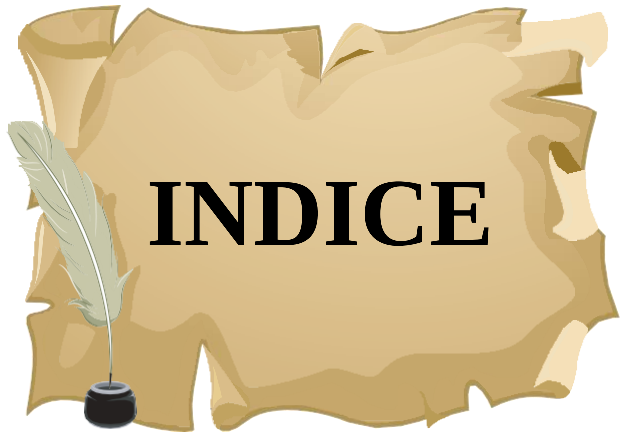
Università Degli Studi Di Bari "Aldo moro"
"Dipartimento Di Economia E Finanza"

Mauro G. Bisceglia

Anisa Bakiu

Kamela Dedaj

Appunti di Matematica per l'Economia



Sommario

Capitolo 1

Gli insiemi

1.1 – Definizione di insieme

Quali sono i pezzi che compongono il puzzle degli insiemi?

L'insieme finito: insieme che contiene un numero finito o numerabile di elementi

L'insieme unitario: insieme che contiene un solo elemento.

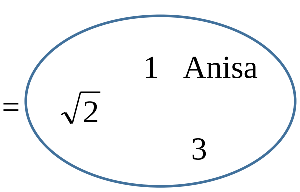
L'insieme infinito: insieme che contiene infiniti elementi o non numerabili elementi.

L'insieme vuoto: insieme privo di elementi.

Gli insiemi possono essere rappresentati in 3 modi:

Rappresentazione grafica:

$A =$



Rappresentazione per elencazione:

$$A = \{1, \sqrt{2}, Anisa, 4, 5\}$$

Rappresentazione per caratteristica:

$$A = \{x : x \in N \text{ e } x \leq 5\}$$

Operazioni tra insiemi:

L'intersezione

Dati due insiemi A e B, si definisce intersezione tra i due, l'insieme C formato da tutti gli elementi che si trovano sia in A che in B.

$$A \bigcap B = C = \{x \in A \text{ e } x \in B\}$$

L'unione

Dati due insiemi A e B, si definisce l'unione tra i due, l'insieme C formato da tutti gli elementi che si trovano ad A ed a B.

$$A \bigcup B = C = \{x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

L'inclusione

Siano A e B, 2 insiemi, si dice che A è incluso in B, e si denota con $A \subseteq B$ se ogni elemento di A appartiene a B.

$$A \subseteq B, \forall x \in A, x \in B$$

Si dice che A strettamente incluso in B, e si denota con $A \subset B$ se ogni elemento di A appartiene a B ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A.

$$A \subset B, \forall x \in A, x \in B \quad \exists x \in B : x \notin A$$

L'uguaglianza degli insiemi

Dati due insiemi A e B, si dice che $A = B$, se

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

Alcune proprietà sugli insiemi:

Dati A, B e C tre insiemi numerici, si osservano le seguenti proprietà:

Proprietà commutativa:
$A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$

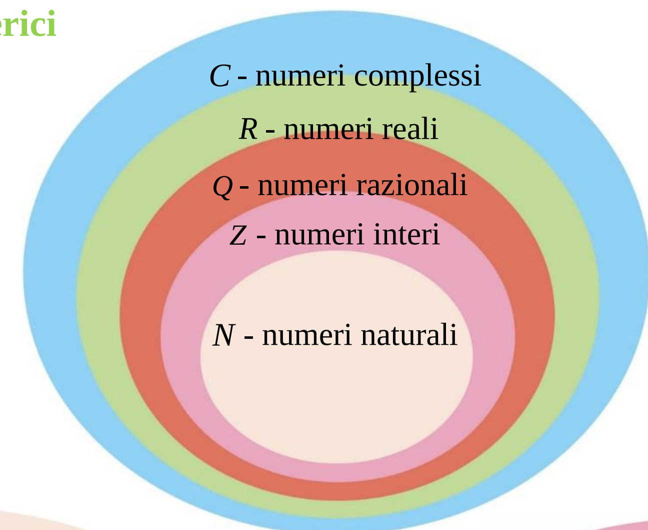
Proprietà associativa:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Proprietà distributiva dell'unione rispetto intersezione:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Siano A e B due insiemi:
A e B sono disgiunti se: $A \cap B = \varnothing$
A e B sono separati se: $A \cap B = \varnothing$ e $\forall a \in A$ e $b \in B : a < b$
A e B sono contigui quando: $\sup A = \inf B$ o $\sup B = \inf A$

1.2 - Gli insiemi numerici



N - Insiemi dei numeri naturali

Z - Insieme dei numeri interi

$N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

$Z = \{\ldots,-n,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

Q - Insieme dei numeri razionali

R - Insieme dei numeri reali

$$Q = \left\{ x \in R, x = \frac{m}{n}, con\ m \in Z \text{ e } n \in N \right\}$$

$$(Q \subset R) \Leftrightarrow \{\forall x \in Q, x \in R\}$$

$$(R - Q) = \{numeri\,irrazionidi\}$$

$$(R - Q) = \{x \in R, x \notin Q\}$$

C - Insieme dei numeri complessi

$$(R \subseteq C) \Leftrightarrow \{\forall a \in R : a \in C\}$$

1.3 – Minimo e massimo di un insieme

Sia $A \subseteq R$, si dice minimo di A, se esiste, quel numero $m \in R$, tale che è il più piccolo elemento dell'insieme A.

$$\min A = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall x \in A : x \geq m \end{cases}$$

Sia $A \subseteq R$, si dice massimo di A, se esiste, quel numero $M \in R$, tale che è il più grande elemento dell'insieme A.

$$\max A = M \Leftarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A : x \leq M \end{cases}$$

1.4 – Minorante e maggiorante di un insieme

Sia $X \subseteq R$, si dice minorante di X, se esiste, quel numero reale h che è minore o uguale di tutti gli elementi dell'insieme X.

$$\text{minorante}: \exists h \in R \,/\, \forall x \in X : x \geq h$$

Sia $X \subseteq R$, si dice maggiorante di X, se esiste, quel numero reale k che è maggiore o uguale di tutti gli elementi dell'insieme X

$$\text{maggiorante}: \exists k \in R \,/\, \forall x \in X : x \leq k$$

Se esiste un minorante h dell'insieme C, esistono infiniti minoranti (per esempio $h-1$ è un altro minorante, $h-2$ $h-3$, ect.)

Se esiste un maggiorane k dell'insieme C, esistono infiniti maggioranti (per esempio $k+1$ è un altro maggiorante, $k+2$ $k+3$, ect.)

1.5 – Estremo inferiore e superiore di un insieme

Sia X un sottoinsieme di R

Si dice estremo inferiore dell'insieme X il più grande dei minoranti.

