Esercitazione n. 05 (svolgimento)

I. Essendo $X \subseteq R$ ed $x_0 \in R$, si ha:

a) Si definisce intorno di x_0, e si indica con I_{x_0}, un *qualunque intervallo aperto di centro* x_0. Pertanto $\forall \delta > 0$ si ha: $I_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

b) Si definisce x_0, punto di accumulazione di *X*, se, $\forall \delta > 0$, risulta $(X - \{x_0\}) \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\neq \emptyset$. Ad esempio 0 è un punto di accumulazione per $]0,+\infty[$, in quanto $\forall \delta > 0$ si ha $]0,+\infty[\cap]-\delta,+\delta[\neq \emptyset$.

c) Sia $x_0 \in X$, si definisce x_0, punto isolato di *X*, se non è di accumulazione, ovvero, se, $\exists \delta > 0$, tale che $(X - \{x_0\}) \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[= \emptyset$. Ad esempio 2 è un punto isolato di *N*, in quanto $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ per cui $(N - \{2\}) \cap \left]2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right[= \emptyset$.

II. Essendo $f : X \to R$, $x_0 \in \hat{R}$ ed $l \in \hat{R}$, si ha:

a) Dire che $x_0 \in \hat{R}$, in cui è possibile effettuare il limite su *X*, equivale a dire $\begin{cases} x_0 \in R \\ x_0 = \pm\infty \end{cases}$, nel primo caso equivale a dire che x_0 è *un punto di accumulazione* di *X*, nel secondo caso che *X non è limitata*.

b) Si *definisce* la funzione *f*, regolare in x_0, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

c) Si *definisce* la funzione *f*, divergente in x_0, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

d) Sia $L \in R$, si definisce la funzione *f*, converge in x_0, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall I_L > 0, \exists I_{x_0} / se\, x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I_L$.

e) Si *definisce* la funzione *f*, divergente positivamente in x_0, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists I_{x_0} / se\, x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

III. Per i seguenti limiti, si ha:

a) Essendo $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x+1}$ il limite di una funzione radice, quindi definita $\forall x\in[0,+\infty[$, il dominio risulta $3x+1\in[0,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[$, pertanto *non è possibile* effettuare il limite: $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x+1}$, in quanto il dominio *non è illimitato* inferiormente.

b) Essendo $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x-1}$ il limite di una funzione radice, quindi definita $\forall x\in[0,+\infty[$, il dominio risulta $3x-1\in[0,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato, in quanto il dominio *è illimitato* superiormente. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to+\infty}(3x-1)=+\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x-1}=+\infty$.

c) Essendo $\lim_{x\to0}\log(x+1)$ il limite di una funzione logaritmo, quindi definita $\forall x\in]0,+\infty[$, il dominio risulta $x+1\in]0,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in]-1,+\infty[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto *zero è un punto di accumulazione* per il dominio. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to0}(x+1)=1$ e conseguentemente $\lim_{y\to1}\log y=\log1=0$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to0}\log(x+1)=0$.

d) Essendo $\lim_{x\to-\infty}\log(x-1)$ il limite di una funzione logaritmo, quindi definita $\forall x\in]0,+\infty[$, il dominio risulta $x-1\in]0,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in]1,+\infty[$, pertanto non è possibile effettuare il limite assegnato $\lim_{x\to-\infty}\log(x-1)$, in quanto il dominio *non è illimitato* inferiormente.

e) Essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3-2x^2}$ il limite di una funzione razionale, quindi definita $\forall x\in R$, tranne i punti in cui il denominatore si annulla, è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio *è illimitato* superiormente, e risulta: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

f) Essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4+1}{2x^3-x^2-1}$ il limite di una funzione razionale, quindi definita $\forall x\in R$, tranne i punti in cui il denominatore si annulla, è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio è illimitato inferiormente, e risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^4+1}{2x^3-x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(-2+\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=-\lim_{x\to-\infty}x=+\infty .$$

g) Essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^4+1}}{2x^2-x+1}$ il limite di una funzione composta tra una funzione razionale ed una funzione radice quadrata, quindi definita $\forall x\in[0,+\infty[$, e tranne i punti in cui il denominatore si annulla. Pertanto $2x^4+1\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2\sqrt{2}\right)^2\geq -1 \Leftrightarrow \forall x\in R$, è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio è illimitato superiormente, e risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^4+1}}{2x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{2+\frac{1}{x^4}}}{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

h) Essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x^3-x+1}$ il limite di una funzione composta tra una funzione razionale ed una funzione radice quadrata, quindi definita $\forall x\in[0,+\infty[$, e tranne i punti in cui il denominatore si annulla. Pertanto $2x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in R$, è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio *è illimitato inferiormente*, e risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x^3-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0 .$$

i) Essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x}{\sqrt{2x^2-2}}$ il limite di una funzione composta tra una funzione razionale ed una funzione radice quadrata, quindi definita $\forall x\in\,]0,+\infty[$, in quanto è al denominatore. Per cui $2x^2-2>0 \Leftrightarrow \forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio *è illimitato inferiormente*, e risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2x}{\sqrt{2x^2-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{2}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{2-\frac{2}{x^2}}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{x\to-\infty}x^2=-\infty .$$

j) Essendo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-\sqrt{2x^4}+1}{2x^2-\sqrt{x}-1}$ il limite di una funzione razionale, quindi definita $\forall x\in R$, e tranne nei punti in cui il denominatore si annulla, è possibile pertanto effettuare il limite assegnato in quanto il dominio *è illimitato superiormente*, e risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-\sqrt{2x^4}+1}{2x^2-\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(1-\sqrt{\dfrac{2}{x^4}}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(2-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty.$$

IV. Per i limiti delle seguenti funzioni trigonometriche composte, si ha:

a) Essendo $\lim\limits_{x\to1}arcsen\dfrac{x^2-1}{x+1}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x\in[-1,1]$, deve essere $\dfrac{x^2-1}{x+1}\in[-1,1]$, e tranne nei punti in cui il denominatore si annulla, ovvero $x+1=0\Leftrightarrow x=-1\Leftrightarrow\forall x\in R-\{-1\}$. Pertanto $-1\le\dfrac{x^2-1}{x+1}\le1\Leftrightarrow -x-1\le x^2-1\le x+1\Leftrightarrow -x^2-x\le0\le-x^2+x+2$ ovvero $\begin{cases}-x^2+x+2\ge0\\-x^2-x\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2\le0\\x^2+x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in[-1,2]\\\forall x\in]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[\end{cases}$ e quindi il dominio risulta $\forall x\in(]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[)\cap[-1,2]\cap R-(-1)$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto $1\in[0,2]$, è un punto di accumulazione per il dominio. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to0}arcseny=0$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim\limits_{x\to1}arcsen\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$.

b) Essendo $\lim\limits_{x\to0}arctg\dfrac{1}{x^2}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcotangente è definita $\forall x\in R$, e che la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ e definita $\forall x\in R-\{0\}$, il dominio risulta $\forall x\in R-\{0\}$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto 0 è un punto di accumulazione per il dominio. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty} arctgy=\frac{\pi}{2}$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to 0} arctg\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$.

c) Essendo $\lim_{x\to 0} arc\cot g(\log(x+1))$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arccotangente è definita $\forall x\in R$, e che la funzione $f(x)=\log(x+1)$ e definita $\forall(x+1)\in]0,+\infty[$, il dominio risulta $\forall x\in]-1,+\infty[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto 0 è un punto di accumulazione per il dominio. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to 0}\log(x+1)=0$ e conseguentemente $\lim_{y\to 0} arc\cot gy=\frac{\pi}{2}$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to 0} arc\cot g\log(x+1)=\frac{\pi}{2}$.

d) Essendo $\lim_{x\to 0^+} arc\cot g\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arccotangente è definita $\forall x\in R$, e che la funzione $f(x)=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}$ e definita $\forall e^x\in]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x\in R$, e tranne nel punto in cui $\log_{\frac{1}{2}} e^x=0\Leftrightarrow x=0$, quindi il dominio risulta $\forall x\in R-\{0\}$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto 0 è un punto di accumulazione per il dominio. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}=-\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to-\infty} arc\cot gy=\pi$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to 0^+} arc\cot g\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}=\pi$.

e) Essendo $\lim_{x\to -1}\arccos\sqrt{\log e^{\frac{x+1}{x-1}}}$ il limite di una funzione composta, e, ricordando il dominio della funzione arcocoseno, deve quindi risultare: $\sqrt{\log e^{\frac{x+1}{x-1}}}\in[-1,1]$, ovvero $-1\le\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\le 1$, pertanto si ha $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\le 1\\ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ge -1\Leftrightarrow\forall x\in R\end{cases}$, e conseguentemente per la prima disuguaglianza si ha: $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \le 1 & \text{se } \frac{x+1}{x-1} \ge 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \ge -1 & \text{se } \frac{x+1}{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1-x+1}{x-1} \le 0 & \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[\\ \frac{x+1+x-1}{x-1} \ge 0 & \forall x \in \left]-1,1\right[\end{cases}$,

ovvero $\begin{cases} \frac{2}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,1\right[\text{ e } \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[\\ \frac{2x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,0\right] \cup \left]1,+\infty\right[\text{ e } \forall x \in \left]-1,1\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \\ \frac{2x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,0\right] \end{cases}$.

