Esercitazione n. 03 (svolgimento)

I. Essendo la funzione $f:\left]0,2\right]\to R$ con $f(x)=x^2-1$, si ha:

a) Per definizione una funzione è ingettiva, se: $\forall x_1,x_2\in\left]0,2\right]$, con $x_1\neq x_2$ risulta $f(x_1)\neq f(x_2)$, ovvero se $\forall x_1,x_2\in\left]0,2\right]$, posto $f(x_1)=f(x_2): x_1=x_2$ quindi posto, $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow {x_1}^2-1={x_2}^2-1\Leftrightarrow\sqrt{{x_1}^2}=\sqrt{{x_2}^2}$ che risulta $|x_1|=|x_2|\Leftrightarrow x_1=x_2$ in quanto $\forall x_1,x_2\in\left]0,2\right]$ pertanto positivi e quindi la funzione *è ingettiva*..

b) Per definizione una funzione è surgettiva, se: $\forall y\in R$, $\exists x\in\left]0,2\right]$ tale che risulti $f(x)=y$, ovvero deve risultare che $f(\left]0,2\right])$ deve coincidere con l'insieme di arrivo, ma nel caso assegnato risulta $f(\left]0,2\right])\subset R$, anzi è solo una piccola parte, conseguentemente la funzione *f non è surgettiva*. Per esempio se $y=2$, $\nexists x\in\left]0,2\right]$ tale che $x^2-1=2$.

c) Conseguentemente per le risposte date ai punti precedenti la funzione *f non è invertibile*. È sufficiente apporre una riduzione alla funzione data, per renderla invertibile, ovvero considerare la funzione $f_\#:\left]0,2\right]\to f(\left]0,2\right])$.

d) Conseguentemente la funzione *inversa risulta* $f^{-1}:f(\left]0,2\right])\to\left]0,2\right]$, ovvero $f^{-1}:\forall y\in\left]-1,3\right]\to f^{-1}(y)=\sqrt{y+1}\in\left]0,2\right]$.

e) Si osserva che la funzione composta $f\circ f^{-1}$ *risulta*: $f\circ f^{-1}:f(\left]0,2\right])\to\left]-1,3\right]$ con $f(f^{-1}(y))=\left(\sqrt{y+1}\right)^2-1$.

f) Si osserva che la funzione composta $f^{-1}\circ f:\left]0,2\right]\to f^{-1}(\left]-1,3\right])$ con $f^{-1}(f(x))=\sqrt{x^2-1+1}=x$, pertanto $0\notin\left]0,2\right]\Rightarrow 0\notin f^{-1}(\left]-1,3\right])$, quindi 0 *non è un valore* della funzione $f^{-1}\circ f$.

II. Essendo le funzioni $f:\left[0,2\right[\to R$ con $f(x)=\frac{x}{2}+2x$ e $g:\left[-1,2\right[\to R$ con $g(x)=x+1$, si ha:

a) Per definizione $f+g:\forall x\in[0,2[\cap[-1,2[\to f(x)+g(x)$; per cui la *funzione somma* risulta essere: $f+g:\forall x\in[0,2[\to\frac{1}{2}(7x+2)\in R$.

b) Per definizione $f\cdot g:\forall x\in[0,2[\cap[-1,2[\to f(x)\cdot g(x)$; per cui la *funzione prodotto* risulta essere: $fg:\forall x\in[0,2[\to\frac{5}{2}(x^2+x)\in R$.

c) Per definizione $\frac{f}{g}:\forall x\in([0,2[\cap[-1,2[)-\{x\in[-1,2[/\,g(x)=0\}\to\frac{f(x)}{g(x)}$; per cui tenendo conto che $g(x)=0\Leftrightarrow x=-1\notin[0,2[$, la *funzione rapporto* risulta essere: $\frac{f}{g}:\forall x\in[0,2[\to\frac{5x}{2x+2}\in R$.

d) La funzione $f+g$ *risulta ingettiva* in quanto posto $(f+g)(x_1)=(f+g)(x_2)$ si ha $\frac{1}{2}(7x_1+2)=\frac{1}{2}(7x_2+2)\Leftrightarrow x_1=x_2$, pertanto ingettiva; la funzione fg *risulta ingettiva* in quanto essendo una parabola, negativa in $]-1,0[\not\subseteq[0,2[$, quindi strettamente crescente nel suo dominio, pertanto ingettiv*a*; ed infine la funzione $\frac{f}{g}$ *risulta ingettiva* in quanto posto $\frac{f}{g}(x_1)=\frac{f}{g}(x_2)$ si ha $\frac{5}{2}\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{5}{2}\frac{x_2}{x_2+1}\Leftrightarrow\frac{x_2+1}{x_2}=\frac{x_1+1}{x_1}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{x_1}$, ovvero $x_1=x_2$, pertanto ingettiva.

