Esercitazione n. 04 (svolgimento)

I. Essendo $f :]0,2] \to \begin{cases} 2x-1 \text{ se } x \in]0,1] \\ x+1 \text{ se } x \in]1,2] \end{cases}$**, si ha:**

a) Si osserva che la funzione è crescente nei due tratti, pertanto osserviamo cosa succede in un intorno del punto 1; e se per esempio consideriamo $x_1 = 1$ ed $x_2 = 1{,}01$ risulta $f(1) = 1$ ed $f(1{,}01) = 2{,}01$, quindi crescente, in quanto una funzione si definisce tale se $\forall x_1, x_2 \in]0,2]$, con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) \le f(x_2)$, ed osservando che è possibile replicare il ragionamento $\forall x_1, x_2 \in]0,2]$, la funzione *f risulta crescente*.

b) Una funzione si definisce convessa, se risulta definita in un intervallo, e lo è, ed inoltre, se $\forall a,b \in]0,2]$, con $a < b$ e $\forall x \in]a,b[$ risulta $f(x) \le \frac{f(a) - f(b)}{a-b}(x-b) + f(b)$, quindi il valore della funzione risulta non superiore alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ma la funzione assegnata è l'unione di due rette, *spezzate*, e con *coefficienti angolari diversi*, quindi non sempre rispetta la disuguaglianza di cui sopra, pertanto la funzione *f non è convessa*. Oppure se si considera il teorema sulla convessità, si osserva che $f(]0,2]) =]-1,1] \cup]2,3]$, quindi non siamo di fronte ad un intervallo, pertanto *non possiamo parlare di convessità*.

II. Essendo $f : \to \begin{cases} -2x+1 \text{ se } x \in]0,1] \\ -\frac{x}{2} - 1 \text{ se } x \in]1,2] \end{cases}$**, si ha:**

a) Si osserva che la funzione è strettamente decrescente nei due tratti, pertanto osserviamo cosa succede in un intorno del punto 1; e se per esempio consideriamo $x_1 = 1$ ed $x_2 = 1{,}01$ risulta $f(1) = -1$ ed $f(1{,}01) = -\frac{3{,}01}{2}$, quindi strettamente decrescente, in quanto una funzione si definisce tale se $\forall x_1, x_2 \in]0,2]$, con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$, ed osservando che è possibile replicare il ragionamento $\forall x_1, x_2 \in]0,2]$, la funzione *f risulta strettamente decrescente*.

b) Una funzione si definisce strettamente concava, se risulta definita in un intervallo, e lo è, ed inoltre, se $\forall a,b \in]0,2]$, con $a<b$ e $\forall x \in]a,b[$ risulta $f(x) > \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b)+f(b)$, quindi il valore della funzione risulta superiore alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ma la funzione assegnata è l'unione di due rette, *spezzate*, e con *coefficienti angolari diversi*, quindi non sempre rispetta la disuguaglianza di cui sopra, pertanto la funzione *f non è strettamente concava*. Oppure se si considera il teorema sulla convessità, si osserva che $f(]0,2]) = \left[-2,-\frac{3}{2}\right[\cup [-1,1[$, quindi non siamo di fronte ad un intervallo, pertanto *non possiamo parlare di stretta concavità*.

III. Essendo $f: R \to R$ con $f(x) = -2x+1$, si ha:

a) La retta *s* parallela alla funzione data, avrà stesso coefficiente angolare, ed inoltre, sapendo che l'equazione di una retta passante per il punto di coordinate (x_0, y_0), è data dall'equazione $y = a(x-x_0)+y_0$, la retta *s, risulta*: $y=-2(x-0)+0 \Leftrightarrow y=-2x$.

b) Una retta *r*, perpendicolare alla funzione data avrà coefficiente angolare pari all'opposto del reciproco di questa, pertanto la retta *r, risulta*: $y=\frac{1}{2}x$.

