Esercitazione n. 06 (svolgimento)

I. Per i seguenti limiti, si ha:

a) Essendo $f(x) = 2x - 1$, tale funzione è definita in *R*, pertanto 0 è un punto di accumulazione per *f*, e risulta $\lim_{x\to 0}(2x-1) = -1$ ovvero per la definizione di limite : $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, tale che se $x \in R$ e se $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta che $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, si ha: $|2x - 1 + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < 2x < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2}$, quindi posto $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, esiste il delta in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

b) Essendo $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, tale funzione è definita in $R - \{1\}$, pertanto 1 è un punto di accumulazione per *f*, e risulta $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, tale che se $x \in R$ e se $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta che $f(x) \in I_{+\infty} \Leftrightarrow f(x) > \in$ Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, si ha: $\frac{1}{(1-x)^2} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} > (1-x)^2 \Leftrightarrow |1-x| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < 1 - x < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ovvero $-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 < -x < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ quindi posto $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, esiste il delta in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

c) Essendo $f(x) = -\frac{1}{arcsen^2 x}$, tale funzione è definita in $[1-,1] - \{0\}$, pertanto 0 è un punto di accumulazione per *f*, e risulta $\lim_{x\to 0} -\frac{1}{arcsen^2 x} = -\infty$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, tale che se $x \in [1-,1]$ e se $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta che $f(x) \in I_{-\infty} \Leftrightarrow f(x) < -\varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, si ha: $-\frac{1}{arcsen^2 x} < -\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{arcsen^2 x} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} > arcsen^2 x \Leftrightarrow -sen\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x < sen\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, quindi posto $\delta = sen\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, esiste il delta in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

d) Essendo $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, tale funzione è definita in R, non limitata superiormente, pertanto è possibile fare il limite che tende a $+\infty$, e risulta $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in R$ e se $x>\delta$ risulta che $f(x)\in I_L \Leftrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon>0$, e considerato che si tratta di una funzione esponenziale sempre positiva, si ha: $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\varepsilon \Leftrightarrow x>\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon$, quindi posto $\delta=\log_{\frac{1}{2}}\varepsilon$ per $\varepsilon<1$, e $\delta=0$ per $\varepsilon>1$ si determina un intorno $+\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

e) Essendo $f(x)=2^x$, tale funzione è definita in R, non limitata inferiormente, pertanto è possibile fare il limite che tende a $-\infty$., e risulta $\lim_{x\to-\infty}2^x=0$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in R$ e se $x<-\delta$ risulta che $f(x)\in I_L \Leftrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon>0$, e considerato che si tratta di una funzione esponenziale sempre positiva, si ha: $2^x<\varepsilon \Leftrightarrow x<\log_2\varepsilon$, pertanto con $\varepsilon<1$, posto $\delta=-\log_2\varepsilon$, si ha $x<-\delta \Leftrightarrow x<-(-\log_2\varepsilon)\Leftrightarrow x<\log_2\varepsilon$ si determina un intorno $-\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

f) Essendo $f(x)=3^x$, tale funzione è definita in R, non limitata superiormente, pertanto è possibile fare il limite che tende a $+\infty$, e risulta $\lim_{x\to+\infty}3^x=+\infty$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in R$ e se $x>\delta$ risulta che $f(x)\in I_{+\infty} \Leftrightarrow f(x)>\varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon>0$, e considerato che si tratta di una funzione esponenziale sempre positiva, si ha: $3^x>\varepsilon \Leftrightarrow x>\log_3\varepsilon$, pertanto posto $\delta=\log_3\varepsilon$, nel caso di $\varepsilon<1$ e $\delta=0$ nel caso di $\varepsilon>1$ si determina un intorno $+\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

