Esercitazione n. 07 (svolgimento)

1) Verificata l'esistenza, i punti di approssimazione delle seguenti equazioni, risultano:

a) Data la funzione $f(x)=2x-\sqrt[3]{x}$, definita nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, e risultando $f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]-\frac{1}{2},1\right[\,/\, f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 10^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 10^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{10^{-1}}\leq 2^{n+1} \Leftrightarrow n\geq \frac{\log(b-a)10}{\log 2}-1$ quindi $n\geq \frac{\log\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)10\right)}{\log 2}-1=2.9$ pertanto, posto $n=3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 10^{-1}$ risulta:

N	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	−1/2	1	1/4	—	+	−0.1299
1	1	1/4	5/8	+	—	0.395
2	1/4	5/8	7/16	—	+	0.116
3	1/4	7/16	11/32	—	+	−0.013

essere $c_3=\frac{11}{32}$, in quanto $\left|\frac{11}{32}-\frac{7}{16}\right|\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{3}{32}\leq\frac{1}{10}$.

b) Data la funzione $f(x)=\sqrt{x}+x^2-3$, definita nell'intervallo $[1,2]$, e risultando $f(1)\cdot f(2)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0\in\,]1,2[\,/\,f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 7^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 7^{-1}\Leftrightarrow\frac{b-a}{7^{-1}}\leq 2^{n+1}\Leftrightarrow n\geq\frac{\log((b-a)7)}{\log 2}-1$ quindi $n\geq\frac{\log(2-1)7}{\log 2}-1=1.9$ pertanto, posto $n=2$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 7^{-1}$ risulta:

N	A_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	1	2	3/2	—	+	0.474
1	1	3/2	5/4	—	+	−0.319
2	3/2	5/4	11/8	+	—	0.063

essere $c_2=\frac{11}{8}$, in quanto $\left|\frac{11}{8}-\frac{5}{4}\right|\leq\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{8}\leq\frac{1}{7}$.

c) Data la funzione $f(x)=x^3-2x+2$, definita nell'intervallo $[-2,-1]$, e risultando $f(-2)\cdot f(-1)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in]-2,-1[\,/\, f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{8^{-1}}\le 2^{n+1} \Leftrightarrow n\ge \frac{\log((b-a)8)}{\log 2}-1$ quindi $n\ge \frac{\log 8}{\log 2}-1=2$ pertanto, posto $n=2$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\le 8^{-1}$ risulta:

N	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	−2	−1	−3/2	—	+	1.625
1	−2	−3/2	−7/4	—	+	0.141
2	−2	−7/4	−15/8			−0.84

essere $c_2=-\frac{15}{8}$, in quanto $\left|-\frac{15}{8}+\frac{7}{4}\right|\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{8}\le\frac{1}{8}$.

d) Data la funzione $f(x)=xe^x$, definita nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$, e risultando $f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right[\,/\, f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 9^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 9^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{9^{-1}}\le 2^{n+1} \Leftrightarrow n\ge \frac{\log((b-a)9)}{\log 2}-1$ quindi $n\ge \frac{\log\frac{27}{4}}{\log 2}-1=1.75$ pertanto, posto $n=2$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\le 9^{-1}$ risulta:

N	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
0	−1/2	1/4	−1/8	—	+	−0.11
1	1/4	−1/8	1/16	+	—	0.066
2	−1/8	1/16	−1/32	—	+	−0.032

essere $c_2=-\frac{1}{32}$, in quanto $\left|-\frac{1}{32}-\frac{1}{16}\right|\le\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{3}{32}\le\frac{1}{9}$.

2) Date le seguenti funzioni, in merito ai loro punti di discontinuità, si ha:

a) Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \\ arctg\dfrac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{1\}$; si osserva che $f(1)=e^{1-1}=1$, il $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{x-1}=1$ ed il $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} arctg\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{\pi}{2}$; pertanto il punto 1 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

b) Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \\ \cos x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=\cos 0=1$, il $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x=1$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *seconda specie*.

c) Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=\cos 0=1$, il $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x=1$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}+x=0$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

d) Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=0$, il $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x=1$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}+1=1$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità *eliminabile*.