c) Una generica retta, parallela alla funzione data è: $y=-2x+c$. Pertanto individuato un generico punto (x_0, y_0) sulla funzione data, è sufficiente porre pari a 2, la distanza di tale punto da *t* ed individuare *c*. Quindi preso il punto $(1,-1)$ sulla funzione data, si ha: $d(t,(1,-1)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2\cdot 1+(-1\cdot -1)+c|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|-1+c|}{\sqrt{5}} = 2 \Leftrightarrow |-1+c| = 2\sqrt{5}$, ovvero $-1+c=\pm 2\sqrt{5} \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{5}+1$, quindi *t risulta*: $y=-2x+1\pm 2\sqrt{5}$. Possiamo inoltre verificare, che la distanza tra il punto $A=\left(1,-1+2\sqrt{5}\right)$ della retta *t*, e la funzione *f*, ovvero, $d(f,A) = \frac{\left|-2(1)+(-1)\left(-1+2\sqrt{5}\right)+1\right|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow d(f,A) = \frac{\left|-1-2\sqrt{5}+1\right|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow d(f,A)=2$ che risulta appunto corretta.

d) *Una* retta perpendicolare alla funzione data, è $y=\frac{1}{2}x$. Per cui *la retta q*, perpendicolare alla funzione data, e passante per $P=(1,0)$, *risulta* : $y=\frac{1}{2}(x-1)+0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

e) La retta p avrà equazione $\frac{-2-1}{y-1}=\frac{1-0}{x-0} \Leftrightarrow -3x=y-1 \Leftrightarrow y=-3x+1$, per cui è ora necessario risolvere il seguente sistema $\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, quindi la retta p ha un unico punto in comune con la retta data, e risulta: $(0,1)$.

f) Il punto di intersezione della retta p con le ordinate risulta $(0,1)$, mentre la funzione data si annulla nel punto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)$. Pertanto la distanza cercata risulta: $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

IV. Essendo $f:]0,2]\to \begin{cases} \log x & \text{se } x\in]0,1] \\ x+1 & \text{se } x\in]1,2] \end{cases}$, si ha:

a) Essendo f composta da due funzioni invertibili, operando una riduzione ad $f(]0,2])=]-\infty,0]\cup]2,3]$, la funzione $f_\#$ è invertibile e risulta $f^{-1}:]-\infty,0]\cup]2,3]\to \begin{cases} e^y & \text{se } y\in]-\infty,0] \\ y-1 & \text{se } y\in]2,3] \end{cases}$.

b) Essendo $f^{-1}(]-\infty,0]\cup]2,3])=]0,2]$, la funzione f^{-1} risulta quindi *limitata*, in quanto appunto $]0,2]$ è limitato.

c) Essendo $f(]0,2])=]-\infty,0]\cup]2,3]$, la funzione f *non risulta* dotata di minimo in quanto appunto $]-\infty,0]\cup]2,3]$ non risulta dotato di minimo.

V. Essendo $f:]0,4]\to R$ con $f(x)=e^{x-1}$, si ha:

a) Una funzione si definisce strettamente crescente se $\forall x_1,x_2\in]0,4]$, con $x_1<x_2$ risulta $f(x_1)<f(x_2)$; pertanto se poniamo $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}\Leftrightarrow \log e^{x_1-1}<\log e^{x_2-1}\Leftrightarrow x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow x_1<x_2$, quindi strettamente crescente, ed osservando che è possibile replicare il ragionamento $\forall x_1,x_2\in]0,4]$, la funzione f *risulta strettamente crescente*.

b) Essendo $f(]0,4]) = \left]\frac{1}{e}, e^3\right]$ un intervallo, ed essendo monotona, per il teorema sulle convessità, *f* è strettamente convessa ovvero, in modo equivalente $\forall a,b \in]0,4]$ e con $a < b$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Se poniamo $a = x$ e $b = y$, risulta $e^{\frac{x-1+y-1}{2}} < \frac{e^{x-1}+e^{y-1}}{2}$, ovvero $2\left(e^{\frac{x-1}{2}} \cdot e^{\frac{y-1}{2}}\right) < e^{x-1} + e^{y-1} \Leftrightarrow e^{x-1} + e^{y-1} - 2\left(e^{\frac{x-1}{2}} e^{\frac{y-1}{2}}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x-1}{2}} - e^{\frac{y-1}{2}}\right)^2 > 0$ che risulta quindi vero, pertanto la funzione *f è strettamente convessa*.

c) Essendo $f(]0,4]) = \left]\frac{1}{e}, e^3\right]$ la funzione *f è dotata di massimo*, in quanto, appunto, $\left]\frac{1}{e}, e^3\right]$ è dotato di massimo.

d) La funzione esponenziale è invertibile, nel suo codominio, pertanto applicando una opportuna riduzione a questo, ovvero ad $f(]0,4]) = \left]\frac{1}{e}, e^3\right]$, la funzione $f_\#$ *risulta invertibile*.

e) La relativa *funzione inversa risulta*: $f^{-1} : \forall y \in \left]\frac{1}{e}, e^3\right] \to f^{-1}(y) \in]0,4]$ con $f^{-1}(y) = \log(y) + 1$.