g) Essendo $f(x)=\log_{2/3}x$, tale funzione è definita in $]0,+\infty[$, non limitata superiormente, pertanto è possibile fare il limite che tende a $+\infty$, e risulta $\lim_{x\to+\infty}\log_{2/3}x=-\infty$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in]0,+\infty[$ e se $x>\delta$ risulta che $f(x)\in I_{-\infty} \Leftrightarrow f(x)<-\varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon>0$, si ha: $\log_{2/3}x<-\varepsilon \Leftrightarrow 2/3^{\log_{2/3}x}<2/3^{-\varepsilon} \Leftrightarrow x>2/3^{-\varepsilon}$, pertanto posto $\delta=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\varepsilon}$, si determina un intorno $+\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

h) Essendo $f(x)=x^3$, tale funzione è definita in R, non limitata inferiormente, pertanto è possibile fare il limite che tende a $-\infty$, e risulta $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in R$ e se $x<-\delta$ risulta che $f(x)\in I_{-\infty} \Leftrightarrow f(x)<-\varepsilon$

Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, si ha: $x^3 < -\varepsilon \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{-\varepsilon}$, pertanto posto $\delta = \sqrt[3]{-\varepsilon}$, si determina un intorno $-\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

i) Essendo $f(x) = 4^{-x}$, tale funzione è il reciproco di una funzione esponenziale, pertanto definita in R, non limitata inferiormente, pertanto è possibile fare il limite che tende a $-\infty$, e risulta $\lim_{x\to-\infty} 4^{-x} = +\infty$ ovvero, per la definizione di limite : $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0$, tale che se $x \in R$ e se $x < -\delta$ risulta che $f(x) \in I_{+\infty} \Leftrightarrow f(x) > \varepsilon$ Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, si ha: $4^{-x} > \varepsilon \Leftrightarrow x < -\log_4 \varepsilon$, pertanto posto $\delta = \log_4 \varepsilon$, nel caso di $\varepsilon < 1$ e $\delta = 0$ nel caso di $\varepsilon > 1$, si determina un intorno $-\infty$ in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

j) Essendo $f(x) = e^{x+1}$, tale funzione è definita in *R*, pertanto 0 è un punto di accumulazione per *f*, e risulta $\lim_{x\to 0} e^{x+1} = e$ ovvero per la definizione di limite : $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0$, tale che se $x \in R$ e se $0 < |x - x_0| < \delta$ risulta che $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pertanto fissato $\varepsilon > 0$, si ha: $|e^{x+1} - e| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < e^{x+1} - e < \varepsilon \Leftrightarrow \log(e-\varepsilon) - 1 < x < \log(e+\varepsilon) - 1$, ed osservando che $\log(e-\varepsilon) - 1 < \log(e+\varepsilon) - 1$ e che $\log(e-\varepsilon) - 1 < 0$ quindi ponendo $\delta = -(\log(e-\varepsilon) - 1)$, esiste il delta in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

II. Per quanto riguarda i limiti significativi delle seguenti funzioni, si ha:

a) Essendo $f : X \to f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ una funzione razionale, il numeratore è definito $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, +\infty[$, il denominatore $\forall x \in R - \{1\}$, pertanto $X = [-2, +\infty[\cap (R - \{1\}) = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x+2} \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = \sqrt{3}(-\infty) = -\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+2} \lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = \sqrt{3}(+\infty) = +\infty$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 0.$$

b) Essendo $f : X \to f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} \in R$ una funzione razionale, il numeratore è definito $\forall x \in R$, il denominatore, $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ pertanto $X = x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\cap R = x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Quindi i limiti significativi risultano:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1;$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} (x-1) \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = -3(+\infty) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} (x-1) \lim_{x\to2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = 1(+\infty) = +\infty$$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1.$$

c) Essendo $f: X \to f(x) = \log_{1/2} \log_2 x \in R$ una funzione composta della funzione logaritmica, per poter calcolare il $\log_{1/2}$, deve essere $\log_2 x > 0 = \log_2 1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$, e per poter calcolare il $\log_2$, deve essere $x > 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$, e pertanto $X =]1,+\infty[\cap]0,+\infty[\Leftrightarrow X =]1,+\infty[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (\log_{1/2} \log_2 x)$, trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to1^+} \log_2 x = 0$ e conseguentemente $\lim_{y\to0} \log_{1/2} y = +\infty$, quindi $\lim_{x\to1^+} (\log_{1/2} \log_2 x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\log_{1/2} \log_2 x) = -\infty$, in quanto $\lim_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty} \log_{1/2} y = -\infty$.

