Esercitazione n. 01 (svolgimento)

I. Considerando le diverse implicazioni ed equivalenze, si ha:

a) $\forall x \in N, \quad x^2 > 62 \Rightarrow x > 7$, *risulta vera*, in quanto nell'ipotesi fatta, se consideriamo $x = 8 : x^2 = 64 > 62$ e questo implica la condizione necessaria $x > 7, \quad \forall x \in N$

b) $\forall x \in N, \quad x > 7 \Rightarrow x^2 > 62$, allo stesso modo si vede che *risulta vera* anche la seguente implicazione, sempre considerando $x = 8$

c) $\forall x \in N, \quad x^2 > 62 \Leftrightarrow x > 7$, di conseguenza, essendo vere ambedue le precedenti implicazioni, *è vera l'equivalenza* $x^2 > 62 \Leftrightarrow x > 7, \quad \forall x \in N$

d) $\forall x \in R, \quad x^2 \geq 64 \Rightarrow x \geq 7$, considerando $x = \pm 8$, risulta soddisfatta l'ipotesi $x^2 \geq 64$ ma nel caso *x* sia negativo, questo numero reale non soddisfa la condizione necessaria, $-8 < 7$, pertanto *l'implicazione è falsa*

e) $\forall x \in R, \quad x \geq 7 \Rightarrow x^2 \geq 64$, consideriamo $x = 7$, risulta soddisfatta l'ipotesi $x \geq 7$ ma non la condizione necessaria $x^2 \geq 64$ pertanto *l'implicazione è falsa*

f) $\forall x \in R, \quad x^2 \geq 64 \Leftrightarrow x \geq 7$ di conseguenza, non essendo vere ambedue le precedenti implicazioni, *non è vera l'equivalenza* data, ovvero: $x^2 \geq 64 \not\Leftrightarrow x \geq 7, \quad \forall x \in R$

g) $\forall x \in R_+, \quad x^2 \geq 64 \Rightarrow x \geq 7$ se consideriamo $x = 8$, risulta $x^2 \geq 64$ pertanto risulta vera $x \geq 7, \quad \forall x \in R_+$ quindi *l'implicazione è vera*

h) $\forall x \in R_+, \quad x \geq 7 \Rightarrow x^2 \geq 64$ se consideriamo $x = 7$, risulta $x \geq 7$ ma non la condizione necessaria, pertanto *l'implicazione è falsa*

i) $\forall x \in R_+, \quad x^2 \geq 64 \Leftrightarrow x \geq 7$ di conseguenza, non essendo vere ambedue le precedenti implicazioni, *non è vera l'equivalenza* data, ovvero $x^2 \geq 64 \not\Leftrightarrow x \geq 7, \quad \forall x \in R_+$

II. Essendo l'insieme $A = \{1,2,a\}$ e l'insieme $B = \{1,2,3\}$, si ha:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$, pertanto *risulta vera se* e solo se, $a = 3$

b) $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B : x \in A$, pertanto *risulta vera se* e solo se, $a = 3$

c) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, pertanto *risulta vera se* e solo se, $a = 3$

d) $3 \subseteq A$, *non è corretto* parlare di inclusione in quanto 3 non è un'insieme

e) $\{3\} \subseteq A$, sarebbe *vero solo se* e solo se, $a = 3$

f) $3 \in A$, sarebbe *vero solo se* e solo se, $a = 3$

g) $A \bigcup B \Leftrightarrow \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B\}$, pertanto *risulta:* $A \bigcup B = \{1,2,3,a\}$,

h) $B \bigcap A \Leftrightarrow \{x \in U / x \in A \text{ e } x \in B\}$, pertanto *risulta:* $A \bigcap B = \{1,2\}$, ovvero $A \bigcap B = \{1,2,3\}$ nell'ipotesi in cui $a = 3$

i) $P(A) = \{X / X \subseteq A\}$, pertanto *risulta* $P(A) = \{\varnothing, A, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}\}$

III. Essendo l'insieme $A \subseteq R$, si definisce:

a) *Partizione finita* di A, l'insieme $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$ costituito da *n* sottoinsiemi di *A*, tale che $\forall i, j \in \{1,2,...,n\}, i \neq j : X_i \cap X_j = \varnothing$ e $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = A$