VI. Gli insiemi di definizioni delle seguenti funzioni elementari composte, risultano:

a) Essendo $f_1(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$ una funzione composta razionale, il suo dominio escluderà i punti in cui $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, pertanto il rapporto sarà possibile $\forall x \in R - \{-1\}$; inoltre al numeratore, la funzione radice quadrata è definita in $[0,+\infty[$ per cui per $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, in definitiva il rispetto delle due condizioni, porta alla seguente intersezione: $\forall x \in (]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[) \cap \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, quindi il dominio risulta: $f_1 : \forall x \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\to f_1(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1} \in R$.

b) Essendo $f_2(x) = \frac{\sqrt{e^{2x+1}}}{x-1}$ una funzione composta razionale, il suo dominio escluderà i punti in cui $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, pertanto il rapporto sarà possibile $\forall x \in R - \{1\}$, inoltre al numeratore, la funzione radice quadrata è definita in $[0,+\infty[$ per cui per $e^{2x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$, in quanto la funzione esponenziale assume sempre valori positivi, in definitiva il rispetto delle due condizioni, porta alla seguente intersezione: $\forall x \in (]-\infty,1[\cup]1,+\infty[) \cap R \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, quindi il dominio risulta: $f_1 : \forall x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\to f_2(x) = \dfrac{\sqrt{e^{2x+1}}}{x-1} \in R$.

c) Essendo $f_3(x) = \log\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x-1}}$ una funzione composta, ed essendo la funzione logaritmo definita in $]0,+\infty[$, bisogna porre $\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x-1}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{x-1} > 0$. Iniziamo ad escludere i punti in cui $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, pertanto il rapporto sarà possibile $\forall x \in R-\{1\}$, inoltre se consideriamo il segno del denominatore $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ e conseguentemente sarà $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, mentre per il numeratore $x^2-2x>0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ e conseguentemente sarà $x^2-2x<0 \Leftrightarrow x \in]0,2[$; pertanto mettendo in rapporto i segni del numeratore e del denominatore risulta $\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x-1}} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$. In definitiva il rispetto delle due condizioni, porta alla seguente intersezione: $\forall x \in (]0,1[\cup]2,+\infty[) \cap R-\{1\} \Leftrightarrow \forall x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$, quindi il dominio risulta: $f_3 : \forall x \in]0,1[\cup]2,+\infty[\to f_3(x) = \log\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x-1}} \in R$.

d) Essendo $f_4(x) = \log_{\frac{3}{4}} \log\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ una funzione composta, ed essendo la funzione logaritmo in particolare la funzione $\log_{\frac{3}{4}} x$ definita in $]0,+\infty[$, bisogna porre $\log\dfrac{x^2+x-1}{x+1} > 0 = \log 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-1}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-1}{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2}{x+1} > 0$. Iniziamo ad escludere i punti in cui $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, pertanto il rapporto sarà possibile $\forall x \in R-\{-1\}$, inoltre considerando il segno del denominatore, $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ e conseguentemente sarà $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$, mentre per il numeratore $x^2-2>0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$; quindi mettendo in rapporto i segni del numeratore e del denominatore risulta $\dfrac{x^2-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\sqrt{2},-1[\cup]\sqrt{2},+\infty[\cap R-\{-1\} \Leftrightarrow \forall x \in]-\sqrt{2},-1[\cup]\sqrt{2},+\infty[$. Infine bisogna poter calcolare anche la seconda funzione *log*, pertanto bisogna porre $\dfrac{x^2+x-1}{x+1} > 0$, per cui per il denominatore valgono le stesse osservazioni fatte sopra mentre per il numeratore si ha $x^2+x-1>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$ quindi mettendo in rapporto i segni del numeratore e del denominatore risulta $\frac{x^2+x-1}{x+1}>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$. Tenendo quindi conto dell'intersezione dei domini dei due *log*, si ha in definitiva il dominio della funzione assegnata, che risulta: $f_4 : \forall x \in \left]-\sqrt{2},-1\right[\cup \left]\sqrt{2},+\infty\right[\rightarrow f_4(x)=\log_{\frac{3}{4}}\log\frac{x^2+x-1}{x+1} \in R$.

