Teorema sulle funzioni continue (con dimostrazione) per i curiosi

Teorema del Punto Fisso

Sia $f:[a,b]\to R$,

se

$$f \text{ è continua}$$

se

$$\{f(a), f(b)\}\in[a,b]\Leftrightarrow f([a,b])\subseteq[a,b]$$

allora

$$\exists c\in[a,b] \text{ tale che } f(c)=c.$$

Dimostrazione

Consideriamo la funzione $g:[a,b]\to f(x)-x$ ed osserviamo che essendo la differenza di funzioni continue, è continua.

Osserviamo ancora che:

$$g(a)=f(a)-a \text{ e } g(b)=f(b)-b$$

e ricordando dalle ipotesi risulta:

$$f(a)\geq a\Leftrightarrow f(a)-a\geq 0$$

ed

$$f(b)\leq b\Leftrightarrow f(b)-b\leq 0$$

pertanto

$$g(a)\geq 0$$

e

$$g(b) \leq 0$$

Quindi se $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$, il teorema è dimostrato, in quanto si osservi ad esempio che nel caso:

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) - a = 0 \Leftrightarrow f(a) = a \text{, ovvero basta porre } a = c.$$

Se $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$ allora ricorrono le ipotesi del Teorema degli Zeri, per cui:

$$\exists c \in \left]a, b\right[\,/\, g(c) = 0 \text{, ovvero } g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c.$$