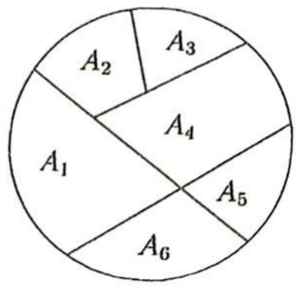
$$\inf X = h \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X : x \geq h \\ \forall \varepsilon > 0 \, \exists \bar{\bar{x}} \in X < h + \varepsilon \end{cases}$$

Si dice estremo superiore dell'insieme X il più piccolo dei maggioranti.

$$\sup X = k \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X : x \leq k \\ \forall \varepsilon > 0 \, \exists \bar{x} \in X > k - \varepsilon \end{cases}$$

1.6 – Partizione di un insieme

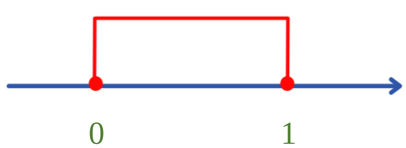
Sia A un insieme, e siano A_1, A_2, …, A_n, n suoi sottoinsiemi.
Si dice che gli n sottoinsiemi formano una partizione di A se, sono a due a due disgiunti e se, la loro unione è uguale all'insieme A. In simboli si ha:
dire che
$\{A_1,\dots,A_n\}$ è una partizione di $A \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i,, j \in \{1,2,\dots,n\}, i \neq j$ e $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$



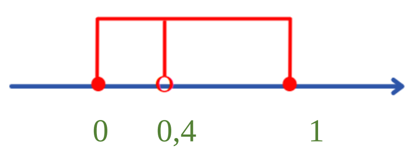
1.7 – Gli intervalli

T *Teorema sulla caratterizzazione degli intervalli*

Sia $I \subseteq R$, con $I \neq 0$
Condizione necessaria e sufficiente affinché I sia un intervallo di R, è:
$(\forall a,b \in I$, con $a<b$, risulta $[a,b] \subseteq I$ o $]a,b[\subseteq I)$ e quindi I è un intervallo



questo è un intervallo
fig. 1.7.1



questo non è un intervallo
fig. 1.7.2

Capitolo 2
Le funzioni

2.1 – Definizione di funzione

Cos'è una funzione?

Dati due insiemi A e B, la funzione è quella legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza A, associa uno ed un solo elemento dell'insieme di arrivo B:
$f : \forall x \in A \rightarrow f(x) = y \in B$

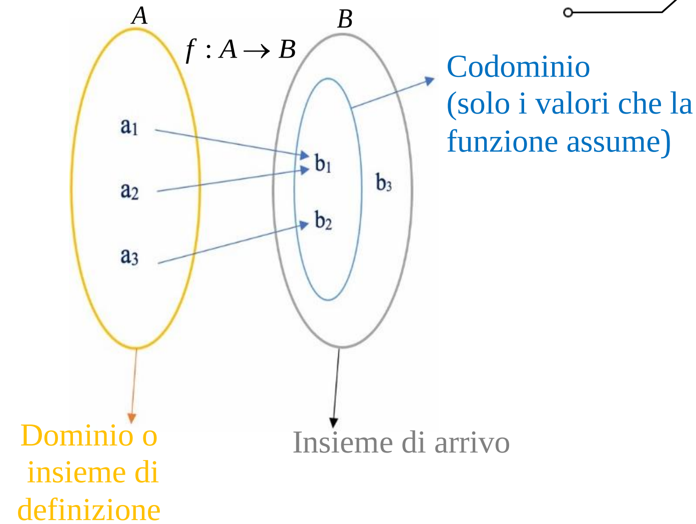
Attenzione:

Quando parliamo dell'insieme di partenza è la stessa cosa di parlare del dominio, mentre l'insieme di arrivo non sempre coincide con il codominio.

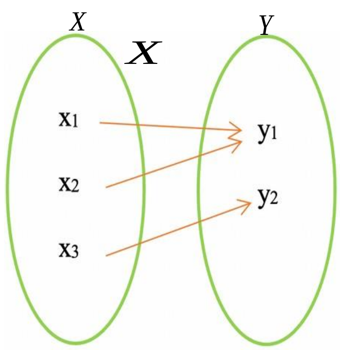
L'immagine

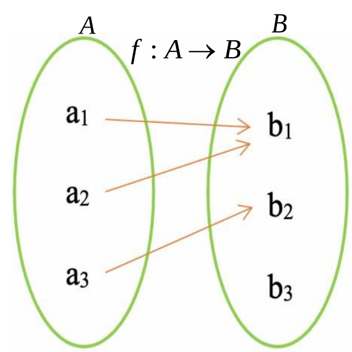
Data una funzione $f : X \rightarrow Y$, si denota con $f(X)$ l'immagine di X tramite la funzione f.
L'immagine contiene tutti i valori della funzione e coincide con il codominio.
Se $f : X \rightarrow Y$, allora insieme di arrivo e codominio coincidano.

Esempi

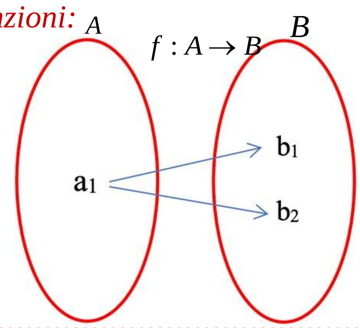


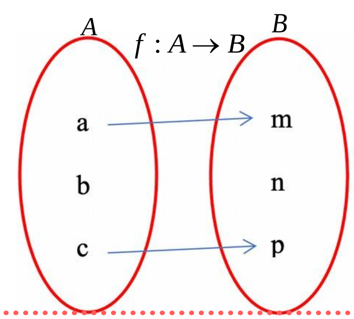
Sono funzioni:





Non sono funzioni:





Questa non è una funzione in quanto ad un elemento di A corrispondono due elementi di B.

Perché non è funzione?

Questa non è una funzione in quanto un elemento di A non ha il corrispondente in B.

Perché non è funzione?

2.2 – Caratteristiche delle funzioni

Funzione ingettiva

Funzione surgettiva

Funzione invertibile

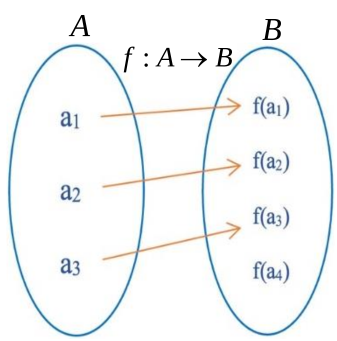
Funzione ingettiva

Una funzione $f: A \to B$ si dice ingettiva se ad elementi distinti del dominio associa valori distinti.

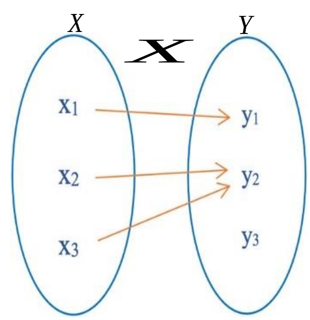
Ovvero:

$$\forall a_1, a_2 \text{ con } a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$$

Esempi



Questa è una funzione ingettiva



Questa non è una funzione ingettiva

Come possiamo conoscere una funzione ingettiva dal grafico?

Facciamo il test della retta orizzontale

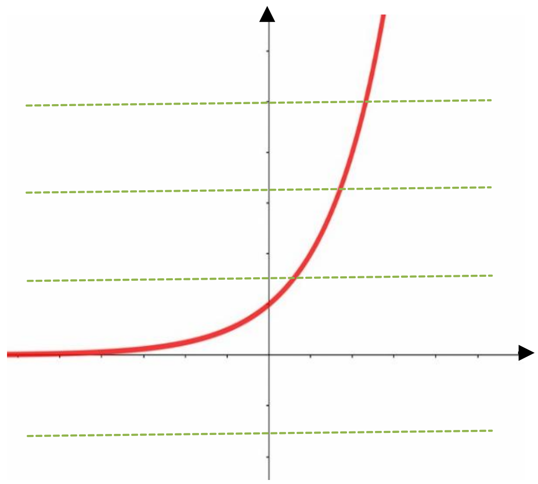


fig.2.2.1

La funzione è ingettiva se comunque si traccia una retta orizzontale, interseca il grafico al più in un solo punto.

Esempi

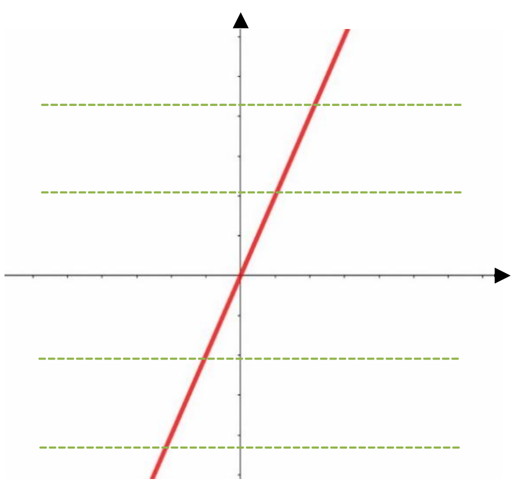


fig.2.2.2

La funzione è ingettiva perché la retta interseca il grafico al più in un solo punto.