e) Essendo $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x > -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ arc\cot g\dfrac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{-1\}$; si osserva che $f(-1)=0$, il $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} arc\cot g\dfrac{1}{x+1}=\pi$ ed il $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$; il punto -1 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *prima specie*.

f) Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=1$, il $\lim_{x \to 0^-} f(x)=\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{|x|}}=+\infty$ ed il $\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{|x|}}=+\infty$; il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *seconda specie*.

g) Essendo $f(x)=\begin{cases} \log(x-1) & \text{se } x>1 \\ 0 & \text{se } x=1 \end{cases}$, per cui f è continua in $[1,+\infty[-\{1\}$; si osserva che $f(1)=0$, il $\lim_{x \to 1^-} f(x)=0$, mentre il $\lim_{x \to 1^+} f(x)=\lim_{x \to 1^+} \log(x-1)=-\infty$; pertanto il punto 1 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *seconda specie*.

3) Trovati gli insieme di definizione, gli asintoti delle seguenti funzioni, risultano:

a) Essendo la funzione $f(x)=\dfrac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1}$ una funzione razionale, quindi definita $\forall x \in R-\{2\}$, ed osservando che il $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1}=+\infty$ ed il $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1}=-\infty$; la retta $x=2$ *è un asintoto verticale destro e sinistro* per la funzione. Inoltre osservando che il $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1}=-4$; la retta $y=-4$ *è un asintoto orizzontale destro e sinistro* per la funzione.

b) Essendo la funzione $f(x)=\dfrac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}}$ una funzione razionale, quindi definita $\forall x \in R-\{-1\}$, ed osservando che il $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}}=+\infty$ ed il $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}}=-\infty$; la retta $x=-1$ *è un asintoto verticale destro e sinistro* per la funzione. Inoltre osservando che il $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}}=3$; la retta $y=3$ *è un asintoto orizzontale destro e sinistro* per la funzione.

c) Essendo la funzione $f(x)=\dfrac{-x^2+2}{\frac{x+1}{2}}$ una funzione razionale, quindi definita $\forall x \in R-\{-1\}$, ed osservando che il $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x^2+2}{\frac{x+1}{2}}=-\infty$ ed il $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-x^2+2}{\frac{x+1}{2}}=+\infty$; la retta $x=-1$ *è un asintoto verticale destro e sinistro* per la funzione. Inoltre essendo il $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+2}{\frac{x+1}{2}}=\mp\infty$, si osserva che il $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+2}{\frac{x+1}{2}x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}\right)}=-2$ ed il $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)+2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+2}{\frac{x+1}{2}}+2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+2+2x\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+4}{x+1}=2$ la retta $y=-2x+2$ *è un asintoto obliquo destro e sinistro* per la funzione.

d) Essendo la funzione $f(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{(x-1)^2}$ una funzione razionale, quindi definita $\forall x \in R-\{1\}$, ed osservando che il $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3+2x-1}{(x-1)^2}=+\infty$ ed il $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^3+2x-1}{(x-1)^2}=+\infty$; la retta $x=1$ *è un asintoto verticale destro e sinistro* per la funzione. Inoltre essendo il $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{(x-1)^2}=\pm\infty$, si osserva che il $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3\left(2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=2$ ed il $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{(x-1)^2}-2x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+2x-1-2x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^2-1}{(x-1)^2}=4$ la retta $y=2x+4$ *è un asintoto obliquo destro e sinistro* per la funzione.

e) Essendo la funzione $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x-1}$ una funzione razionale ed essendo la funzione al numeratore definita $\forall x \in]-1,+\infty[$, si ha che f è definita $\forall x \in R-\{1\}\cap]-1,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[\cup]1,+\infty[$, ed osservando che il $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\log(x+1)}{x-1}=-\infty$ ed il $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\log(x+1)}{x-1}=+\infty$; la retta $x=1$ *è un asintoto verticale destro e sinistro* per la funzione.

Inoltre essendo $\lim_{x\to -1^+} \frac{\log(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x-1} \cdot \lim_{x\to -1^+} \log(x+1) = -\frac{1}{2}(-\infty) = +\infty$, la retta $x=-1$ *è un asintoto verticale destro*. Ed infine essendo il $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+1)}{x-1} = 0$, la retta $y=0$ *è un asintoto orizzontale destro* per la funzione.

