Esercitazione n. 02 (svolgimento)

I. Essendo la funzione $f: Z \to R$ con $f(x) = x^2$, si ha:

a) Con $f(Z)$ si indica l'insieme dei valori della funzione ovvero *il codominio*, detto anche l'immagine del dominio *Z*, tramite la funzione *f*, ovvero $f(Z) = \{y \in R / \forall x \in Z : f(x) = y\}$.

b) Per definizione una funzione è ingettiva, se: $\forall x_1, x_2 \in Z$, con $x_1 \neq x_2$ risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero se $\forall x_1, x_2 \in Z$, posto $f(x_1) = f(x_2)$: $x_1 = x_2$ quindi posto, $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^{\ 2} = x_2^{\ 2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1^{\ 2}} = \sqrt{x_2^{\ 2}}$ che risulta $|x_1| = |x_2|$ ma ciò, per le proprietà del valore assoluto non ci consente di poter affermare l'uguaglianza, $x_1 = x_2$, quindi la funzione non è ingettiva. Tanto è vero se consideriamo i punti -2 e 2,si ha $f(-2) = f(2) = 4$ quindi *f non è ingettiva*.

c) Per definizione una funzione è surgettiva, se: $\forall y \in R, \exists x \in Z$ tale che risulti $f(x) = y$, ovvero deve risultare che $f(Z)$ deve coincidere con l'insieme di arrivo, ma nel caso assegnato risulta $f(Z) \subset R$, anzi è solo una piccola parte,conseguentemente la funzione *fnon è surgettiva*. Per esempio se $y = 3, \nexists x \in Z$ tale che $x^2 = 3$.

d) Conseguentemente per le risposte date ai punti precedenti la funzione *fnon è invertibile*.

II. Essendo la funzione $g: N \to Z$ con $g(x) = x^2$, si ha:

a) Per essere ingettiva, deve accadere che $\forall x_1, x_2 \in N$, con $x_1 \neq x_2$ risulta $g(x_1) \neq g(x_2)$, e per tale funzione comunque si prendono due numeri **naturali** diversi, la funzione assocerà due valori di Z diversi, quindi la funzione *gè ingettiva*.

b) Per essere surgettiva, deve accadere che $\forall y \in Z$, deve $\exists x \in N$ tale che risulti $g(x) = y$, ma si osserva che $f(N) \subset Z$, infatti per esempio se $y = 3$, $\nexists x \in N$ tale che $x^2 = 3$ pertanto la funzione *gnon è surgettiva*.

c) Conseguentemente per la risposta data al punto precedente, la funzione *gnon è invertibile*.

d) Per poter rendere la funzione g invertibile, si potrebbe effettuare una riduzione della stessa al suo codominio, ovvero $g_{\#}: N \rightarrow g(N)$ che risulterebbe quindi essere, oltre che ingettiva, anche surgettiva e pertanto*invertibile*.

III. Essendo $f:]0,2] \rightarrow R$ con $f(x) = 2x + 1$, si ha:

a) La funzione è limitata se $f(]0,2])$ è limitato, ed essendo $f(]0,2]) =]1,5]$quindi limitato sia superiormente che inferiormente, la funzione *fè limitata*.

b) La funzione è dotata di minimo se $f(]0,2])$ è dotato di minimo, ed essendo $f(]0,2]) =]1,5]$ non dotato di minimo, in quanto $\nexists m \in]1,5]$ tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta che $f(x) \geq m$, pertanto la funzione *fnon è dotata di minimo*.

c) La funzione è dotata di massimo se $f(]0,2])$ è dotato di massimo, ed essendo $f(]0,2]) =]1,5]$ dotato di massimo, in quanto $\exists M = 5 \in]1,5]$e tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta $f(x) \leq 5$, ed $\exists x = 2 \in]0,2]$ che risulta $f(2) = M = 5$pertanto la funzione f *è dotata di massimo* ed il $\max_{x \in]0,2]} f(x) = 5$.

d) La funzione è dotata di estremo inferiore se $f(]0,2])$ è dotato di estremo inferiore, ed essendo $f(]0,2]) =]1,5]$ dotato di estremo inferiore, in quanto $\exists 1 \in R$ tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta che $f(x) \geq 1$, quindi 1 è un minorante ed inoltre per$\varepsilon = 0.1$, $\exists \bar{x} = 0.04 \in]0,2]$ tale che $f(\bar{x}) < 1 + \varepsilon$in quanto $f(0.04) = 1.08 < 1.1$quindi 1 è anche il più grande dei minoranti, pertanto*fè dotata di estremo inferiore*: $\inf_{x \in]0,2]} f(x) = 1$.

