Teorema sulle condizioni suficienti per la stretta monotonia (con dimostrazione)

Sia $f : X \rightarrow R$,

sia

$$x_0 \in X$$

sia

$$f \text{ derivabile in } x_0$$

allora

$$\text{se } f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ è strettamente crescente in } x_0 .$$

$$\text{se } f'(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ è strettamente decrescente in } x_0 .$$

Dimostrazione

dal Teorema della permanenza del segno,

se osserviamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$,

quindi se $f'(x_0) > 0$

allora

$\exists I_{x_0}$ tale che $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$ risulta: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, per cui, se $x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$ conseguentemente anche $f(x) - f(x_0) > 0$, quindi $f(x) > f(x_0)$, pertanto per la definizione di la funzione strettamente crescente, la funzione risulta tale. Analogo ragionamento è possibile ripetere nel caso $x - x_0 < 0$.

In egual maniera si dimostra la condizione necessaria della stretta decrescenza.