4) Date le seguenti funzioni derivata prima, si hanno i rispettivi punti di non derivabilità:

a) Data la funzione $f(x)=|x|$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{|x|}{x}$ definita $\forall x \in R-\{0\}$; pertanto verifichiamo la sua derivabilità nel punto $x=0$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ ed $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=0$ ed il punto 0 *è un punto angoloso* per la funzione data.

b) Data la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ definita $\forall x \in R-\{0\}$; pertanto verifichiamo la sua derivabilità nel punto $x=0$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$ ed $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=0$ ed il punto 0 *è un punto di flesso ascendente* per la funzione data.

c) Data la funzione $f(x)=\sqrt{|x|}$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{|x|}}\frac{|x|}{x}$ definita $\forall x \in R-\{0\}$; pertanto verifichiamo la sua derivabilità nel punto $x=0$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x|}}{x\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x\sqrt{x}} = +\infty$ ed $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x|}}{x\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=0$ ed il punto 0 *è un punto di cuspide* per la funzione data.

d) Data la funzione $f(x)=|x^2-1|$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{|x^2-1|}{x^2-1}2x$ definita $\forall x\in R-\{(x^2-1)=0\}$; quindi essendo $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, la funzione derivata prima non è definita nei punti $x=\pm 1$. Inoltre, la funzione data risulta $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & \forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\\ 1-x^2 & \forall x\in]-1,1[\end{cases}$ pertanto verifichiamo la sua derivabilità nel punto $x=-1$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1-0}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}(x-1)=-2$ ed $\lim_{x\to -1^+}\frac{1-x^2-0}{x+1}=-\lim_{x\to -1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=-\lim_{x\to -1^+}(x-1)=2$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=-1$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data. Verifichiamo ora la sua derivabilità nel punto $x=1$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2-0}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^-}(x+1)=-2$ ed $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=1$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

e) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$ definita $\forall x\in R$; ma verifichiamo la sua derivabilità nel punto di raccordo $x=1$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$ ed $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-1-2}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=1$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

5) Verificata la possibilità, l'equazione della tangente delle seguenti funzioni nel punto $(x_0, f(x_0))$ risulta:

a) L'equazione della tangente su una funzione in un punto $(x_0, f(x_0))$ risulta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, quindi per la funzione data $f(x) = \log(x+1)$, il dominio risulta $x + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1,+\infty[$, pertanto il punto $x_0 = 2 \in]-1,+\infty[$ e quindi è possibile determinare la derivata, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e riportare l'equazione della tangente in $(2, f(2))$, che risulta: $y = \dfrac{1}{3}(x-2) + \log 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x + \log 3 - \dfrac{2}{3}$.

b) L'equazione della tangente su una funzione in un punto $(x_0, f(x_0))$ risulta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, quindi per la funzione data $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, il dominio risulta $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, pertanto il punto $x_0 = \dfrac{4}{3} \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ e quindi è possibile determinare la derivata, $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ e riportare l'equazione della tangente in $\left(\dfrac{4}{3}, f\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)$, che risulta: $y = \dfrac{4}{\sqrt{7}}\left(x - \dfrac{4}{3}\right) + \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

c) L'equazione della tangente su una funzione in un punto $(x_0, f(x_0))$ risulta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, quindi per la funzione data $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, il dominio risulta $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, pertanto il punto $x_0 = -1 \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ e quindi è possibile determinare la derivata, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ e riportare l'equazione della tangente in $(-1, f(-1))$, che risulta: $y = -\dfrac{1}{2}(x+1)$.

d) L'equazione della tangente su una funzione in un punto $(x_0, f(x_0))$ risulta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, quindi per la funzione data $f(x) = arcsen(2x+1)$, il dominio risulta $2x + 1 \in [-1,1] \Leftrightarrow \forall x \in [-1,0]$, pertanto il punto $x_0 = -\dfrac{1}{2} \in [-1,0]$ e quindi è possibile determinare la derivata, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$ e riportare l'equazione della tangente in $\left(-\dfrac{1}{2}, f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$, che risulta: $y = 2x + 1$.

e) L'equazione della tangente su una funzione in un punto $(x_0, f(x_0))$ risulta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, quindi per la funzione data $f(x) = \cos 2x$, il dominio risulta

$\forall x \in R$, pertanto il punto $x_0 = \frac{\pi}{2} \in R$ e quindi è possibile determinare la derivata, $f'(x) = -2sen2x$ e riportare l'equazione della tangente in $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, che risulta: $y = -1$.