IV. Essendo $A \subseteq R$, ed $A = \{x \in Q / 1 \leq x < 8\}$ si ha:

a) Se $\max A = M \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A : x \leq M \end{cases}$, pertanto se $M = 8$ sarebbe vera solo la seconda proprietà e non la prima, quindi A *non è dotata di massimo*

b) Se $\min A = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall x \in A : x \geq m \end{cases}$, pertanto con $m = 1$ risultano vere ambedue le proprietà e quindi A *è dotata di minimo* e risulta $\min A = 1$

c) Sia $k \in R$, se $\sup A = k \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \le k \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in A / \bar{x} > k - \varepsilon \end{cases}$, pertanto con $k = 8$ risultano soddisfatte ambedue le proprietà e quindi A *è dotata di estremo superiore* e risulta $\sup A = 8$

d) Sia $h \in R$, se $\inf A = h \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \ge h \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in A / \bar{x} < h + \varepsilon \end{cases}$, pertanto con $h = 1$ risultano soddisfatte ambedue le proprietà e quindi A *è dotata di estremo inferiore* e risulta $\inf A = 1$

e) Dire che l'insieme A è limitato equivale a dire che esiste sia l'estremo inferiore che quello superiore, numeri reali, pertanto l'insieme A *è limitato*

f) Dire che l'insieme A è illimitato superiormente equivale a dire che $\sup A = +\infty$, pertanto l'insieme A *non è illimitato superiormente*

V. Essendo $A \subseteq U$; $B \subseteq U$, ed essendo $A = \{1,2,a\}$ e $B = \{3,4\} \cup \{0\}$, possiamo affermare:

a) Dire che gli insiemi A e B sono disgiunti $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$, pertanto *è vero se* e solo se $a \ne 0$; $a \ne 3$ e $a \ne 4$

b) Dire che gli insiemi A e B sono separati $\Leftrightarrow \forall x \in A \, \text{e} \, \forall y \in B : x \le y$, pertanto gli insiemi A e B *non possono mai essere separati* a prescindere dal valore del parametro a

c) Dire che gli insiemi A e B sono contigui $\Leftrightarrow \sup A = \inf B$, pertanto gli insiemi A e B *non possono mai essere contigui* a prescindere dal valore del parametro a

VI. Tenendo conto del valore assoluto presente nelle disuguaglianze, si ha:

a) $|2x-1| \ge 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 4 & \text{se } 2x-1 \ge 0 \\ -2x+1 \ge 4 & \text{se } 2x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \cap x \ge \frac{1}{2} \\ x \le -\frac{3}{2} \cap x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

b) $|2x-1| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 3 & \text{se } 2x-1 \ge 0 \\ -2x+1 < 3 & \text{se } 2x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \cap x \ge \frac{1}{2} \\ x > -1 \cap x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 2\right[\Leftrightarrow x \in \left]-1, 2\right[$

c) $|2x-1|<x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<x+1 & \text{se } 2x-1\geq 0 \\ -2x+1<x+1 & \text{se } 2x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \cap x\geq \dfrac{1}{2} \\ x>0 \cap x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2},2\right[\Leftrightarrow x\in]0,2[$

d) $|2x-1|>x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>x-1 & \text{se } 2x-1\geq 0 \\ -2x+1>x-1 & \text{se } 2x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \cap x\geq \dfrac{1}{2} \\ x<\dfrac{2}{3} \cap x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow x\in R$

e) $|2x-1|\leq \dfrac{x}{2}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\leq \dfrac{x}{2}-1 & \text{se } 2x-1\geq 0 \\ -2x+1\leq \dfrac{x}{2}-1 & \text{se } 2x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \cap x\geq \dfrac{1}{2} \\ x\geq \dfrac{4}{5} \cap x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in \varnothing$

f) $|2x-1|\geq \dfrac{x}{2}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq \dfrac{x}{2}+1 & \text{se } 2x-1\geq 0 \\ -2x+1\geq \dfrac{x}{2}+1 & \text{se } 2x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{4}{3} \cap x\geq \dfrac{1}{2} \\ x\leq 0 \cap x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in]-\infty,0] \cup \left[\dfrac{4}{3},+\infty\right[$

g) $|2x-1|\geq |x| \Leftrightarrow |2x-1|-|x|\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1|-x\geq 0 & \text{se } x\geq 0 \\ |2x-1|+x\geq 0 & \text{se } x<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1-x\geq 0 & \text{se } x\geq \dfrac{1}{2} \cap x\geq 0 \\ -2x+1-x\geq 0 & \text{se } x<\dfrac{1}{2} \cap x\geq 0 \\ -2x+1+x\geq 0 & \text{se } x<\dfrac{1}{2} \cap x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \cap x\geq \dfrac{1}{2} \\ x\leq \dfrac{1}{3} \cap x\in \left[0,\dfrac{1}{2}\right[\\ x\leq 1 \cap x<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in [1,+\infty[\cup \left[0,\dfrac{1}{3}\right] \cup]-\infty,0[\Leftrightarrow x\in \left]-\infty,\dfrac{1}{3}\right] \cup [1,+\infty[$$

h) $$|2x-1|<|x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<|x+1| & \text{se } x\geq \frac{1}{2} \\ -2x+1<|x+1| & \text{se } x<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1<x+1 & \text{se } x\geq \frac{1}{2}\cap x\geq -1 \Leftrightarrow x\in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ -2x+1<x+1 & \text{se } x\geq -1\cap x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in \left[-1,\frac{1}{2}\right[\\ -2x+1<-(x+1) & \text{se } x<-1\cap x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-1\right[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<2 & \text{se } x\in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow x\in \left[\frac{1}{2},2\right[\\ -3x<0 & \text{se } x\in \left[-1,\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow x\in \left]0,\frac{1}{2}\right[\\ x>2 & \text{se } x\in \left]-\infty,-1\right[\Leftrightarrow x\in \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]0,2\right[$$