$y=mx$

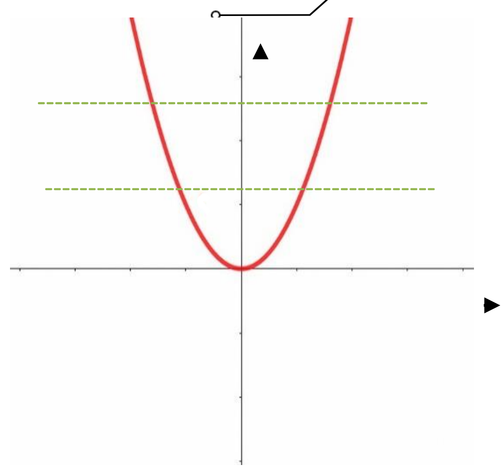


fig.2.2.3

La funzione non è ingettiva perché la retta interseca il grafico in 2 punti.

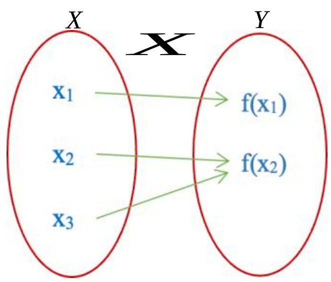
Potenza con "n" pari

Funzione surgettiva

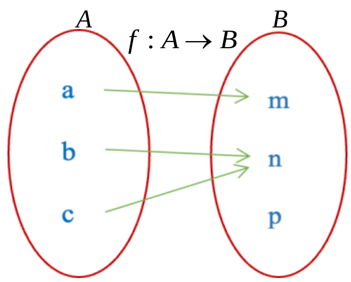
Una funzione $f : A \to B$ si dice surgettiva se ogni elemento del codominio è valore di almeno un elemento dell'insieme del partenza. Ovvero:

$\forall y \in B, \exists x \in A$ tale che $f(x) = y$

Esempi



Questa è una funzione surgettiva



Questa non è una funzione surgettiva

Come possiamo conoscere una funzione surgettiva dal grafico?

Facciamo la prova dell'ombra:

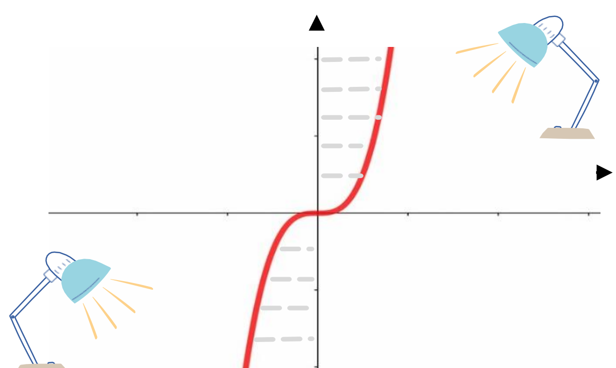


fig.2.2.4

La funzione è surgettiva quando l'ombra del grafico della funzione copre pienamente l'asse delle y.

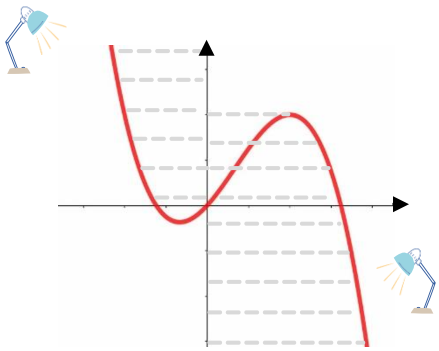


fig.2.2.5

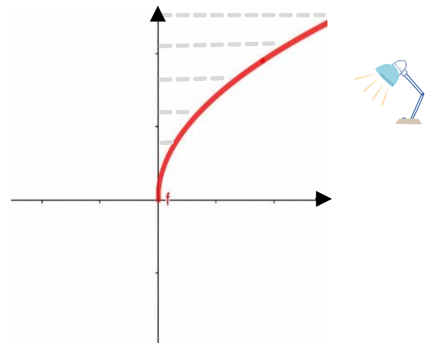


fig.2.2.6

Tale funzione $f(x) = ax^3 + bx^2$ che va da $]-\infty,+\infty[$, con insieme di arrivo R, è surgettiva perché l'ombra copre tutti i valori di R.

Perché è surgettiva?

Tale funzione $f(x) = \sqrt{x}$ che va da $[0,+\infty[$, con insieme di arrivo R, è surgettiva perché l'ombra non copre tutti i valori di R.

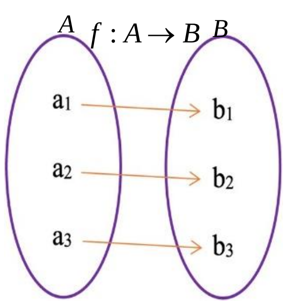
Perché non è surgettiva?

Funzione invertibile

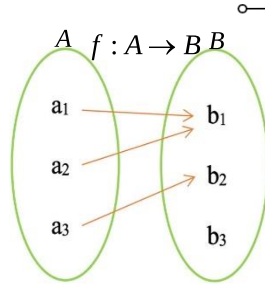
Una funzione $f : A \to B$ si dice biiettiva o invertibile se è sia ingettiva che surgettiva.

$\forall b \in B, \exists$ uno ed un solo elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$

Esempi



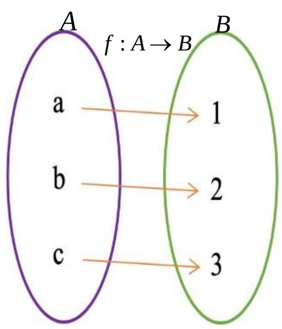
Questa è una funzione invertibile

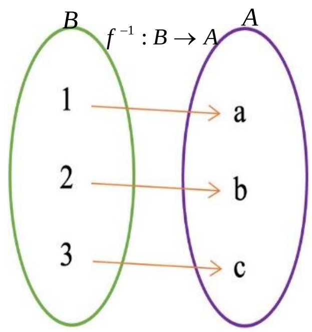


Questa non è una funzione invertibile

Se una funzione è invertibile, la sua inversa si denota: f^{-1}

Graficamente possiamo dire che la funzione è invertibile se soddisfa 2 condizioni:
1. Comunque si traccia una retta orizzontale, deve intersecare il grafico al più in un solo punto.(per essere ingettiva)
2. L'ombra della funzione deve copre pienamente l'asse delle y (Per essere surgettiva)





Come possiamo rendere una funzione invertibile?

Se prendiamo in considerazione la funzione $f(x) = x^n, con "n" \ pari$

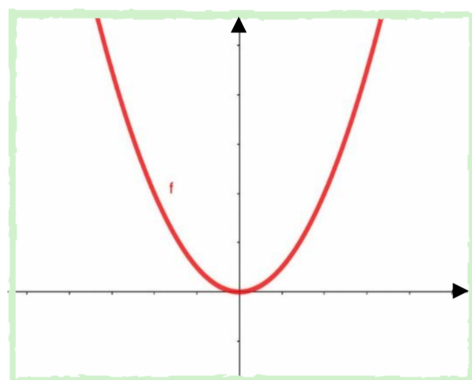


fig.2.2.7

Sia $f: R \to R$

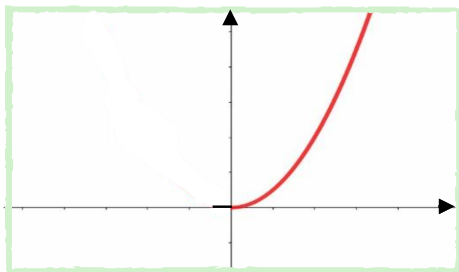
Per poter rendere invertibile tale funzione, che non è ne surgettiva ne ingettiva, operiamo:

