima $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$ e la derivata seconda $f''(x)=\dfrac{(4x+2)(2x+1)^2-(2x^2+2x-1)(8x+4)}{(2x+1)^4}=\dfrac{12x+6}{(2x+1)^4}$ pertanto studiare la convessità della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata seconda, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{12x+6}{(2x+1)^4}>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ e tenendo conto ed $f''(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in -\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, infine $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$; quindi la funzione data risulta *strettamente convessa* $\forall x \in \left(\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[\right) \cap \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, risulta *strettamente concava* $\forall x \in \left(\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[\right) \cap -\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$ ed infine il punto $x=-\dfrac{1}{2}$ sarà per la funzione un punto di flesso proprio.

e) Data la funzione $f(x)=arcsen(x-1)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in [0,2]$, la derivata prima $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ e la derivata seconda

$$f''(x)=\frac{-\dfrac{2(x-1)}{2\sqrt{1-(x-1)^2}}}{\left(\sqrt{1-(x-1)^2}\right)^2}=-\frac{(x-1)}{\left(1-(x-1)^2\right)\sqrt{1-(x-1)^2}},$$

definita $\forall x \in]0,2[$; pertanto studiare la convessità della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata seconda, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow -\dfrac{(x-1)}{\left(1-(x-1)^2\right)\sqrt{1-(x-1)^2}}>0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[$ e tenendo conto ed $f''(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in -]-\infty,1[$, infine $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$; quindi la funzione data risulta *strettamente convessa* $\forall x \in]0,2[\cap]-\infty,1[\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[$, risulta *strettamente concava* $\forall x \in]0,2[\cap -]-\infty,1[\Leftrightarrow \forall x \in]1,2[$; inoltre non essendo la funzione derivabile due volte nei punti $x=0$ ed $x=2$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $-\lim_{x\to 0^+}\dfrac{(x-1)}{\left(1-(x-1)^2\right)\sqrt{1-(x-1)^2}}=+\infty$ ed analogamente $-\lim_{x\to 2^-}\dfrac{(x-1)}{\left(1-(x-1)^2\right)\sqrt{1-(x-1)^2}}=-\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta

$f'_d(0) = +\infty$ ed *è dotata di derivata* in $x = 2$ e risulta $f'_s(2) = +\infty$ e quindi risulta *strettamente convessa* $\forall x \in [0,1[$, risulta *strettamente concava* $\forall x \in]1,2]$; ed infine il punto $x = 1$ sarà per la funzione un punto di flesso proprio.

f) Data la funzione $f(x) = arctg(x+1)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in R$, la derivata prima $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x+1)^2}$ e la derivata seconda $f''(x) = -\dfrac{2(x+1)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2}$, pertanto studiare la convessità della funzione *f* equivale a studiare il segno della funzione derivata seconda, per cui $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2(x+1)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2} > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1[$ e tenendo conto ed $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in -]-\infty,-1[$, infine $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; quindi la funzione data risulta *strettamente convessa* $\forall x \in R \cap]-\infty,-1[\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1[$, risulta *strettamente concava* $\forall x \in R \cap -]-\infty,-1[\Leftrightarrow \forall x \in]-1,+\infty[$; ed infine il punto $x = -1$ sarà per la funzione un punto di flesso proprio.