e) La funzione è dotata di estremo superiore se $f(]0,2])$ è dotato di estremo superiore, ed essendo $f(]0,2]) =]1,5]$ dotato di estremo superiore, in quanto $\exists 5 \in R$ tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta che $f(x) \leq 5$, quindi 5 è un maggiorante ed inoltre per$\varepsilon = 0.1$, $\exists \bar{x} = 1.96 \in]0,2]$ tale che $f(\bar{x}) > 5 - \varepsilon$in quanto $f(1.96) = 4.92 > 4.9$quindi 5 è anche il più piccolo dei maggioranti, pertanto*fè dotata di estremo superiore* ed il $\sup_{x \in]0,2]} f(x) = 5$.

f) Essendo la funzione f ingettiva ma non surgettiva, è possibile renderla invertibile, effettuando una riduzione della stessa al suo codominio, ovvero $f_{\#}:]0,2] \rightarrow]1,5]$ che risulterebbe anche surgettiva e *quindi invertibile*.

g) Conseguentemente la funzione *inversa risulta* $f^{-1}:]1,5] \rightarrow]0,2]$ con $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$, e tale che $f(x) = y$.

IV. **Essendo** $f:]0,2]\to R$**, con** $f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ se } x\in]0,1]\\ x+1 \text{ se } x\in]1,2]\end{cases}$ **si ha:**

a) Si osserva che la funzione è composta da due funzioni ingettive ed inoltre essendo $f(]0,1])=]-1,1]$ ed $f(]1,2])=]2,3]$, quindi non vi sono punti di intersezione tra i due codomini, la funzione *fè ingettiva*.

b) La funzione *f, non è surgettiva*, in quanto $f(]0,2])=(]-1,1]\cup]2,3])\subset R$ pertanto esistono infiniti $y\in R$ per cui $\nexists x\in]0,2]$ che risulti $f(x)=y$.

c) La funzione *f, non è invertibile*, in quanto è si ingettiva, ma non surgettiva.

d) Essendo la funzione non surgettiva, per renderla tale, è sufficiente effettuare una riduzione al suo codominio, ovvero considerare la funzione ridotta: $f_{\#}:]0,2]\to f(]0,2])=]-1,1]\cup]2,3]$ con $f_{\#}(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ se } x\in]0,1]\\ x+1 \text{ se } x\in]1,2]\end{cases}$

e) Essendo la funzione $f_{\#}:]0,2]\to]-1,1]\cup]2,3]$ invertibile, si ha la seguente funzione inversa $f_{\#}^{-1}(y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2} \text{ se } y\in]-1,1]\\ y-1 \text{ se } y\in]2,3]\end{cases}$ e tale che $f(x)=y$.

f) La funzione è dotata di massimo se $f(]0,2])$ è dotato di massimo, ed essendo $f(]0,2])=]-1,1]\cup]2,3]$ dotato di massimo, in quanto $\exists M=3\in]-1,1]\cup]2,3]$ e tale che $\forall x\in]0,2]$ risulta che $f(x)\le 3$, ed $\exists\bar{x}=2\in]0,2]$ che risulta $f(\bar{x})=M=3$, pertanto la funzione *f è dotata di massimo* ed il $\max_{x\in]0,2]} f(x)=3$.

g) Una funzione è dotata di estremo superiore, se è dotata di massimo ed in tal caso, la funzione *f è dotata di estremo superiore* ed il $\sup_{x\in]0,2]} f(x)=\max_{x\in]0,2]} f(x)=3$.

V. **Essendo** $f:\to\begin{cases}2x+1 \text{ se } x\in]0,1]\\ \dfrac{x}{2}-1 \text{ se } x\in]1,2]\end{cases}$ **,si ha:**

a) Una funzione si definisce strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in]0,2]$, con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$;se si considera $x_1 = 1$ ed $x_2 = 1{,}2$ risulta $f(1) = 3$ ed $f(1{,}2) = -0{,}4$, quindi esistono due punti, $x_1 < x_2$ per cui risulta $f(x_1) > f(x_2)$ pertanto la funzione f non *è strettamente crescente*.

b) La funzione è dotata di minimo se $f(]0,2])$ è dotato di minimo, ed essendo $f(]0,2]) = \left]-\frac{1}{2},0\right] \cup]1,3]$ non dotato di minimo, in quanto $\nexists m \in \left]-\frac{1}{2},0\right] \cup]1,3]$ tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta che $f(x) \geq m$, pertanto la funzione *fnon è dotata di minimo*.