1. restrizione (del dominio)
2. riduzione (del codominio)

quindi otteniamo:

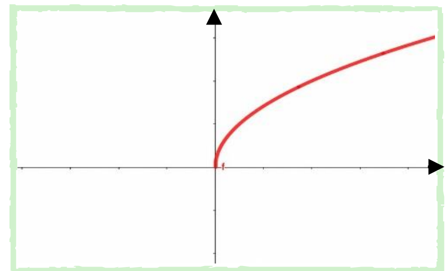
$$\Downarrow$$

$$f_1 : [0;+\infty[\to x^n \in [0;+\infty[$$



Quindi $f_1 : [0;+\infty[\rightarrow x^n \in [0;+\infty[$

fig. 2.2.8



La sua inversa risulta:

$f_1^{-1} : [0;+\infty[\rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0;+\infty[, \, con \, "n" \, pari$

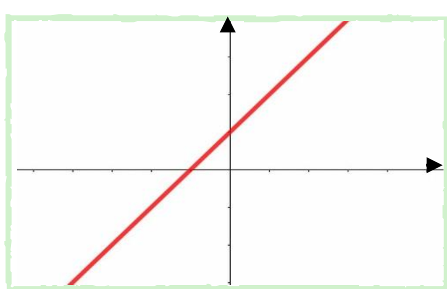
fig. 2.2.9

Come possiamo trovare la funzione inversa di una retta?

Esempi

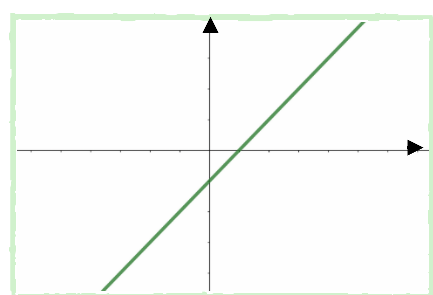
Data la funzione $f : X \rightarrow Y$ tale che $f(x) = y$ del tipo $y = x + 1$ la sua inversa è tale che $f^{-1} : Y \rightarrow X$ e $f^{-1}(y) = x$ del tipo $x = y - 1$

I relativi grafici:



$y = x + 1$

fig.2.2.10



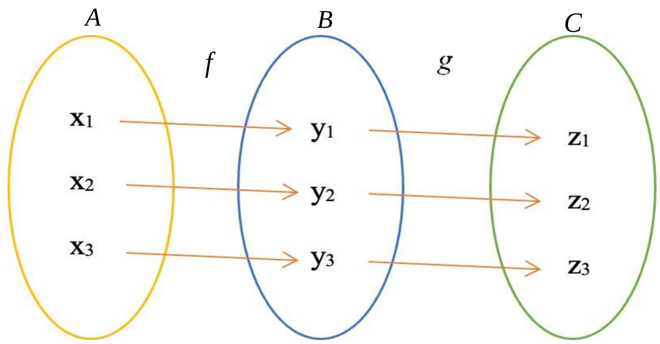
$x = y - 1$

(variabile indipendente è y)

fig.2.2.11

2.3 – Funzione composta

La funzione composta è una funzione che si ottiene mediante l'operazione di composizione tra due o più funzioni.



Sia $f : A \rightarrow B$

Sia $f : B \rightarrow C$

La funzione composta $g \circ f : A \rightarrow g(f(x)) \in C$ ovvero nel dominio della funzione g

Si osserva che g si nutre dei valori di f .

$g \circ f \neq f \circ g$, in quanto $f \circ g = f(g(x))$, mentre $g \circ f = g(f(x))$

$f \circ g$ non è possibile attuarla in quanto $g(B) \not\subset A$

FUNZIONE COMPOSTA CON LA PROPRIA INVERSA

data la funzione: $f : X \rightarrow Y$ e data la sua inversa: $f^{-1} : Y \rightarrow X$

si ha la funzione composta $f \circ f^{-1} : Y \rightarrow Y$ ovvero $f(f^{-1}(y)) = y$

o anche la funzione composta $f^{-1} \circ f : X \rightarrow X$ ovvero $f^{-1}(f(x)) = x$

FUNZIONE INVERSA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\left(f \circ g\right)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Operazioni tra funzioni:

Date le funzioni $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow R$, la funzione h , data da una delle seguenti operazioni: $f + g$, $f \cdot g$, oppure $\dfrac{f}{g}, con\ g \neq 0$, risulta definita nell'intersezione tra gli insiemi di definizione di f e g .

Per esempio $h = f + g : (X \cap Y) \rightarrow (f(x) + g(x)) \in R$

Capitolo 3

Alcune proprietà delle funzioni

3.1 – Minimo e massimo di una funzione

Sia $f : A \to B$

Si dice minimo della funzione f, il più piccolo dei valori che essa assume.

$$\min_{x \in A} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = m \\ \forall x \in A : f(x) \geq m \end{cases}$$

$$\min_{x \in A} f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \in B \\ \forall x \in A : f(x) \geq m \end{cases}$$

Si dice massimo della funzione f, il più grande dei valori che essa assume.

$$\max_{x \in A} f(x) = M \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \bar{x} \in A : f(\bar{x}) = M \\ \forall x \in A : f(x) \leq M \end{cases}$$

$$\max_{x \in A} f(x) = M \Leftrightarrow \begin{cases} M \in f(A) = B \\ \forall x \in A : f(x) \leq M \end{cases}$$

Si nota che le definizioni possono essere espresse nei due modi diversi.

3.2 – Minorante e maggiorante di una funzione

Sia $f : X \to Y$

Si dice minorante della funzione f, quel numero reale che è minore o uguale di tutti i valori della funzione.

$\exists h \in R \,/\, \forall x \in X : f(x) \geq h$

Si dice maggiorante della funzione f, quel numero reale che è maggiore o uguale di tutti i valori della funzione.

$\exists k \in R \,/\, \forall x \in X : f(x) \leq k$

3.3 – L’estremo inferiore e superiore di una funzione

L’estremo inferiore di una funzione è il più grande dei minoranti.

$$\inf_{x\in X} f(x)=h \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in X : f(x)\geq h \\ \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{\bar{x}}\in X : f(\bar{\bar{x}})<h+\varepsilon \end{cases}$$

L’estremo superiore di una funzione è il più piccolo dei maggioranti.

$$\sup_{x\in X} f(x)=k \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in X : f(x)\leq k \\ \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{x}\in X : f(\bar{x})>k-\varepsilon \end{cases}$$

Una funzione è **limitata** se è dotata sia di estremo inferiore, sia di estremo superiore, numeri reali.

Una funzione è **illimitata** se sia l’estremo inferiore, sia l’estremo superiore sono illimitati.

Esempi

1. Se l’estremo superiore di una funzione è $+\infty$, allora la funzione non è limitata superiormente.
2. Se l’estremo inferiore di una funzione è $-\infty$, allora la funzione non è limitata inferiormente.
3. Se l’estremo superiore di una funzione è un numero reale, allora la funzione è limitata superiormente.
4. Se l’estremo inferiore di una funzione è un numero reale, allora la funzione è limitata inferiormente.

3.4 – Monotonia di una funzione

Cosa si intende per monotonia di una funzione?

La monotonia di una funzione è una proprietà che riguarda l'andamento della crescenza o decrescenza della funzione.
Una funzione è monotona se risulta sempre crescente o decrescente

Quando una funzione è strettamente monotona?

Una funzione si dice strettamente monotona se risulta sempre strettamente crescente o strettamente decrescente.