d) Essendo $f: X \to f(x) = \log_2(x+2) \in R$ una funzione logaritmica, deve essere, $x+2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-2,+\infty[$, pertanto $X =]-2,+\infty[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \log_2(x+2) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log_2(x+2) = +\infty$.

e) Essendo $f: X \to f(x) = 2^{x^2-1} - 3 \in R$ una funzione esponenziale meno una costante, è definita in tutto *R*, pertanto $X = R$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2^{x^2-1} - 3\right) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2^{x^2-1} - 3\right) = +\infty$.

f) Essendo $f: X \to f(x) = \log_{1/5}(1-2^x) \in R$ Essendo una funzione logaritmica, deve essere $1-2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 1 = 2^0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[$, pertanto $X =]-\infty,0[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log_{1/5}(1-2^x) = 0$ e $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \log_{1/5}(1-2^x) = +\infty$.

g) Essendo $f: X \to f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1} \in R$ una funzione logaritmica, deve essere $\frac{x-1}{x+1} > 0$, quindi il numeratore è positivo $x \in]1,+\infty[$ il denominatore è positivo $x \in]-1,+\infty[$, conseguentemente

$\frac{x-1}{x+1}>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$, pertanto $X=\left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\log_2\frac{x-1}{x+1}=0$; $\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\log_2\frac{x-1}{x+1}=+\infty$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\log_2\frac{x-1}{x+1}=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\log_2\frac{x-1}{x+1}=0$.

h) Essendo $f: X \to f(x)=\log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)\in R$ Essendo una funzione logaritmica, deve essere $ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)>0=\arccos(\cos 0)$, quindi $-1\le\log_{1/4}\left(2^x-1\right)<\cos 0=1 \Leftrightarrow -1\cdot\log_{1/4}\frac{1}{4}\le\log_{1/4}\left(2^x-1\right)<1=\log_{1/4}\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<2^x-1\le 4$ infine $\frac{5}{4}<2^x\le5 \Leftrightarrow 2^{\log_2\frac{5}{4}}<2^x\le2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x\in\left]\log_2\frac{5}{4},\log_2 5\right]$, pertanto $X=\left]\log_2\frac{5}{4},\log_2 5\right]$. Quindi il limite significativo risulta: $\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^-}\log ar\cos\log_{1/4}\left(2^x-1\right)=-\infty$.

i) Essendo $f: X \to f(x)=arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)\in R$ una funzione arcotangente definita in *R*, è sufficiente studiare la funzione logaritmica, quindi $3^x-9>0 \Leftrightarrow 3^x>3^2 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in\left]2,+\infty\right[$, pertanto $X=\left]2,+\infty\right[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)=-\frac{\pi}{2}$; e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} arctg\log_{3/2}\left(3^x-9\right)=\frac{\pi}{2}$.

j) Essendo $f: X \to f(x)=arcsen(2x-1)\in R$ una funzione arcoseno, deve essere $-1\le2x-1\le1 \Leftrightarrow 0\le2x\le2 \Leftrightarrow x\in[0,1]$, pertanto $X=[0,1]$. Quindi una funzione continua per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato non ha senso calcolare ulteriori limiti.

