Teorema della permanenza del segno

Sia $f : X \rightarrow R$,

sia $x_0 \in \hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

sia $L \in \hat{R}$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L < 0$$

allora

$$\exists I_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \text{ risulta } f(x) < 0.$$

Dimostrazione I

Servendosi del I Teorema del confronto:

Sia $f : X \rightarrow R$, sia $g : X \rightarrow R$

sia $x_0 \in \hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

siano $L, M \in \hat{R}$

se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \text{ e risulta che } L < M$$

allora

$$\exists I_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \text{ risulta } f(x) < g(x).$$

e ponendo la funzione $g(x) = 0, \forall x \in X$, si replica il Teorema della permanenza del segno, ovvero

se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ e risulta che } L < 0$$

allora

$$\exists I_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \text{ risulta } f(x) < 0.$$

Dimostrazione II

Essendo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L < 0$, si osserva che esistono due intorni, tali che $I_L \cap I_0 = \emptyset$ ed inoltre che, $\forall a \in I_L$ risulta $a < 0$.

Se ora teniamo conto della definizione di limite

$$\forall I_L, \exists I_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \text{ risulta } f(x) \in I_L \Leftrightarrow f(x) < 0.$$

Quindi essendo i due intorni separati $\forall a \in I_L$ risulta $a < 0$ e conseguentemente anche $f(x) \in I_L$ e quindi risulta $f(x) < 0$.