e) Essendo $f_5(x)=\log\log_{\frac{1}{2}} e^{x^2+x}$ una funzione composta, ed essendo la funzione logaritmo definita in $\left]0,+\infty\right[$, bisogna porre $\log_{\frac{1}{2}} e^{x^2+x}>0=\log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow e^{x^2+x}<1=e^0 \Leftrightarrow x^2+x<0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,0\right[$, quindi il dominio risulta: $f_5 : \forall x \in \left]-1,0\right[\rightarrow f_5(x)=\log\log_{\frac{1}{2}} e^{x^2+x} \in R$.

f) Essendo $f_6(x)=\sqrt{\frac{x^2-2}{x+1}}$ una funzione composta, ed essendo la funzione radice quadrata definita in $\left[0,+\infty\right[$, bisogna porre $\frac{x^2-2}{x+1}\geq 0$. Iniziamo ad escludere i punti in cui $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, pertanto il rapporto sarà possibile $\forall x \in R-\{-1\}$, inoltre se consideriamo il segno del denominatore $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ e conseguentemente sarà $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$, mentre per il numeratore $x^2-2\geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},+\infty\right[$ e conseguentemente sarà $x^2-2<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$; pertanto mettendo in rapporto i segni del numeratore e del denominatore risulta $\frac{x^2-2}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left[-\sqrt{2},-1\right[\cup \left[\sqrt{2},+\infty\right[$; quindi il dominio risulta: $f_6 : \forall x \in \left[-\sqrt{2},-1\right[\cup \left[\sqrt{2},+\infty\right[\rightarrow f_6(x)=\sqrt{\frac{x^2-2}{x+1}} \in R$.

g) Essendo $f_7(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x-1}{x+2}}$ una funzione composta, ed essendo la funzione radice quadrata definita in $\left[0,+\infty\right[$, bisogna porre $\frac{x^2-3x-1}{x+2}\geq 0$. Iniziamo ad escludere i punti in cui $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, pertanto il rapporto sarà possibile $\forall x \in R-\{-2\}$, inoltre se consideriamo il segno del denominatore $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ e conseguentemente sarà $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$, mentre per il numeratore

$x^2-3x-1\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in \left]-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$ e conseguentemente sarà $x^2-3x-1<0 \Leftrightarrow \forall x\in \left]\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$; pertanto mettendo in rapporto i segni del numeratore e del denominatore risulta $\frac{x^2-3x-1}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in \left]-2,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$; quindi il dominio risulta: $f_7:\forall x\in \left]-2,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right[\rightarrow f_7(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x-1}{x+2}}\in R$.

VII. Gli insiemi di definizioni delle seguenti funzioni trigonometriche composte, risultano:

a) Essendo $f_1(x)=arcsen\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$ una funzione composta, e, ricordando il dominio della funzione arcoseno, deve risultare: $\frac{x^2-1}{x+1}\in[-1,1]$, ovvero $-1\leq\frac{x^2-1}{x+1}\leq 1 \Leftrightarrow -x-1\leq x^2-1\leq x+1 \Leftrightarrow -x-x^2\leq 0\leq -x^2+x+2$, pertanto si ha $\begin{cases}-x^2+x+2\geq 0\\ -x^2-x\leq 0\end{cases}$. Considerando ora la prima disuguaglianza, si ha: $-x^2+x+2\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0 \Leftrightarrow \forall x\in[-1,2]$; mentre per la seconda disuguaglianza, si ha: $-x^2-x\leq 0 \Leftrightarrow x^2+x\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,+\infty\right[$. In definitiva, escludendo i punti in cui $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, quindi il rapporto sarà possibile $\forall x\in R-\{-1\}$, e tenendo conto dell'intersezione delle due parti che soddisfano le due disuguaglianze, risulta: $\frac{x^2-1}{x+1}\in[-1,1] \Leftrightarrow \forall x\in[0,2]$, quindi *il dominio della funzione data risulta*: $f_1:\forall x\in[0,2]\rightarrow f_1(x)=arcsen\frac{x^2-1}{x+1}\in R$.