e) Le funzioni di cui ai punti a), b) e c) *non sono surgettive*, in quanto in tutti e tre i casi, si tratta di funzioni reali ed il codominio è un sottoinsieme proprio di *R*.

f) Le funzioni di cui ai punti a) e c) *non sono invertibili*, in quanto non surgettive, pertanto se si effettua una riduzione delle funzioni date le si possono rendere invertibili, e si ha rispettivamente: la funzione ridotta della funzione somma, $(f+g)_\#:[0,2[\to(f+g)([0,2[)$, e quindi la sua inversa risulta $(f+g)_\#^{-1}:[1,8[\to(f+g)_\#^{-1}(y)=\frac{2y-2}{7}\in[0,2[$; la funzione ridotta della funzione rapporto, $\left(\frac{f}{g}\right)_\#:\forall x\in[0,2[\to\frac{f}{g}([0,2[)$ e quindi la sua inversa risulta $\left(\frac{f}{g}\right)_\#^{-1}:\left[0,\frac{5}{3}\right[\to\left(\frac{f}{g}\right)_\#^{-1}(y)=\left(\frac{2y}{5-2y}\right)\in[0,2[$.

III. **Essendo le funzioni** $f:[0,1[\to f(x)=\sqrt[3]{x}+1\in[1,2[$ **e** $g:[-1,2[\to g(x)=\frac{x}{2}-1\in\left[-\frac{3}{2},0\right[$ **, si ha:**

a) Per poter considerare la funzione composta $g\circ f$, deve essere $f([0,1[)=[1,2[\subseteq[-1,2[$, pertanto *è possibile* considerare la funzione composta $g\circ f:[0,1[\to\left[-\frac{3}{2},0\right[$, e *risulta* $g(f(x))=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2}-1$.

b) Per poter considerare la funzione composta $f\circ g$, deve essere $g([-1,2[)=\left[-\frac{3}{2},0\right[\not\subseteq[0,1[$, pertanto *non è possibile* considerare la funzione composta $f\circ g$.

c) Essendo la funzione composta $g\circ f$ formata da funzioni invertibili potrebbe essere invertibile e nel caso risulta: $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$; pertanto osservando che $f^{-1}:[1,2[\to f^{-1}(y)=(y-1)^3\in[0,1[$, e $g^{-1}:\left[-\frac{3}{2},0\right[\to g^{-1}(y)=2y+2\in[-1,2[$, e che $g^{-1}\left(\left[-\frac{3}{2},0\right[\right)=[-1,2[\not\subseteq[1,2[$, pertanto *non è possibile* considerare la funzione composta $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

d) Non essendo stato possibile determinare la funzione composta $f\circ g$, *non è possibile* considerare la funzione inversa $(f\circ g)^{-1}$.

IV. **Essendo le funzioni** $f:]0,3]\to R$ **con** $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{se } x\in]0,1]\\ x+1 & \text{se } x\in]1,3]\end{cases}$ **e** $g:[-1,2[\to g(x)=\frac{x}{4}+1\in R$**, si ha:**

a) Essendo la funzione somma $f+g:\begin{cases}\forall x\in]0,1]\cap[-1,2[\to\frac{9}{4}x\\ \forall x\in]1,3]\cap[-1,2[\to\frac{5}{4}x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in]0,1]\to\frac{9}{4}x\\ \forall x\in]1,2[\to\frac{5}{4}x+2\end{cases}$, composta da funzioni lineari, comunque si pone $(f+g)(x_1)=(f+g)(x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4}x_1=\frac{9}{4}x_2 \\ \frac{5}{4}x_1+2=\frac{5}{4}x_2+2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2$

risulta quindi *ingettiva*.

b) Essendo la funzione prodotto $f \cdot g$, una funzione *reale*, definita in un dominio limitato, *non è* pertanto *surgettiva*.

c) Essendo la funzione rapporto $\frac{f}{g}$, una funzione *reale*, anche considerando la sua ingettività, essendo definita in un dominio limitato, *non è surgettiva* pertanto, *non è invertibile*.