k) Essendo $f: X \to f(x)=arcsen\left(2^x-1\right)\in R$ Essendo una funzione arcoseno, deve essere $-1\le2^x-1\le1 \Leftrightarrow 0\le2^x\le2 \Leftrightarrow x\le1$, pertanto $X=\left]-\infty,1\right]$. Quindi il limite significativo risulta: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} arcsen\left(2^x-1\right)=-\frac{\pi}{2}$.

l) Essendo $f: X \to f(x)=ar\cos\left(2-\log_{1/2}(2x+1)\right)\in R$ una funzione arcocoseno, deve essere $-1\le2-\log_{1/2}(2x+1)\le1$, ovvero $-3\le-\log_{1/2}(2x+1)\le-1 \Leftrightarrow \log_{1/2}\frac{1}{2}\le\log_{1/2}(2x+1)\le3\log_{1/2}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\le2x+1\le\frac{1}{2}$, quindi $\frac{1}{8}-1\le2x\le\frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow -\frac{7}{16}\le x\le-\frac{1}{4}$, pertanto $X=\left[-\frac{7}{16},-\frac{1}{4}\right]$. Quindi una funzione continua per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ed essendo definita in un intervallo chiuso e limitato non ha senso calcolare ulteriori limiti.

m) Essendo $f: X \to f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}} \in R$ una funzione radice quadrata, deve essere $\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2} \geq 0$, pertanto il numeratore $x^4-16 \geq 0 \Leftrightarrow x^{2^2}-4^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \cup x \geq 2$, quindi $x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[$; mentre il denominatore risulta $3+2x-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0$, osservando che $\Delta = 16$, si ha $x_{1,2} = \dfrac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$, pertanto il denominatore è positivo $x \in \left]-1,3\right[$, per cui $\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[\right) \cap \left]-1,3\right[= \left[-2,-1\right[\cup \left[2,3\right[$, pertanto $X = \left[-2,-1\right[\cup \left[2,3\right[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}} = +\infty$ e $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{\dfrac{x^4-16}{3+2x-x^2}} = +\infty$.

n) Essendo $f: X \to f(x) = \log_{1/2}(2senx-1) \in R$ una funzione logaritmica, deve essere $2senx - 1 > 0 \Leftrightarrow senx > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow senx > \dfrac{1}{2} = sen\left(arcsen\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > \dfrac{\pi}{6}$, ricordando che la funzione seno è periodica, e che risulta $\dfrac{\pi}{2}$-simmetrica, pertanto $sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = sen\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ e ricordando che $sen\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ per cui $\dfrac{\pi}{2} - x = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ quindi $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi$ conseguentemente $sen\dfrac{\pi}{6} = sen\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{1}{2}$ e tenendo conto che la funzione seno è strettamente crescente in $\left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right[$ per cui $senx > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \dfrac{\pi}{6}$, mentre la funzione seno è strettamente decrescente in $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5}{6}\pi\right[$ per cui $senx > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{6}\pi$, quindi $x \in \left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi\right[$, pertanto $X = \left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi\right[$. Quindi i limiti significativi risultano: $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{6}^+} \log_{1/2}(2senx-1) = +\infty$ e $\lim_{x\to \frac{5}{6}\pi^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{5}{6}\pi^-} \log_{1/2}(2senx-1) = +\infty$.

III. Per i seguenti limiti, si ha:

a) Trattandosi del $\lim_{x\to 0} arcsen\frac{x^4-1}{x^2+1}$, si osserva che $-1\le\frac{x^4-1}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow -1\le x^2-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le x^2\le 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$, pertanto la funzione è regolare nel punto *zero*, e servendosi del teorema sul limite di una funzione composta, risulta: $\lim_{x\to 0} arcsen\frac{x^4-1}{x^2+1}=-\frac{\pi}{2}$.