Funzione (strettamente) crescente:

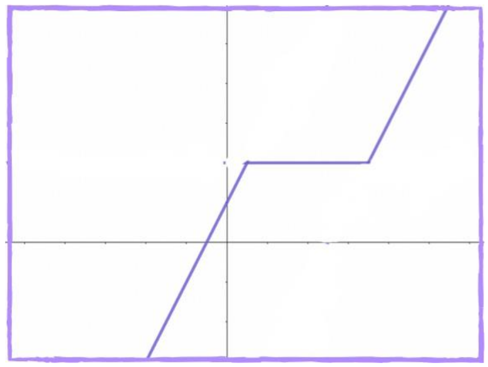
Una funzione $f : X \to R$ si dice:

crescente **nel suo dominio** se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \,/\, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$$

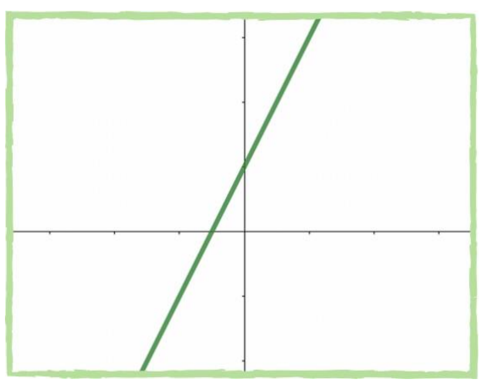
strettamente crescente **nel suo dominio** se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \,/\, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$$



Il grafico della figura 3.4.1 rappresenta una funzione **crescente** perché comunque si prendono 2 punti tali che $x_1 < x_2$ danno valori: $f(x_1) \leq f(x_2)$

fig.3.4.1



Il grafico della figura 3.4.2 rappresenta una funzione **strettamente crescente** perché comunque si prendono 2 punti tali che $x_1 < x_2$ danno valori: $f(x_1) < f(x_2)$

fig.3.4.2

Funzione (strettamente) decrescente:

Una funzione $f: X \rightarrow R$ si dice:

decrescente **nel suo dominio** se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \,/\, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$$

strettamente decrescente **nel suo dominio** se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \,/\, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$$

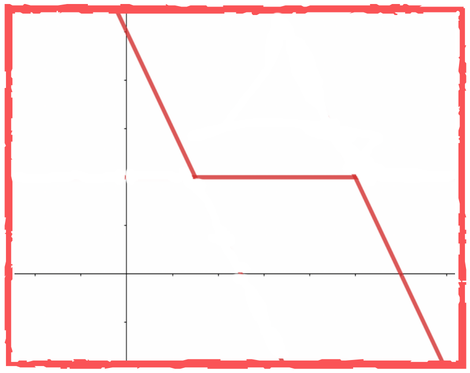


fig.3.4.3

Il grafico della figura 3.4.3 rappresenta una funzione decrescente perché comunque si prendono 2 punti tali che $x_1 < x_2$ danno valori: $f(x_1) \geq f(x_2)$

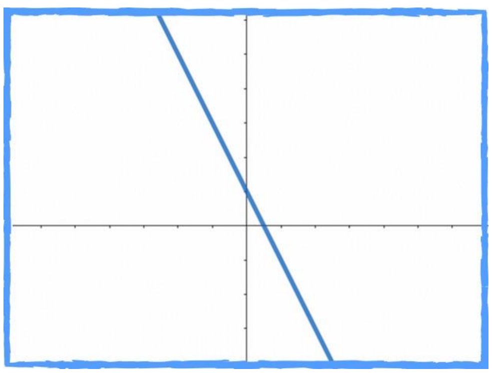


fig.3.4.4

Il grafico della figura 3.4.4 rappresenta una funzione strettamente decrescente perché comunque si prendono 2 punti tali che $x_1 < x_2$ danno valori: $f(x_1) > f(x_2)$

T *Teorema sulla invertibilità di una funzione strettamente monotona.*

Ipotesi

Sia $f : X \to f(X)$
Sia f strettamente monotona

allora

Tesi

f è invertibile

Nota:

La tesi è vera perché se la funzione è strettamente monotona $\Leftrightarrow$ è ingettiva

ed essendo $f(X)$ l'insieme di arrivo $\Leftrightarrow$ è surgettiva

In tal caso la funzione inversa f^{-1} mantiene la stretta monotonia della funzione f. Se ad esempio f è strettamente crescente, f^{-1} sarà strettamente crescente.

3.5 – Funzione convessa e concava

La funzione (strettamente) convessa

Una funzione è convessa in un intervallo, se comunque scelti due punti sul grafico e tracciato un segmento che li congiunge, il segmento sta sempre al di sopra della funzione.

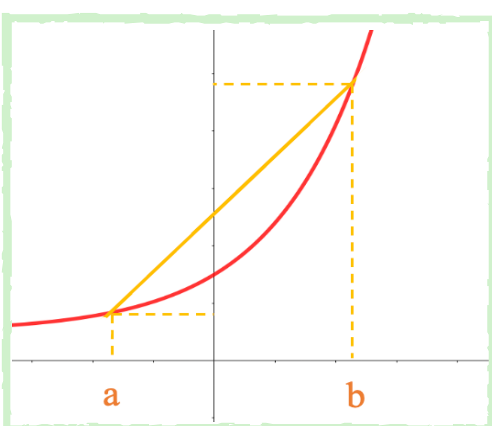


fig.3.5.1

Sia $f: X \to R$

Sia X intervallo,

se $\forall a, b \in X$ e $\forall x \in \left]a; b\right[$

$$f(x) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b)$$

$\Leftrightarrow f$ è convessa;

$$f(x) < \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b)$$

$\Leftrightarrow f$ è strettamente convessa.

La funzione (strettamente) concava

Una funzione è concava in un intervallo, se comunque scelti due punti sul grafico e tracciato un segmento che li congiunge, il segmento sta sempre al di sotto della funzione.

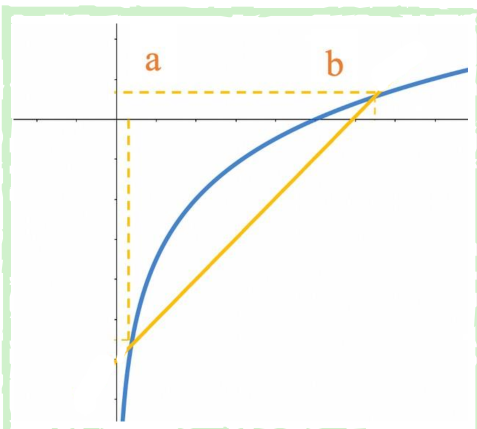


fig.3.5.2

Sia $f : X \to R$
Sia X intervallo,
se $\forall a,b \in X$ e $\forall x \in \left]a;b\right[$

$$f(x) \geq \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b)+f(b)$$

$\Leftrightarrow f$ è concava

$$f(x) > \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b)+f(b)$$

$\Leftrightarrow f$ è strettamente concava

I rispettivi teoremi:

T *Teorema sulla convessità*

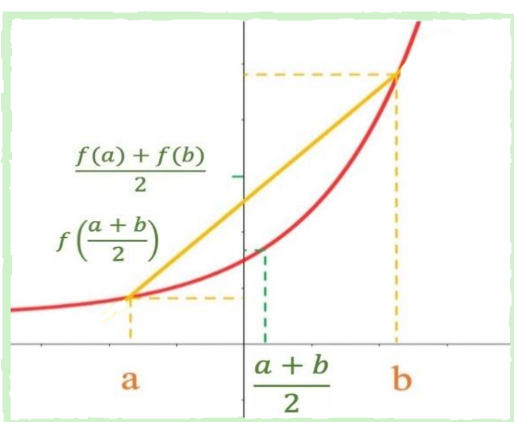


fig.3.5.3

Sia $f : X \to R$
Sia X intervallo e sia $f(X)$ intervallo,
Sia f monotona

La funzione risulta convessa $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \forall a,b \in X$$

La funzione risulta strettamente convessa $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \forall a,b \in X$$

T

Teorema sulla concavità

Sia $f : X \to R$

Sia X intervallo e sia $f(X)$ intervallo,
Sia f monotona

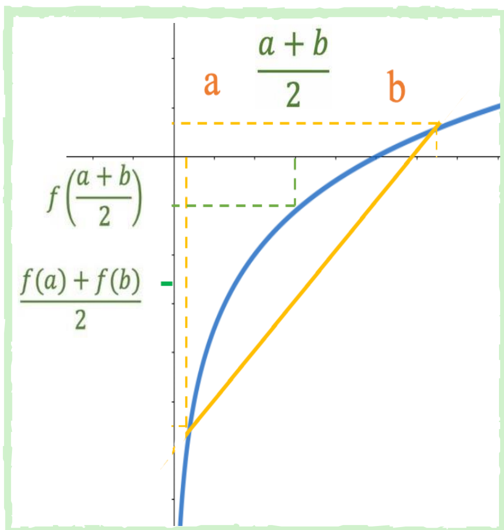


fig.3.5.4

La funzione risulta concava $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\forall a, b \in X$$

La funzione risulta strettamente concava $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\forall a, b \in X$$

3.6 – Funzione periodica

Le funzioni periodiche sono funzioni che hanno la caratteristica di ripetersi in maniera esatta in intervalli regolari del dominio.