6) Date le funzioni assegnate, la loro monotonia risulta:

a) Data la funzione $f(x) = x - \log(x+1)$, tenendo conto che il dominio risulta $x+1>0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1,+\infty[$ e la derivata, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$; pertanto studiare la monotonia della funzione equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1,0[$, infine $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; quindi la funzione data risulta strettamente crescente $\forall x \in (]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[) \cap]-1,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[$, strettamente decrescente $\forall x \in]-1,0[\cap]-1,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-1,0[$ ed infine il punto $x = 0$ sarà per la funzione, un punto di minimo relativo proprio.

b) Data la funzione $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{2x-1}$, tenendo conto che il dominio risulta $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ e la derivata, $f'(x) = \frac{(4x+1)(2x-1) - 2(2x^2 + x - 1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x + 1}{(2x-1)^2}$; pertanto studiare la monotonia della funzione equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui e conseguentemente $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x + 1}{(2x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \varnothing$, infine $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; quindi la funzione data risulta strettamente crescente $\forall x \in \left(R - \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \cap \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, strettamente decrescente $\forall x \in \varnothing$ e conseguentemente non ha punti di massimo o di minimo relativo.

c) Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x+1}$, tenendo conto che il dominio risulta $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ e la derivata,

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)(2x+1)-2(x^2+x+1)}{(2x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}$; pertanto studiare la monotonia della funzione equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui e conseguentemente

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}>0 \Leftrightarrow 2x^2+2x-1>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}<0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$, infine

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; quindi la funzione data risulta *strettamente crescente* $\forall x \in \left(\left]-\infty,-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[\right) \cap R-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, risulta *strettamente decrescente* $\forall x \in \left]-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[\cap R-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$ e conseguentemente il punto $x=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ sarà per la funzione, un punto di massimo relativo proprio, mentre il punto $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sarà per la funzione, un punto di minimo relativo proprio.

d) Data la funzione $f(x)=arcsen(x-1)$, tenendo conto che il dominio risulta $x-1\in[-1,1] \Leftrightarrow \forall x \in [0,2]$ e la derivata, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$ definita $\forall x \in]0,2[$ pertanto studiare la monotonia della funzione equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}>0 \Leftrightarrow -x^2+2x>0 \Leftrightarrow \forall x \in]0,2[$ e conseguentemente $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}<0 \Leftrightarrow -x^2+2x<0 \Leftrightarrow$, $\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[\cap]0,2[\Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$ infine $f'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$; quindi la funzione data *risulta strettamente crescente* $\forall x \in]0,2[\cap [0,2] \Leftrightarrow \forall x \in]0,2[$, *strettamente decrescente* $\forall x \in (]-\infty,0[\cup]2,+\infty[) \cap [0,2] \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$; inoltre non essendo la funzione f derivabile negli estremi del suo dominio, per completare lo studio della monotonia, servendosi della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=+\infty$ ed analogamente $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=+\infty$, pertanto la funzione *è strettamente crescente nel suo dominio* e conseguentemente il punto

$x = 0$ sarà per la funzione, un punto di minimo relativo proprio, mentre il punto $x = 2$ sarà per la funzione, un punto di massimo relativo proprio, ovvero per il teorema di Weierstress, punti assoluti.

e) Data la funzione $f(x) = arctg(x+1)$, tenendo conto che il dominio risulta $\forall x \in R$ e la derivata, $f'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2}$, definita $\forall x \in R$; pertanto studiare la monotonia della funzione equivale a studiare il segno della funzione derivata prima, per cui e conseguentemente $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 2x + 2} > 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$, infine $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varnothing$; quindi la funzione data *risulta strettamente crescente* $\forall x \in R \bigcap R \Leftrightarrow \forall x \in R$, strettamente decrescente $\forall x \in R \bigcap \varnothing \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$ e conseguentemente non ha punti di massimo o di minimo relativo.