i) $$|2x-1|>|x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>|x-1| & \text{se } x\geq \frac{1}{2} \\ -2x+1>|x-1| & \text{se } x<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>x-1 & \text{se } x\geq \frac{1}{2}\cap x\geq 1 \Leftrightarrow x\in \left[1,+\infty\right[\\ 2x-1>-(x-1) & \text{se } x\geq \frac{1}{2}\cap x<1 \Leftrightarrow x\in \left[\frac{1}{2},1\right[\\ -2x+1>-(x-1) & \text{se } x<\frac{1}{2}\cap x<1 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 & \text{se } x\in \left[1,+\infty\right[\\ x>\frac{2}{3} & \text{se } x\in x\in \left[\frac{1}{2},1\right[\\ x<0 & \text{se } x\in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left[1,+\infty\right[\cup \left]\frac{2}{3},1\right[\cup \left]-\infty,0\right[\Leftrightarrow x\in \left]-\infty,0\right[\cup \left]\frac{2}{3},+\infty\right[$$

j) $$|2x-1|\leq \left|\frac{x}{2}+1\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2\leq |x+2| & \text{se } x\geq \frac{1}{2} \\ -4x+2\leq |x+2| & \text{se } x<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2\leq x+2 & \text{se } x\geq \frac{1}{2}\cap x\geq -2 \Leftrightarrow x\in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ -4x+2\leq x+2 & \text{se } x<\frac{1}{2}\cap x\geq -2 \Leftrightarrow x\in \left[-2,\frac{1}{2}\right[\\ -4x+2\leq -(x+2) & \text{se } x<\frac{1}{2}\cap x<-2 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-2\right[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{4}{3} & \text{se } x\in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ -5x\leq 0 & \text{se } x\in \left[-2,\frac{1}{2}\right[\\ x\geq \frac{4}{3} & \text{se } x\in \left]-\infty,-2\right[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left[\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right] \cup \left[0,\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow x\in \left[0,\frac{4}{3}\right]$$

k) $|2x-1| \geq \left|\frac{x}{2}+x\right| \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2 \geq 3|x| & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -4x+2 \geq 3|x| & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2 \geq 3x \quad \text{se } x \geq \frac{1}{2} \cap x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ -4x+2 \geq 3x \quad \text{se } x < \frac{1}{2} \cap x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\\ -4x+2 \geq -3x \quad \text{se } x < \frac{1}{2} \cap x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ x \leq \frac{2}{7} & \text{se } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\\ x \leq 2 & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\end{cases} \Leftrightarrow x \in [2,+\infty[\cup \left[0,\frac{2}{7}\right] \cup \left]-\infty,0\right[\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,\frac{2}{7}\right] \cup [2,+\infty[$$

l) $|2x-1| \leq \left|\frac{x-1}{2x}\right| \Leftrightarrow |2x-1| \cdot |2x| \leq |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-2x \leq |x-1| & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\\ -\left(4x^2-2x\right) \leq |x-1| & \text{se } x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-2x \leq x-1 & \text{se } x \in \left(\left]-\infty,0\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \cap [1,+\infty[\\ 4x^2-2x \leq -(x-1) & \text{se } x \in \left(\left]-\infty,0\right] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \cap \left]-\infty,1\right[\\ -\left(4x^2-2x\right) \leq -(x-1) & \text{se } x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\cap \left]-\infty,1\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3x+1 \leq 0 & \text{se } x \in [1,+\infty[\\ 4x^2-x-1 \leq 0 & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right] \cup \left[\frac{1}{2},1\right[\\ -4x^2+3x-1 \leq 0 & \text{se } x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -7 \Leftrightarrow 4x^2-3x+1 \leq 0 & \text{se } x \in \varnothing \\ \Delta = 17 \Leftrightarrow 4x^2-x-1 \leq 0 & \text{se } x \in \left(\left]-\infty,0\right] \cup \left[\frac{1}{2},1\right[\right) \cap \left[\frac{1-\sqrt{17}}{8},\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right] \\ \Delta = -7 \Leftrightarrow 4x^2-3x+1 \geq 0 & \text{se } x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\cap R \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{17}}{8},0\right] \cup \left[\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right] \cup \left]0,\frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{17}}{8},\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]$$

Quindi, tenendo conto del rapporto $\frac{x-1}{2x}$, la disuguaglianza risulterà vera

$$\forall x \in \left[\frac{1-\sqrt{17}}{8},\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right] \cap R - \{0\} \Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}0\right[\cup \left]0,\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]$$