c) La funzione è dotata di massimo se $f(]0,2])$ è dotato di massimo, ed essendo $f(]0,2]) = \left]-\frac{1}{2},0\right] \cup]1,3]$ dotato di massimo, in quanto $\exists M = 3 \in \left]-\frac{1}{2},0\right] \cup]1,3]$ tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta che $f(x) \leq 3$, ed $\exists \bar{x} = 1 \in]0,2]$ che risulta $f(\bar{x}) = M = 3$, pertanto la funzione *f è dotata di massimo* ed il $\max\limits_{x \in]0,2]} f(x) = 3$.

d) Una funzione è dotata di estremo superiore, se è dotata di massimo, ed in tal caso il $\max\limits_{x \in]0,2]} f(x) = 3$, la funzione *f è dotata di estremo superiore* ed il $\sup\limits_{x \in]0,2]} f(x) = \max\limits_{x \in]0,2]} f(x) = 3$.

e) Una funzione è dotata di estremo inferiore se $f(]0,2])$ è dotato di estremo inferiore, ed essendo $f(]0,2]) = \left]-\frac{1}{2},0\right] \cup]1,3]$ dotato di estremo inferiore, in quanto $\exists -\frac{1}{2} \in R$ tale che $\forall x \in]0,2]$ risulta che $f(x) \geq -\frac{1}{2}$, quindi $-\frac{1}{2}$ è un minorante ed inoltre per $\varepsilon = 0.1$, $\exists \bar{x} = 1.1 \in]0,2]$ tale che $f(\bar{x}) = -0.45 < -\frac{1}{2} + 0.1$ quindi $-\frac{1}{2}$ è anche il più grande dei minoranti, pertanto *fè dotata di estremo inferiore* e l' $\inf\limits_{x \in]0,2]} f(x) = -\frac{1}{2}$.

VI. Essendo le funzioni: $f : X \to Y$ con $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, e $g : Y \to T$ con $g(y) = 2y + 1$, si ha:

a) Essendo la funzione composta $g \circ f : X \to T$, ed essendo $f(X) \subseteq Y$, in quanto $f(X) = Y$ il dominio della funzione *g*, *è possibile* considerare la funzione composta $g \circ f : X \to T$, *che risulta* $g(f(x)) = 2\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 1 = x - 1$.

b) Essendo la funzione composta $f \circ g : Y \to Y$, e non potendo affermare che $g(Y) \subseteq X$, in quanto $g(Y) = T$, *non è possibile* considerare la funzione composta $f \circ g$.

c) Essendo $f^{-1} : Y \to X$, con $f^{-1}(y) = 2y + 2$; ed essendo $g^{-1} : T \to Y$, con $g^{-1}(z) = \frac{z-1}{2}$,*è possibile considerare* la funzione composta $f^{-1} \circ g^{-1}$ in quanto possiamo affermare che $g^{-1}(T) \subseteq Y$,in quanto $g^{-1}(T) = Y$ il dominio della funzione f^{-1}, quindi si ha $f^{-1} \circ g^{-1} : T \to X$, *risulta* $f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = 2\left(\frac{z}{2} - 1\right) + 2 = z + 1$.

d) Essendo la funzione composta $g^{-1} \circ f^{-1} : Y \to Y$ e non essendo possibile affermare che $f^{-1}(Y) \subseteq T$, in quanto $f^{-1}(Y) = X$ *non è possibile* considerare la funzione composta $g^{-1} \circ f^{-1}$.

e) Essendo $g : Y \to T$, con $g(y) = 2y + 1$; ed essendo $g^{-1} : T \to Y$, con $g^{-1}(z) = \frac{z-1}{2}$, è possibile considerare la funzione composta $g \circ g^{-1}$ in quanto possiamo affermare che $g^{-1}(T) \subseteq Y$ in quanto $g^{-1}(T) = Y$, il dominio della funzione g,pertanto*è possibile* considerare la funzione composta $g \circ g^{-1} : T \to T$, *e risulta* $g\left(g^{-1}(z)\right) = 2\left(\frac{z-1}{2}\right) + 1 = z$.

f) Essendo $f : X \to Y$, con $f(x) = \frac{x}{2} - 1$; ed essendo $f^{-1} : Y \to X$, con $f^{-1}(y) = 2y + 2$, è possibile considerare la funzione composta $f^{-1} \circ f$ in quanto possiamo affermare che $f(X) \subseteq Y$ in quanto $f(X) = Y$ il dominio della funzione f^{-1},pertanto*è possibile* considerare la funzione composta $f^{-1} \circ f : X \to X$, *e risulta* $f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{x-2}{2}\right) + 2 = x$

.