b) Trattandosi del $\lim_{x\to-\infty} arc\cot g\left(\log_{\frac{2}{3}} e^{x-1}\right)$, si osserva che la funzione arcocotangente è definita in *R*, e per la funzione logaritmica deve essere $e^{x-1}>0 \Leftrightarrow \forall x\in R$, pertanto il dominio *è illimitato*, e servendosi del teorema sul limite di una funzione composta, risulta: $\lim_{x\to-\infty} arc\cot g\left(\log_{\frac{2}{3}} e^{x-1}\right)=0$.

c) Trattandosi del $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x$, si osserva che la funzione $3x^2-3x+1\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in R$ in quanto $\Delta=9-12<0$, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x=+\infty$.

d) Trattandosi del $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x$, si osserva che la funzione $3x^2-3x+1\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in R$ in quanto $\Delta=9-12<0$, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x=+\infty-\infty$, forma indeterminata, pertanto se osserviamo

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2-3x+1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^2-3x+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{3x^2-3x+1}+2x\right)}=\frac{-x^2-3x+1}{\left(\sqrt{3x^2-3x+1}+2x\right)}=\frac{x^2\left(-1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}$$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{\sqrt{3}+2}\lim_{x\to+\infty}x=-\infty.$$

e) Trattandosi del $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x$, si osserva che la funzione $x^2+2x+3\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in R$ in quanto $\Delta=4-12<0$, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=+\infty-\infty$, forma indeterminata, pertanto se osserviamo

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)} = \frac{2x+3}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)} = \frac{x\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}$$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = 1.$$

f) Trattandosi del $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x$, si osserva che la funzione $x^2+2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$ in quanto $\Delta = 4-12<0$, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x = +\infty$.

g) Trattandosi del $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\sqrt{x^2}-x}{2x^2-\sqrt[3]{x}+1}$, si osserva che il numeratore della funzione $2\sqrt{x^2}-x$ è definito $\forall x \in R$ in quanto $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$, così come pure il denominatore, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\sqrt{x^2}-x}{2x^2-\sqrt[3]{x}+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}-1\right)}{x^2\left(2-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}$, ovvero

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}-1\right)}{x\left(2-\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

h) Trattandosi del $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^3-3x+1}-2x$, si osserva che la funzione $3x^3-3x+1$ è definita in R ed ha limite $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3-3x+1\right)=-\infty$ pertanto il dominio della funzione radice dovrà risultare *limitato inferiormente*, e quindi non è possibile effettuare il $\lim\limits_{y\to-\infty}\sqrt{y}$, pertanto $\nexists \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^3-3x+1}-2x$.

i) Trattandosi del $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^3-3x+1}-2x$, il dominio *è illimitato superiormente*, e risulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^3-3x+1}-2x = +\infty-\infty$, forma indeterminata, pertanto se osserviamo

$$\frac{\left(\sqrt{3x^3-3x+1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^3-3x+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{3x^3-3x+1}+2x\right)}=\frac{3x^3-4x^2-3x+1}{\sqrt{3x^3-3x+1}+2x}=\frac{x^3\left(3-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left|x^{\frac{3}{2}}\right|\sqrt{3-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+2x}$$

quindi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{3-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+2x}=\frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}=+\infty$.

IV. Per i seguenti limiti notevoli, si ha:

a) Essendo il $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$, della forma $\frac{arctg\left(f(x)\right)}{f(x)}$ con $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)=0$, pertanto osservando che $\frac{arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}x$; allora

$$\lim_{x\to+\infty} arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}x=\log 3.$$

b) Essendo il $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x}+1}{x+2}$, di una funzione composta, osservando che $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{x+2}=0$; allora $\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x}+1}{x+2}=\frac{\pi}{2}$.

c) Essendo il $\lim\limits_{x\to+\infty} arc\cot g\log_3\frac{x}{x^2-1}$, di una funzione composta, osservando che $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$; allora $\lim\limits_{x\to+\infty} arc\cot g\log_3\frac{x}{x^2-1}=\pi$.