d) Essendo la funzione somma data da $f+g: \begin{cases} \forall x \in \left]0,1\right] \to \frac{9}{4}x \in \left]0,\frac{9}{4}\right] \\ \forall x \in \left]1,2\right[\to \frac{5}{4}x+2 \in \left]\frac{13}{4},\frac{9}{2}\right[\end{cases}$, e la funzione prodotto data da $f \cdot g: \begin{cases} \forall x \in \left]0,1\right] \to \frac{1}{2}x^2+\frac{7}{4}x-1 \in \left]-1,\frac{5}{4}\right] \\ \forall x \in \left]1,2\right[\to \frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x+1 \in \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[\end{cases}$, la funzione composta $(f+g)\circ(fg): \begin{cases} \left]0,1\right] \to \left]0,\frac{9}{4}\right] \\ \left]1,2\right[\to \left]\frac{13}{4},\frac{9}{2}\right[\end{cases}$ ed inoltre deve essere $\begin{cases} (fg)(\left]0,1\right]) \subseteq \left]0,1\right] \\ (fg)(\left]1,2\right]) \subseteq \left]1,2\right] \end{cases}$ ma essendo $\begin{cases} (fg)(\left]0,1\right]) = \left]-1,\frac{5}{4}\right] \not\subset \left]0,1\right] \\ (fg)(\left]1,2\right]) = \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[\not\subset \left]1,2\right] \end{cases}$ *non esiste* la funzione composta $(f+g)\circ(fg)$.

e) Essendo la funzione somma data da $f+g: \begin{cases} \forall x \in \left]0,1\right] \to \frac{9}{4}x \in \left]0,\frac{9}{4}\right] \\ \forall x \in \left]1,2\right[\to \frac{5}{4}x+2 \in \left]\frac{13}{4},\frac{9}{2}\right[\end{cases}$, e la funzione prodotto data da $f \cdot g: \begin{cases} \forall x \in \left]0,1\right] \to \frac{1}{2}x^2+\frac{7}{4}x-1 \in \left]-1,\frac{5}{4}\right] \\ \forall x \in \left]1,2\right[\to \frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x+1 \in \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[\end{cases}$, la funzione composta

$(fg)\circ(f+g):\begin{cases}]0,1] \to \left]-1,\frac{5}{4}\right] \\ ]1,2[\to \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[\end{cases}$ ed inoltre deve essere $\begin{cases} (f+g)(]0,1]) \subseteq]0,1] \\ (f+g)(]1,2]) \subseteq]1,2] \end{cases}$ ma essendo $\begin{cases} (f+g)(]0,1]) = \left]0,\frac{9}{4}\right] \not\subseteq]0,1] \\ (f+g)(]1,2]) = \left]\frac{13}{4},\frac{18}{4}\right[\not\subseteq]1,2] \end{cases}$ *non esiste* la funzione composta $(fg)\circ(f+g)$.

f) La funzione $f+g$ è dotata di massimo se $\begin{cases} (f+g)(]0,1]) = \left]0,\frac{9}{4}\right] \\ (f+g)(]1,2]) = \left]\frac{13}{4},\frac{18}{4}\right[\end{cases} = \left]0,\frac{9}{4}\right] \cup \left]\frac{13}{4},\frac{18}{4}\right[$ è dotato di massimo, ma, essendo $\left]0,\frac{9}{4}\right] \cup \left]\frac{13}{4},\frac{18}{4}\right[$ non dotato di massimo, la funzione $f+g$ *non è dotata di massimo*.

g) Una funzione fg è dotata di estremo superiore, se $\begin{cases} (fg)(]0,1]) = \left]-1,\frac{5}{4}\right] \\ (fg)(]1,2]) = \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[\end{cases} = \left]-1,\frac{5}{4}\right] \cup \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[$ è dotato di estremo superiore, ed essendo appunto $\left]1,\frac{13}{4}\right] \cup \left]\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right[$ dotato di estremo superiore, la funzione fg *è dotata di estremo superiore* ed il $\sup_{x\in]0,1]\cup]1,2]} (fg)(x) = \frac{9}{2}$.

V. Essendo le rette $\begin{cases} r_1 : y = 2x+1 \\ r_1 : y = \frac{x}{2}-1 \end{cases}$, si ha:

a) Le due rette *non sono parallele* in quanto hanno diverso coefficiente angolare: $2 \neq \frac{1}{2}$.

b) Le due rette *non sono perpendicolari* in quanto risulta $2\cdot\frac{1}{2}+1 \neq 0$.