Una funzione periodica è definita in tutto R.

Una funzione si dice periodica se esiste un $w \in R^+$ e si dice $w-$periodica se

$$\forall x \in R, f(x) = f(x+kw), \forall k \in Z$$

Esempio

Data la funzione $\forall x \in R,\ f(x) = x - k, \forall x \in [k, k+1]$

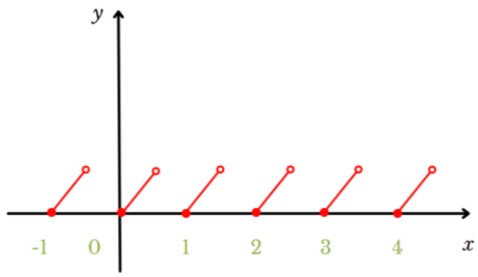


fig.3.6.1

Capitolo 4

Alcune funzioni elementari

4.1 – Grafici e proprietà

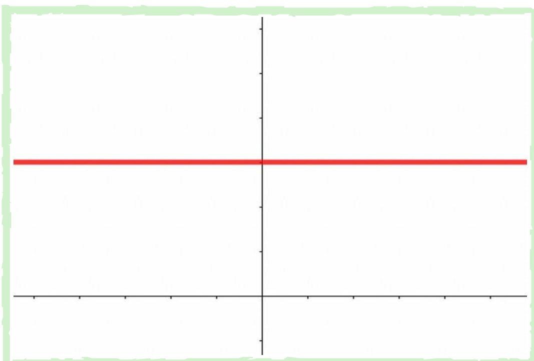


fig. 4.1.1

Funzione costante

$f : \forall x \in R \to f(x) = y = c \in R$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: c
Invertibilità: funzione ne ingettiva ne surgettiva
Monotonia: ne crescente, ne decrescente
Funzione limitata

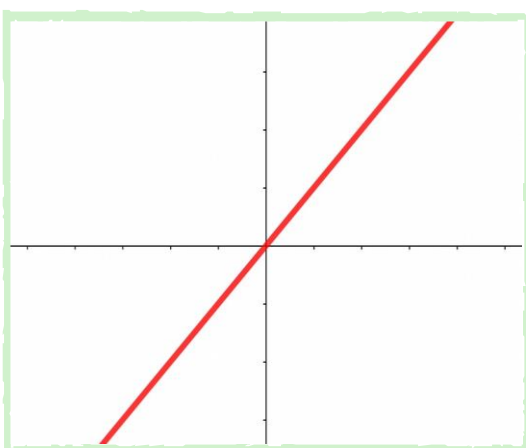


fig. 4.1.2

Funzione identica

$f : \forall x \in R \to f(x) = y = x \in R$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: R
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = x$)
Monotonia: strettamente crescente
Funzione illimitata

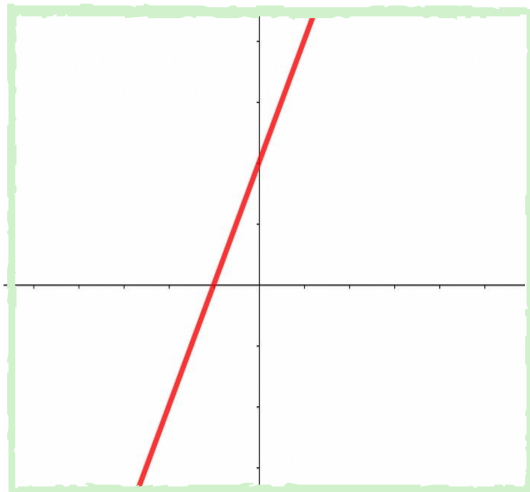


fig. 4.1.3

Funzione retta

$$f:\forall x\in R\rightarrow f(x)=y=(mx+c)\in R$$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: R
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y)=\dfrac{y-c}{m}$)
Monotonia: in base al coefficiente, può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente
Funzione illimitata

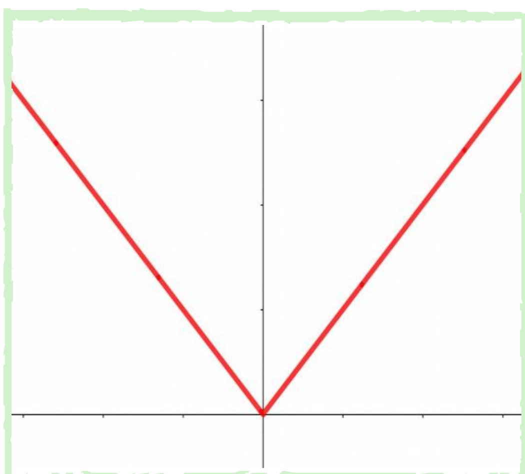


fig. 4.1.4

Funzione valore assoluto

$$f:\forall x\in R\rightarrow f(x)=y=|x|\in[0;+\infty[$$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $[0;+\infty[$
Invertibilità: funzione surgettiva, ma non ingettiva
Monotonia: strettamente crescente: $]0,+\infty[$
strettamente decrescente: $]-\infty,0[$
Per tanto 0 è un punto di minimo.
Funzione limitata inferiormente

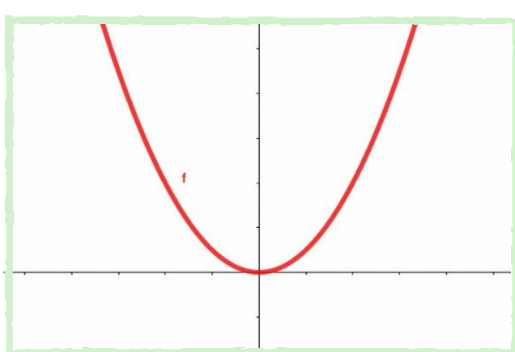


fig. 4.1.5

Funzione potenza con "n" pari

$$f:\forall x\in R\rightarrow f(x)=y=x^n\in[0;+\infty[$$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $[0;+\infty[$
Invertibilità: funzione surgettiva, ma non ingettiva

Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio: $[0;+\infty[$

(Funzione inversa: $f^{-1}(y)=\sqrt[n]{x}$)

Monotonia: strettamente crescente: $]0,+\infty[$
strettamente decrescente: $]-\infty,0[$
Per tanto 0 è un punto di minimo.
Concavità/convessità: funzione strettamente convessa
Funzione illimitata superiormente

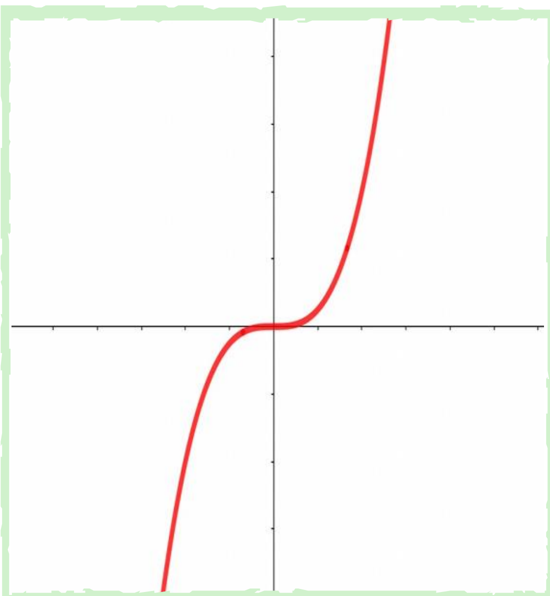


fig. 4.1.6

Funzione potenza con "n" dispari

$$f:\forall x\in R\rightarrow f(x)=y=x^{n}\in R$$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: R
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y)=x=\sqrt[n]{y}$)
Monotonia: strettamente crescente
Concavità/convessità:
strettamente concava: $]-\infty,0[$
strettamente convessa: $]0,+\infty[$
Per tanto 0 è un punto di flesso proprio.
Funzione illimitata