Inoltre deve essere possibile poter effettuale la radice $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, quindi $\frac{x+1}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[$. In definitiva, escludendo i punti in cui $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, quindi il rapporto sarà possibile $\forall x \in R-\{1\}$, e tenendo conto dell'unione delle due parti che soddisfano il valore assoluto, e quindi la prima disuguaglianza, che integrate con R che soddisfa la seconda disuguaglianza, quindi il dominio della funzione data risulta: $\forall x \in \left]-\infty,0\right] \cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[\right) \cap R-\{1\} \cap R \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right]$. pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto -1 è un punto di accumulazione per il dominio; e trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-1}=0$ e quindi il $\lim_{y\to 0} e^y = 1$, mentre il $\lim_{z\to 1}\log z = 0$ per cui $\lim_{h\to 0}\sqrt{h}=0$ ed infine $\lim_{k\to 0} ar\cos k = \frac{\pi}{2}$ per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to -1}\arccos\sqrt{\log e^{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{\pi}{2}$.

V. Per i seguenti limiti, si ha:

a) Essendo il $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-1}{x^2-1}=1$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_1 > 0, \exists I_0 / se\, x \in (X-\{0\}) \cap I_0 : f(x) \in I_1$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_0$ per cui se $f(x) \in I_1$, ovvero $\left|\frac{x^4-1}{x^2-1}-1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2(x^2-1)}{x^2-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x^2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon$ quindi $\Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}\right[$, pertanto ponendo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ si è individuato un intorno di zero, quindi il limite è corretto.

b) Essendo il $\lim_{x\to 0}\log(x+1)=0$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_0 > 0, \exists I_0 / se\, x \in (X-\{0\}) \cap I_0 : f(x) \in I_0$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_0$ per cui se

$f\left(x\right)\in I_0$, ovvero $\left|\log(x+1)\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases}\log(x+1)<\varepsilon \\ \log(x+1)>-\varepsilon\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<e^{\varepsilon}-1 \\ x>e^{-\varepsilon}-1\end{cases}$, pertanto essendo $e^{\varepsilon}-1>0$ e $\frac{1}{e^{\varepsilon}}-1<0$, verifichiamo quale dei due valori è minore, $\left|e^{\varepsilon}-1\right|>\left|e^{-\varepsilon}-1\right|$ quindi $e^{\varepsilon}-1>1-\frac{1}{e^{\in}} \Leftrightarrow e^{\varepsilon}-1>\frac{e^{\in}-1}{e^{\in}} \Leftrightarrow 1>\frac{1}{e^{\in}} \Leftrightarrow e^{\in}>1$; pertanto poniamo $\delta=1-\frac{1}{e^{\varepsilon}}$ si è individuato un intorno di zero, $I_0=\left]-\left(1-\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right),1-\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right[$ pertanto il limite è corretto.

c) Essendo il $\lim\limits_{x\to 0}\log|x|=-\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{-\infty}>0, \exists I_0 \,/\, se\, x\in\left(X-\{0\}\right)\cap I_0 : f\left(x\right)\in I_{-\infty}$. Pertanto $\forall\varepsilon>0$, deve $\exists I_0$ per cui se $f\left(x\right)\in I_{-\infty} \Leftrightarrow f\left(x\right)<-\varepsilon$, ovvero $\log|x|<-\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{e^{\varepsilon}} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{e^{\varepsilon}} \\ x>-\frac{1}{e^{\varepsilon}}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{1}{e^{\varepsilon}},\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right[$ quindi ponendo $\delta=\frac{1}{e^{\varepsilon}}$ si è quindi individuato un intorno di zero, pertanto il limite è corretto.

d) Essendo il $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(x+1)=+\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{+\infty}>0, \exists I_{+\infty} \,/\, se\, x\in X\cap I_{+\infty} : f\left(x\right)\in I_{+\infty}$. Pertanto $\forall\varepsilon>0$, deve $\exists I_{+\infty}$ per cui se $f\left(x\right)\in I_{+\infty} \Leftrightarrow f\left(x\right)>\varepsilon$, ovvero $\log(x+1)>\varepsilon \Leftrightarrow x+1>e^{\varepsilon} \Leftrightarrow x>e^{\varepsilon}-1$, pertanto ponendo $\delta=e^{\varepsilon}-1$ si è quindi individuato un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è corretto.

e) Essendo il $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{2}}\left(2x+1\right)=-\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{-\infty}, \exists I_{+\infty} \,/\, se\, x\in X\cap I_{+\infty} : f\left(x\right)\in I_{-\infty}$. Pertanto $\forall\varepsilon>0$, deve $\exists I_{+\infty}$ per cui se $f\left(x\right)\in I_{-\infty} \Leftrightarrow f\left(x\right)<-\varepsilon$, ovvero $\log_{\frac{1}{2}}\left(2x+1\right)<-\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\left(2^{\varepsilon}-1\right)$, pertanto ponendo $\delta=\frac{2^{\varepsilon}-1}{2}$ si è quindi individuato un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è corretto.