b) Essendo $f_2(x)=arctg(arcsen(x))-1$ una funzione composta, e, ricordando che il dominio della funzione arcotangente è tutto *R*, e la funzione arcoseno è definita $\forall x\in[-1,1]$; il dominio della funzione data, risulta quindi $\forall x\in R\cap[-1,1] \Leftrightarrow \forall x\in[-1,1]$, ovvero: $f_2:\forall x\in[-1,1]\rightarrow f_2(x)=arctg(arcsen(x))-1\in R$.

c) Essendo $f_3(x)=arc\cot g(\log(x+1))$ una funzione composta, e, ricordando che il dominio della funzione arccotangente è tutto *R*, e la funzione logaritmo è definita $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$, quindi $x+1 \in \left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$ il dominio della funzione data, risulta quindi $\forall x \in R \cap \left]-1,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,+\infty\right[$, ovvero: $f_3 : \forall x \in \left]-1,+\infty\right[\to f_3(x)=arc\cot g \log(x+1) \in R$.

d) Essendo $f_4(x)=arc\cot g\left(\log_{\frac{1}{2}} e^{x+1}\right)$ una funzione composta, e, ricordando che il dominio della funzione arccotangente è tutto *R*, e la funzione logaritmo è definita $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$, quindi $e^{x+1} \in \left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in R$ in quanto la funzione esponenziale assume sempre valori positivi, pertanto il dominio della funzione data, risulta $\forall x \in R \cap R \Leftrightarrow \forall x \in R$, quindi: $f_4 : \forall x \in R \to f_4(x)=arc\cot\left(g \log_{\frac{1}{2}} e^{x+1}\right) \in R$.

e) Data la funzione $f_5(x)=\arccos\sqrt{\log e^{\frac{x+1}{x-1}}}$, il dominio della funzione arcocoseno, deve quindi risultare: $\sqrt{\log e^{\frac{x+1}{x-1}}} \in [-1,1]$, ovvero $-1 \le \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \le 1$, pertanto si ha $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le 1 \\ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \ge -1 \Leftrightarrow \forall x \in R \end{cases}$, e conseguentemente per la prima disuguaglianza si ha:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \le 1 \quad \text{se } \frac{x+1}{x-1} \ge 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \ge -1 \ \text{se } \frac{x+1}{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1-x+1}{x-1} \le 0 \quad \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[\\ \frac{x+1+x-1}{x-1} \ge 0 \quad \forall x \in \left]-1,1\right[\end{cases},$$ ovvero

$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,1\right[\text{ e } \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[\\ \frac{2x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,0\right] \cup \left]1,+\infty\right[\text{e } \forall x \in \left]-1,1\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \\ \frac{2x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,0\right] \end{cases}.$$ Inoltre

deve essere possibile poter effettuale la radice $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, quindi $\frac{x+1}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left]1,+\infty\right[$. In definitiva, escludendo i punti in cui $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, quindi il rapporto sarà possibile $\forall x \in R-\{1\}$; pertanto tenendo conto dell'unione delle due parti che soddisfano il valore assoluto, della seconda disuguaglianza della radice e della condizione di positività del radicando, il dominio della funzione data risulta: $\forall x \in (]-\infty,-1] \cup]-1,0]) \cap (]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[) \cap R - \{1\} \cap R \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1]$,

pertanto $f_5 : \forall x \in]-\infty,-1] \to f_5(x) = \arccos\sqrt{\log e^{\frac{x+1}{x-1}}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

f) Data la funzione $f_6(x) = \arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}$ e tenendo conto del dominio della funzione arcocoseno, deve quindi risultare: $\frac{x^2-1}{x^2+1} \in [-1,1]$, ovvero $-x^2 - x^2 \le 0 \le -x^2 + x^2 + 2$, pertanto si ha $\begin{cases} 2 \ge 0 \\ -2x^2 \le 0 \Leftrightarrow 2x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in R \\ \forall x \in R \end{cases}$, e tenendo conto che $x^2 + 1 \ne 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$, l'intersezione delle due parti che soddisfano le due disequazioni e l'esistenza del denominatore risultano: $\forall x \in R \cup R \cap R$, pertanto $f_6 : \forall x \in R \to f_6(x) = \arccos\frac{x^2-1}{x^2+1} \in [0,\pi]$.