d) Essendo il $\lim_n arctg\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot n$, della forma $\frac{arctg(f(n))}{f(n)}$ con $\lim_n\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)=0$, pertanto osservando che $\frac{arctg\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}\cdot\frac{\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}n$; allora

$$\lim_n arctg\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot n=\lim_n\frac{arctg\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}\cdot\frac{\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}n=\log 3.$$

e) Essendo il $\lim_n arctg\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$, di una funzione composta, osservando che $\lim_n\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}=0$; allora $\lim_n arctg\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}=\frac{\pi}{2}$.

f) Essendo il $\lim_n arc\cot g\log_3\frac{n}{n^2-1}$, di una funzione composta, osservando che $\lim_n\frac{n}{n^2-1}=0$; allora $\lim_n arc\cot g\log_3\frac{n}{n^2-1}=\pi$.

g) Essendo il $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\left(1+arctg\left(2^x-1\right)\right)}{arcsentg\,2x}$, della forma $\frac{\log(1+f(x))}{f(x)}$ ed osservando che $\frac{\log_2\left(1+arctg\left(2^x-1\right)\right)}{arcsentg\,2x}=\frac{\frac{\log_2\left(1+arctg\left(2^x-1\right)\right)}{arctg\left(2^x-1\right)}\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{2^x-1}\frac{\left(2^x-1\right)}{x}x}{\frac{arcsentg\,2x}{tg\,2x}\frac{tg\,2x}{2x}2x}$; allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2\left(1+arctg\left(2^x-1\right)\right)}{arcsentg\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log_2\left(1+arctg\left(2^x-1\right)\right)}{arctg\left(2^x-1\right)}\frac{arctg\left(2^x-1\right)}{2^x-1}\frac{\left(2^x-1\right)}{x}x}{\frac{arcsentg\,2x}{tg\,2x}\frac{tg\,2x}{2x}2x}=\frac{1}{2}.$$

h) Essendo il $\lim_{x\to 0}\frac{\log_{1/3}\left(1+x^3\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3}}{1-\cos 2x^3}$, al numeratore della forma $\frac{\log(1+f(x))}{f(x)}$ e $-\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}$ ed al denominatore $\frac{1-\cos f(x)}{f(x)}$; pertanto

$$\frac{\log_{1/3}\left(1+x^3\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3}}{1-\cos 2x^3}=\frac{\frac{\log_{1/3}\left(1+x^3\right)}{x^3}-\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3}-1\right)}{x^3}x^3}{\frac{1-\cos 2x^3}{\left(2x^3\right)^2}\left(2x^3\right)^2};$$ allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{1/3}\left(1+x^3\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3}}{1-\cos 2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log_{1/3}\left(1+x^3\right)}{x^3}x^3-\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3}-1\right)}{x^3}x^3}{\frac{1-\cos 2x^3}{\left(2x^3\right)^2}4x^6}=\frac{\log_{1/3}e-\log_e 1/2}{4\frac{1}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$$

ed osservando che quest'ultimo limite non esiste in quanto $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ ed $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$

pertanto $\nexists\lim_{x\to 0}\frac{\log_{1/3}\left(1+x^3\right)+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x^3}}{1-\cos 2x^3}$.

i) Essendo il $\lim_{x\to 0}\frac{2^{xarctgx}-1+\log_{1/2}\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos\left(2^{x^3}-1\right)\right)senx}$, al numeratore della forma $\frac{\log\left(1+f(x)\right)}{f(x)}$ e $\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}$ ed al denominatore $\frac{1-\cos f(x)}{f(x)}$; pertanto