f) Essendo il $\lim\limits_{x\to-1}\log(x+1)=-\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{-\infty}, \exists I_{-1^+} \,/\, se\, x\in\left(X-\{-1\}\right)\cap I_{-1^+} : f\left(x\right)\in I_{-\infty}$. Pertanto $\forall\varepsilon>0$, deve $\exists I_{-1^+}$ per cui se $f\left(x\right)\in I_{-\infty} \Leftrightarrow f\left(x\right)<-\varepsilon$, ovvero $\log(x+1)<-\varepsilon \Leftrightarrow x<\frac{1}{e^{\varepsilon}}-1$, pertanto ponendo $\delta=\frac{1}{e^{\varepsilon}}$ si è quindi individuato un intorno destro di -1, ovvero $I_{-1^+}=\left]-1,-1+\frac{1}{e^{\varepsilon}}\right[$, pertanto il limite è corretto.

g) Essendo il $\lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_0 > 0, \exists I_{-\infty} \,/\, se\, x \in X \cap I_{-\infty} : f(x) \in I_0$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_{-\infty}$ per cui se $f(x) \in I_0 \Leftrightarrow |f(x)| < \varepsilon$, ovvero $\left|e^{x-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} < \varepsilon \\ e^{x-1} > -\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log\varepsilon + 1 \\ \forall x \in R \end{cases}$, pertanto con $\varepsilon < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \log\varepsilon + 1 < 0$ e ponendo $\delta = -(\log\varepsilon + 1)$ si è quindi individuato un intorno di $-\infty$, pertanto il limite è corretto.

h) Essendo il $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x+1}} = 0$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_0 > 0, \exists I_{+\infty} \,/\, se\, x \in X \cap I_{+\infty} : f(x) \in I_0$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_{+\infty}$ per cui se $f(x) \in I_0 \Leftrightarrow |f(x)| < \varepsilon$, ovvero $\left|\frac{1}{e^{x+1}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{e^{x+1}} < \varepsilon \\ \frac{1}{e^{x+1}} > -\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} < e^{x+1} \\ \forall x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log\frac{1}{\varepsilon} - 1 < x \\ \forall x \in R \end{cases}$, pertanto con $\varepsilon < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \log\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$ e ponendo $\delta = \log\frac{1}{\varepsilon} - 1$ si è quindi individuato un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è corretto.

i) Essendo il $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{-\infty}, \exists I_{-\infty} \,/\, se\, x \in X \cap I : f(x) \in I_{-\infty}$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_{-\infty}$ per cui se $f(x) \in I_{-\infty} \Leftrightarrow f(x) < -\varepsilon$, ovvero $\sqrt[3]{x-1} < -\varepsilon \Leftrightarrow x < -(\varepsilon^3 - 1)$, pertanto con $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \varepsilon^3 - 1 > 0$ e ponendo $\delta = \varepsilon^3 - 1$ si è quindi individuato un intorno destro di $-\infty$, pertanto il limite è corretto.

j) Essendo il $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = +\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{+\infty} > 0, \exists I_{-\infty} \,/\, se\, x \in X \cap I_{-\infty} : f(x) \in I_{+\infty}$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_{-\infty}$ per cui se $f(x) \in I_{+\infty} \Leftrightarrow f(x) > \varepsilon$, ovvero $\left(\frac{3}{4}\right)^x > \varepsilon \Leftrightarrow x < \log_{\frac{3}{4}} \varepsilon$, pertanto con $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{3}{4}} \varepsilon < 0$ e ponendo $\delta = -\log_{\frac{3}{4}} \varepsilon$ si è quindi individuato un intorno destro di $-\infty$, pertanto il limite è corretto.

k) Essendo il $\lim_{x\to-1} \frac{1}{|x+1|} = +\infty$, per la definizione di limite equivalentemente si ha: $\forall I_{+\infty} > 0, \exists I_{-1} \,/\, se\, x \in (X - \{-1\}) \cap I_{-1} : f(x) \in I_{+\infty}$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists I_{-1}$ per cui se

$f(x) \in I_{+\infty} \Leftrightarrow f(x) > \varepsilon$, ovvero $\frac{1}{|x+1|} > \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} > |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{\varepsilon} - 1 \\ x > -\frac{1}{\varepsilon} - 1 \end{cases}$, quindi $-1-\frac{1}{\varepsilon} < x < -1+\frac{1}{\varepsilon}$ e pertanto ponendo $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ si è quindi individuato un intorno di -1, pertanto il limite è corretto.