g) Data la funzione $f_7(x) = \arccos\frac{2x}{x^2+1}$ e tenendo conto del dominio della funzione arcocoseno, deve quindi risultare: $\frac{2x}{x^2+1} \in [-1,1]$, ovvero $-x^2 - 2x^2 - 1 \le 0 \le x^2 - 2x + 1$, pertanto si ha $\begin{cases} x^2 - 2x^2 + 1 \ge 0 \\ -x^2 - 2x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \Leftrightarrow \forall x \in R \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow \forall x \in R \end{cases}$, e tenendo conto che $x^2 + 1 \ne 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$, l'intersezione delle due parti che soddisfano le due disequazioni e l'esistenza del denominatore risultano: $\forall x \in R \cup R \cap R$, pertanto $f_7 : \forall x \in R \to f_7(x) = \arccos\frac{2x}{x^2+1} \in [0,\pi]$.

h) Data la funzione $f_8(x) = arcsen\frac{1}{1-|x|}$ e tenendo conto del dominio della funzione arcoseno, deve quindi risultare: $\frac{1}{1-|x|} \in [-1,1] \Leftrightarrow \left|\frac{1}{1-|x|}\right| \le 1$, ovvero $\left|1-|x|\right| \ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-|x| \ge 1 & \text{se} 1-|x| \ge 0 \\ 1-|x| \le -1 & \text{se} 1-|x| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 0 & \text{se } x \in [-1,1] \\ |x| \ge 2 & \text{se } x \in -[-1,1] \end{cases}$ quindi $\begin{cases} x \in [-1,1] \cap \{0\} \\ x \in -[-1,1] \cap (]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[) \end{cases}$, pertanto tenendo conto che tale risultato include la condizione iniziale, e che si tratta di una disuguaglianza della stessa funzione, $|x|$, il dominio risulta: $\forall x \in (]-\infty,-2] \cup \{0\} \cup [2,+\infty[)$, pertanto $f_8 : \forall x \in (]-\infty,-2] \cup \{0\} \cup [2,+\infty[) \to f_8(x) = arcsen\frac{1}{1-|x|} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

i) Data la funzione $f_9(x)=\arccos\frac{1-x}{1+|x|}$ e tenendo conto del dominio della funzione arcocoseno, deve quindi risultare: $\frac{1-x}{1+|x|}\in[-1,1]$, ovvero

$$\begin{cases}1-x\le 1+|x|\\1-x\ge -1-|x|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+|x|\ge 0\\x-|x|\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}2x\ge 0 \text{ se } x\in[0,+\infty[\\0\ge 0 \text{ se } x\in]-\infty,0[\end{cases}\\\begin{cases}0\le 2 \text{ se } x\in[0,+\infty[\\2x\le 2 \text{ se } x\in]-\infty,0[\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\{\forall x\in R\\\begin{cases}0\le 2 \text{ se } x\in[0,+\infty[\\x\le 1 \text{ se } x\in]-\infty,0[\cap]-\infty,1]\end{cases}\end{cases}$$

quindi $\begin{cases}\forall x\in R\\\forall x\in R\end{cases}$, e tenendo conto che $1+|x|\ne 0\Leftrightarrow |x|\ne -1\Leftrightarrow \forall x\in R$, l'intersezione delle due parti che soddisfano le due disequazioni e l'esistenza del denominatore risultano: $\forall x\in R\cap R$, pertanto $f_9:\forall x\in R\to f_9(x)=\arccos\frac{1-x}{1+|x|}\in[0,\pi]$.

j) Data la funzione $f_{10}(x)=arcsen\frac{x^2-1}{x-1}$ e tenendo conto del dominio della funzione arcoseno, deve quindi risultare: $\frac{x^2-1}{x-1}\in[-1,1]$, ovvero

$$\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}\le 1\\\frac{x^2-1}{x-1}\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2-x}{x-1}\le 0\\\frac{x^2+x-2}{x-1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in]-\infty,0]\\\forall x\in[-2+\infty[\end{cases}$$, e tenendo conto che $x-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne 1$

, l'intersezione delle due parti che soddisfano le due disequazioni e l'esistenza del denominatore risultano: $\forall x\in]-\infty,0]\cap[-2+\infty[-\{1\}$; oppure se si osserva che $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=(x+1)$, quindi $(x+1)\in[-1,1]\Leftrightarrow x\in[-2,0]$; oppure $\frac{x^2-1}{x-1}\in[-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1\ge x-1\\x^2-1\le -x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-1)\ge 0\\x^2+x-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\\\forall x\in[-2,1]\end{cases}$, e quindi tenendo conto che $x-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne 1$, l'intersezione delle due parti che soddisfano le due disequazioni e l'esistenza del denominatore risultano: $\forall x\in(]-\infty,0]\cup[1+\infty[)\cap[-2,1]-\{1\}$ pertanto $f_{10}:\forall x\in[-2,0]\to f_{10}(x)=arcsen\frac{x^2-1}{x-1}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