$$\frac{2^{xarctgx}-1+\log_{1/2}\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos\left(2^{x^3}-1\right)\right)senx}=\frac{\frac{2^{xarctgx}-1}{xarctgx}x\frac{arctgx}{x}x+\frac{\log_{1/2}\left(1+x^2\right)}{x^2}x^2}{\left(\frac{1-\cos\left(2^{x^3}-1\right)}{\left(2^{x^3}-1\right)^2}\frac{\left(2^{x^3}-1\right)^2}{x^3}x^3\right)\frac{senx}{x}x}$$ allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{xarctgx}-1+\log_{1/2}\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos\left(2^{x^3}-1\right)\right)senx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{xarctgx}-1}{xarctgx}x\frac{arctgx}{x}x+\frac{\log_{1/2}\left(1+x^2\right)}{x^2}x^2}{\left(\frac{1-\cos\left(2^{x^3}-1\right)}{\left(2^{x^3}-1\right)^2}\frac{\left(2^{x^3}-1\right)}{x^3}x^3\frac{\left(2^{x^3}-1\right)}{x^3}x^3\right)\frac{senx}{x}x}$$, ovvero

$\frac{\log 2+\log_{\frac{1}{2}}e}{\frac{1}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^7}$, ed osservando che quest'ultimo limite non esiste in quanto $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^5}=-\infty$ ed $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^5}=+\infty$ pertanto $\nexists\lim_{x\to 0}\frac{2^{xarctgx}-1+\log_{1/2}\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos\left(2^{x^3}-1\right)\right)senx}$.

j) Essendo il $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 3x}+arctg\,2x-tg\left(2^{x^2}-1\right)}{sen\log(1-2xtgx)}$, al numeratore della forma $\frac{1-\cos f(x)}{f(x)}$ e $\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}$ ed al denominatore $\frac{\log(1+f(x))}{f(x)}$; pertanto

$$\frac{\sqrt{1-\cos 3x}+arctg\,2x-tg\left(2^{x^2}-1\right)}{sen\log(1-2xtgx)}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos 3x}{9x^2}}3|x|+\frac{arctg\,2x}{2x}2x-\frac{tg\left(2^{x^2}-1\right)}{\left(2^{x^2}-1\right)}\frac{\left(2^{x^2}-1\right)}{x^2}x^2}{\frac{sen\log(1-2xtgx)}{\log(1-2xtgx)}\frac{\log(1-2xtgx)}{-2xtgx}(-2)x\frac{tgx}{x}x}$$

allora $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\frac{3\frac{\sqrt{2}}{2}+2-x\log 2}{-2\log e}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\frac{3\frac{\sqrt{2}}{2}+2}{-2}=-\infty$, e $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\frac{-3\frac{\sqrt{2}}{2}+2-x\log 2}{-2\log e}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\frac{-3\frac{\sqrt{2}}{2}+2}{-2}=-\infty$ pertanto $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 3x}+arctg\,2x-tg\left(2^{x^2}-1\right)}{sen\log(1-2xtgx)}=-\infty$.

k) Essendo il $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{2x}{x^4-4}$, si osserva che al denominatore $\lim_{x\to\sqrt{2}}x^4-4=0$ ed $x^4-4>0\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$ pertanto $\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{2x}{x^4-4}=2\sqrt{2}(-\infty)$ mentre $\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{2x}{x^4-4}=2\sqrt{2}(+\infty)$ pertanto $\nexists\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{2x}{x^4-4}$.

l) Essendo il $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt[3]{2x}+2x^4}{3x-2x^2+\sqrt{x}}$, osservando che la funzione razionale $\frac{2+\sqrt[3]{2x}+2x^4}{3x-2x^2+\sqrt{x}}=\frac{x^4\left(\frac{2}{x^4}+\frac{\sqrt[3]{2x}}{x^4}+2\right)}{x^2\left(\frac{3}{x}-2+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}$ pertanto $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt[3]{2x}+2x^4}{3x-2x^2+\sqrt{x}}=\frac{2}{-2}\lim_{x\to+\infty}x^2-\infty$ allora

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\frac{3\frac{\sqrt{2}}{2}+2-x\log 2}{-2\log e}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\frac{3\frac{\sqrt{2}}{2}+2}{-2}=-\infty.$$