c) Le due rette, non essendo parallele, hanno un punto di intersezione soluzione del seguente sistema $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ \frac{x}{2}-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=-1 \\ \frac{x}{2}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x\left(\frac{1}{2}-2\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\left(-\frac{4}{3}\right)+1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$ pertanto il *punto di intersezione* risulta $\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

d) Le due rette hanno un punto di *intersezione con l'asse delle ascisse*, dato dalle soluzione del seguenti equazioni $\begin{cases} r_1: 2x+1=0 \\ r_2: \frac{x}{2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1: x=-\frac{1}{2} \\ r_2: x=2 \end{cases}$, ovvero le due rette si intersecano con le ascisse, rispettivamente nei punti $\begin{cases} r_1: \left(-\frac{1}{2},0\right) \\ r_2: (2,0) \end{cases}$; ed hanno un punto di *intersezione con l'asse delle ordinate*, dato dalle soluzione del seguente sistema $\begin{cases} r_1: \frac{y-1}{2}=0 \\ r_2: 2(1+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1: y=1 \\ r_2: y=-1 \end{cases}$, ovvero le due rette si intersecano con le ordinate, rispettivamente nei punti $\begin{cases} r_1: (0,1) \\ r_2: (0,-1) \end{cases}$.

e) Le distanze richieste sono tra i punti $r_1: \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ed $r_2: (0,-1)$ e tra i punti $r_1: (0,1)$ ed $r_2: (2,0)$; pertanto servendosi del Teorema di Pitagora, risultano rispettivamente: $d(r_1,r_2)=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $d(r_1,r_2)=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$.

VI. Essendo la funzione: $f: X \to Y$ con $f(x)=\frac{x}{3}-1$, si ha:

a) Essendo una funzione lineare, è sufficiente trovare il punto di intersezione con l'asse delle ascisse, soluzione dell'equazione: $\frac{x}{3}-1=0 \Leftrightarrow x=3$, pertanto $f(x)\geq 0$, $\forall x \in [3,+\infty[$.

b) La distanza della funzione *f* dal punto $V=(0,0)$, risulta: $d(f,V)=\frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$; oppure, se consideriamo la perpendicolare ad *f* passante per il vertice: $y=-3x$ e ne calcoliamo il punto di intersezione con la funzione *f*, che risulta $A=\left(\frac{3}{10},-\frac{9}{10}\right)$, la distanza di questo dal vertice risulta: $d(A,V)=\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(-\frac{9}{10}\right)^2}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$.

c) La funzione *g*, perpendicolare ad *f*, e passante per il punto $P=(2,0)$ risulta $y=-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+6$.

d) Si osserva che la funzione *g* interseca gli assi nel punto $X=(2,0)$ e nel punto $Y=(0,6)$, pertanto l'area del triangolo formatosi nel primo quadrante, risulta pari a 6.

e) Cominciamo con l'osservare l'area del rettangolo è dato dal *prodotto di due lati*; inoltre calcolando il punto $C=\left(\frac{21}{10},-\frac{3}{10}\right)$, comune alle due funzioni, *f* e *g*, possiamo ora considerare le due rette rispettivamente parallele, alla funzione *f*, ovvero: $f_p(x)=\frac{x}{3}$, che ha distanza dal punto *C*, pari a 5, quindi $d(f_p,C)=5\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{3}\frac{21}{10}-\left(-\frac{3}{10}\right)+c\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2}}=5\Leftrightarrow c=\pm\frac{5}{3}\sqrt{10}-1$ per cui la retta cercata risulta $f_p(x)=\frac{x}{3}-1\pm\frac{5}{3}\sqrt{10}$; ed alla funzione *g*, ovvero: $g_p(x)=-3x$, che ha distanza dal punto *C*, pari a 2, quindi $d(g_p,C)=2\Leftrightarrow\frac{\left|-3\frac{21}{10}-\left(-\frac{3}{10}\right)+c\right|}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow c=\mp2\sqrt{10}+6$ per cui la retta cercata risulta $g_p(x)=-3x+6\pm2\sqrt{10}$.

f) Un modo per poterlo dimostrare è il seguente: essendo già noto il punto $C=\left(\frac{21}{10},-\frac{3}{10}\right)$ di intersezione delle funzioni *f* e *g*, calcoliamo ora il punto di intersezione tra f_p e *g*, ovvero $G=\left(\frac{21-5\sqrt{10}}{10},\frac{-3+15\sqrt{10}}{10}\right)$, ed osserviamo che la loro distanza risulta $d(C,G)=\sqrt{\left(\frac{21-5\sqrt{10}}{10}-\frac{21}{10}\right)^2+\left(\frac{-3+15\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{10}\right)^2}=5$; calcoliamo ora il punto di intersezione tra g_p e *f*, ovvero $H=\left(\frac{21-6\sqrt{10}}{10},\frac{-3-2\sqrt{10}}{10}\right)$, ed osserviamo che la loro distanza risulta $d(C,H)=\sqrt{\left(\frac{21-6\sqrt{10}}{10}-\frac{21}{10}\right)^2+\left(-\frac{-3-2\sqrt{10}}{10}+\frac{3}{10}\right)^2}=2$, abbiamo quindi ottenuto i due lati del rettangolo di area 10.