VIII. Essendo le funzioni reali: $f:[0,3[\to f(x)=\frac{x}{2}+1$**, e** $g:]-1,1[\cup]1,2]\to g(x)=\frac{1}{x-1}$**, si ha:**

a) La funzione $f+g$ è definita nell'insieme, intersezione dei due domini ed associa $f(x)+g(x)$, per cui, essendo $[0,3[\cap(]-1,1[\cup]1,2])=[0,1[\cup]1,2]$ si ha: $f+g:[0,2]-\{1\}\to R$ ovvero $f+g:\forall x\in[0,1[\cup]1,2]\to\dfrac{x^2+x}{2x-2}\in R$.

b) La funzione $f\cdot g$ è definita nell'insieme, intersezione dei due domini ed associa $f(x)\cdot g(x)$, per cui, essendo $[0,3[\cap(]-1,1[\cup]1,2])=[0,1[\cup]1,2]$ si ha: $f\cdot g:[0,2]-\{1\}\to R$ ovvero $f\cdot g:\forall x\in[0,1[\cup]1,2]\to\dfrac{x+2}{2x-2}\in R$.

c) La funzione $\dfrac{f}{g}$ è definita nell'insieme, intersezione dei due domini escludendo l'insieme dei punti in cui la funzione g si annulla ed associa $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, per cui osservando che $g(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ed essendo $[0,3[\cap(]-1,1[\cup]1,2])=[0,1[\cup]1,2]$ si ha: $\dfrac{f}{g}:[0,2]-\{1\}\to R$ ovvero $\dfrac{f}{g}:\forall x\in[0,1[\cup]1,2]\to\dfrac{x^2+x-2}{2}\in R$.

d) La funzione $\alpha\cdot f$ è definita nel dominio della funzione f ed associa $\alpha\cdot f(x)$, per cui si ha: $\alpha\cdot f:[0,3[\to R$ ovvero $\alpha\cdot f:\forall x\in[0,3[\to\alpha\dfrac{x+2}{2}\in R$.

IX. Le simmetrie delle seguenti funzioni, risultano:

a) Essendo $f_1(x)=\dfrac{1}{x+1}$, si osserva che tale funzione non è definita $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$, pertanto il punto $x=-1$ potrebbe essere un punto di simmetria, infatti si ha $f_1(-1-x)-0=-f_1(-1+x)+0\Leftrightarrow\dfrac{1}{-1-x+1}-0=-\dfrac{1}{-1+x+1}+0\Leftrightarrow\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$; quindi la funzione f_1 risulta $(-1,0)$-*simmetrica*.

b) Essendo $f_2(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, si osserva che tale funzione non è definita $x-1=0\Leftrightarrow x=1$, pertanto il punto $x=1$ potrebbe essere un punto di simmetria, infatti si ha $f_2(1-x)=f_2(1+x)\Leftrightarrow\dfrac{1}{(1-x-1)^2}=\dfrac{1}{(1+x-1)^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{(-x)^2}=\dfrac{1}{(x)^2}$; quindi la funzione f_2 risulta 1-*simmetrica*.

c) Essendo $f_3(x)=\dfrac{1}{x^3}$, si osserva che tale funzione non è definita $x=0$, pertanto il punto $x=0$ potrebbe essere un punto di simmetria, infatti tenendo anche conto dell'esponente dispari, si ha $f_3(0-x)-0=-f_3(0+x)+0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(-x)^3}=-\dfrac{1}{(x)^3}$; quindi la funzione f_3 risulta $(0,0)$-*simmetrica*.

d) Essendo $f_4(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$, si osserva che tale funzione non è definita $x=1$, pertanto il punto $x=1$ potrebbe essere un punto di simmetria, infatti tenendo anche conto dell'esponente dispari, si ha $f_4(1-x)-1=-f_4(1+x)+1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x-2}{1-x-1}-1=-\dfrac{1+x-2}{1+x-1}+1 \Leftrightarrow \dfrac{-x-1+x}{-x}=\dfrac{x-1-x}{-x}$; quindi la funzione f_4 risulta $(1,1)$-*simmetrica*.