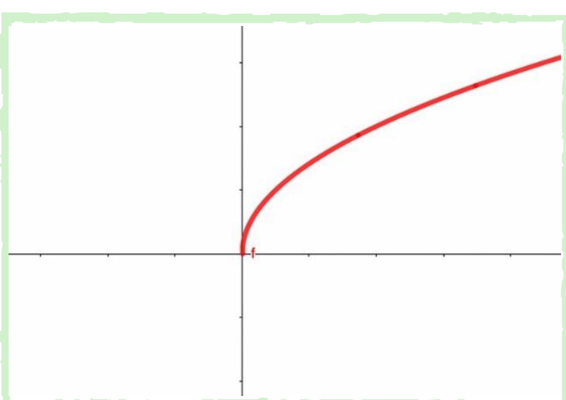


fig. 4.1.7

Funzione radice con "n" pari

$$f:\forall x\in[0;+\infty[\rightarrow f(x)=y=\sqrt[n]{x}\in[0;+\infty[$$

Proprietà:

Dominio: $[0;+\infty[$
Codominio: $[0;+\infty[$
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile

(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = x = y^n$)

Monotonia: strettamente crescente:
Concavità/convessità: funzione strettamente concava
Funzione limitata inferiormente

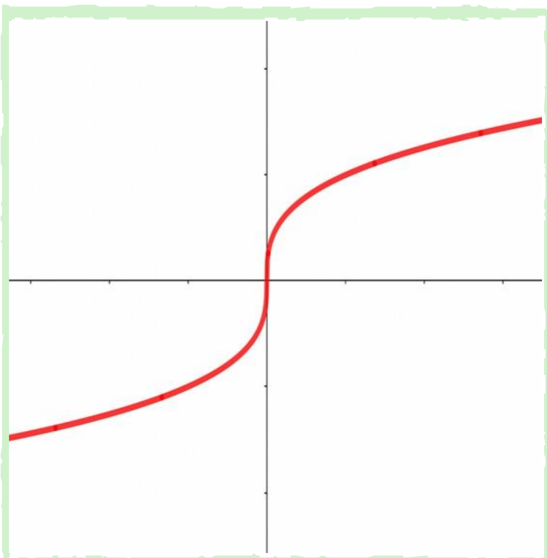


fig. 4.1.8

Funzione radice con "n" dispari

$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = \sqrt[n]{x} \in R$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: R
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = x = y^n$)
Monotonia: strettamente crescente
Concavità/convessità:
strettamente concava: $]0,+\infty[$
strettamente convessa: $]-\infty,0[$
Per tanto 0 è un punto di flesso proprio.
Funzione illimitata

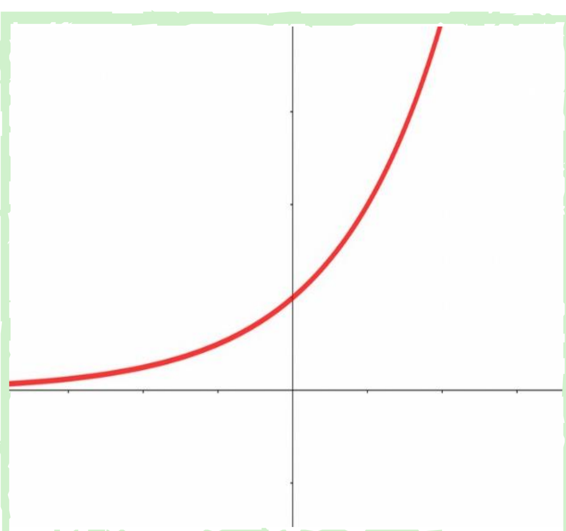


fig. 4.1.9

Funzione esponenziale con $a > 1$

$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = a^x \in]0,+\infty[$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $]0,+\infty[$
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = \log_a y$)
Monotonia: strettamente crescente:
Concavità/convessità: funzione strettamente convessa
Funzione limitata inferiormente

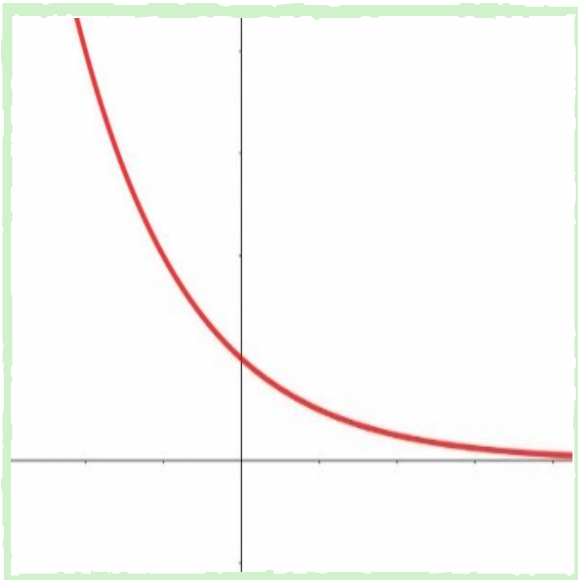


fig. 4.1.10

Funzione esponenziale con $0 < a < 1$

$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = a^x \in]0,+\infty[$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $]0,+\infty[$

Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$
funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = \log_a y$)
Monotonia: strettamente decrescente:
Concavità/convessità: funzione strettamente convessa
Funzione illimitata superiormente

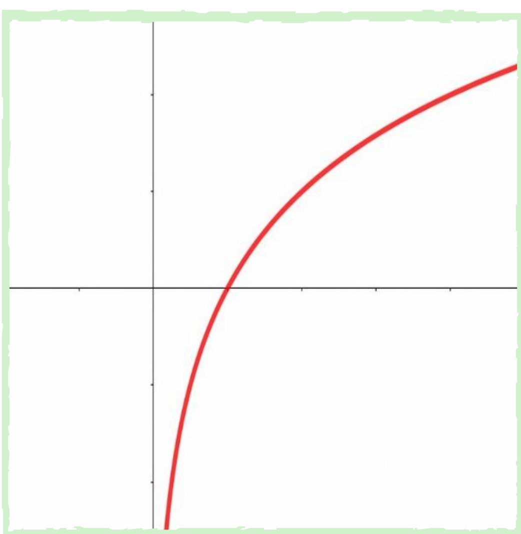


fig. 4.1.11

Funzione logaritmico con $a > 1$

$f : \forall x \in]0,+\infty[\rightarrow f(x) = y = \log_a x \in R$

Proprietà:

Dominio: $]0,+\infty[$
Codominio: R
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = a^y$)
Monotonia: strettamente crescente:
Concavità/convessità: funzione strettamente concava
Funzione illimitata

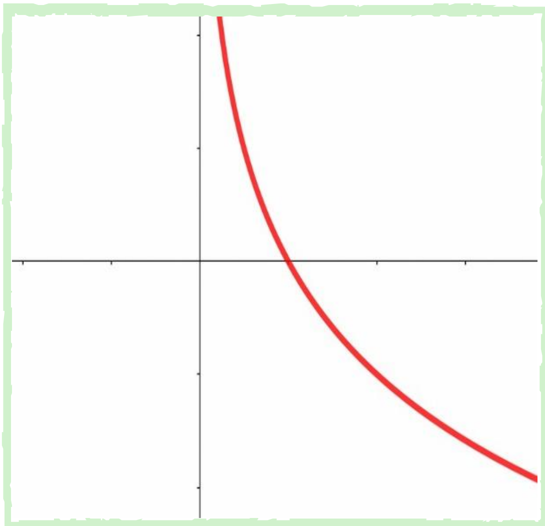


fig. 4.1.12

Funzione logaritmico con $0 < a < 1$

$f : \forall x \in \left]0, +\infty\right[\rightarrow f(x) = y = \log_a x \in R$

Proprietà:

Dominio: $\left]0, +\infty\right[$
Codominio: R
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva
$\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = a^y$)
Monotonia: strettamente decrescente:
Concavità/convessità: funzione strettamente convessa
Funzione illimitata

Funzioni trigonometriche

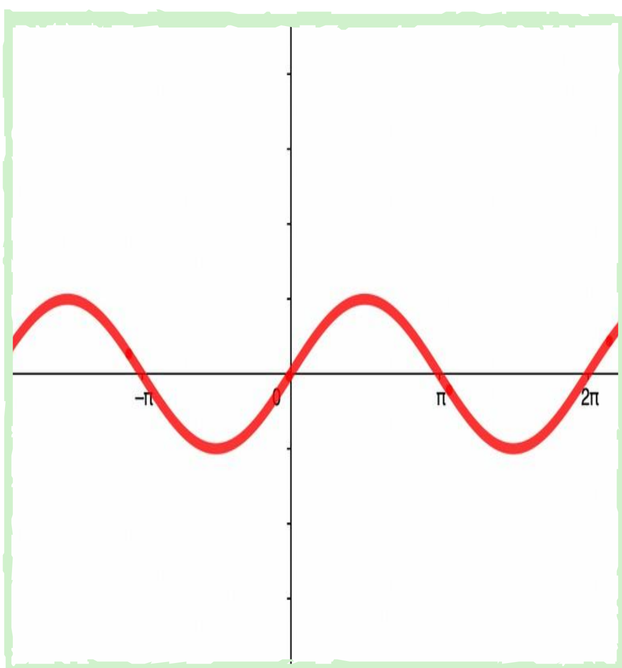


fig. 4.1.13

Funzione seno

$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = sen(x) \in [-1, 1]$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $[-1, 1]$
Invertibilità: funzione surgettiva, ma non ingettiva
Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio:

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = arcsen(y)$)
Funzione periodica:
$f(x) = f(x + k2\pi), \forall k \in Z$
Funzione limitata

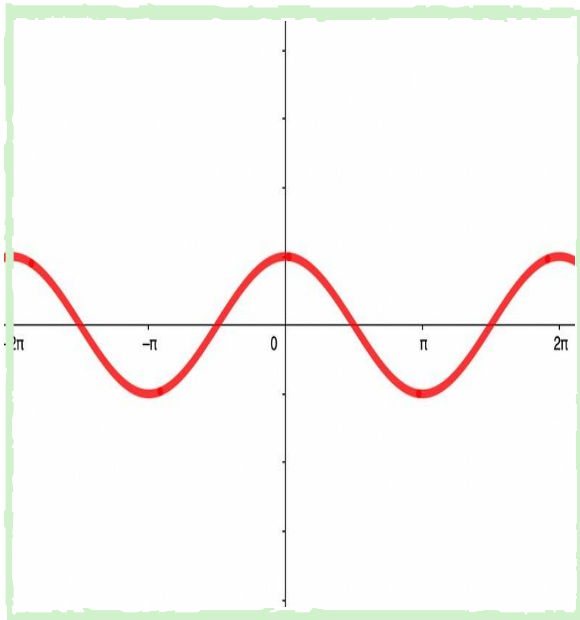


fig. 4.1.14

Funzione coseno

$f: \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = \cos(x) \in [-1,1]$

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $[-1,1]$
Invertibilità: funzione surgettiva, ma non ingettiva
Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio: $[0, \pi]$
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = \arccos(y)$)
Funzione periodica:
$f(x) = f(x + k2\pi), \forall k \in Z$
Funzione limitata

Funzione tangente

$$f: \forall x \in R - \left\{ \bigcup_{k \in Z} \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow f(x) = y = tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \in R$$

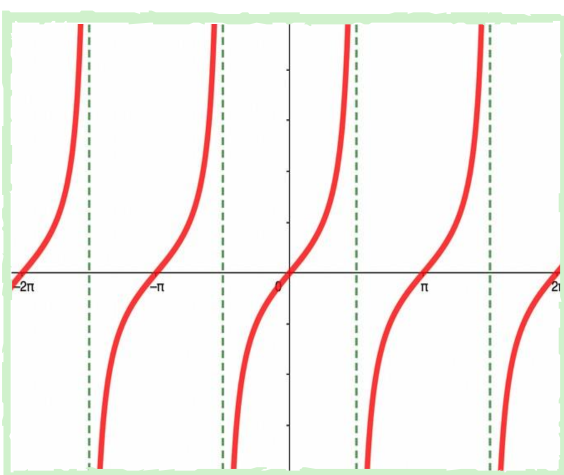


fig. 4.1.15

Proprietà:

Dominio: $R - \left\{ \bigcup_{k \in Z} \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \forall k \in Z$

Codominio: R
Invertibilità: funzione surgettiva, ma non ingettiva
Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio: $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = arctg(y)$)
Monotonia: strettamente crescente
Funzione illimitata

Funzione cotangente

$$f: \forall x \in R - \left\{\bigcup_{k \in Z} k\pi\right\} \to f(x) = y = \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)} \in R$$

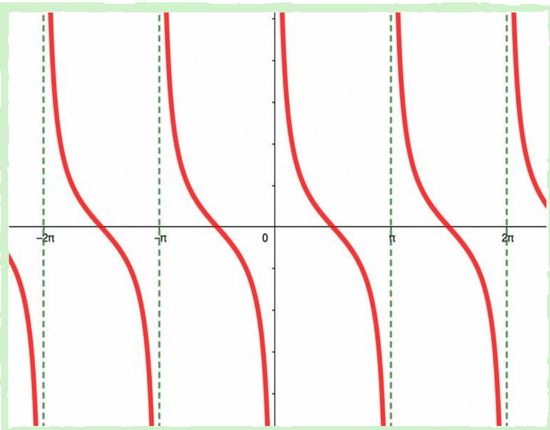


fig. 4.1.16

Proprietà:

Dominio: $R - \left\{\bigcup_{k \in Z} k\pi\right\}, \forall k \in Z$

Codominio: R

Invertibilità: funzione surgettiva, ma non ingettiva

Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio: $]0, \pi[$

(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = \operatorname{arccotg}(y)$)

Monotonia: strettamente decrescente

Funzione illimitata

Funzione arcoseno

(funzione inversa di una restrizione della funzione seno)

$$f: \forall x \in [-1,1] \to f(x) = y = arcsen(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

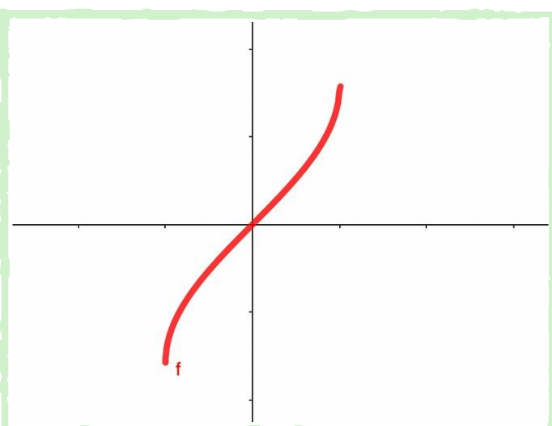


fig. 4.1.17

Proprietà:

Dominio: $[-1,1]$

Codominio: R

Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva $\Leftrightarrow$ funzione invertibile

(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = sen(y)$)

Monotonia: strettamente crescente

Concavità/convessità: strettamente convessa: $]-1,0[$

strettamente concava: $]0,1[$

Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.

Funzione limitata

Funzione arcocoseno
(funzione inversa di una restrizione della funzione coseno)

$$f: \forall x \in [-1,1] \rightarrow f(x) = y = arcsen(x) \in [0, \pi]$$

Proprietà:

Dominio: $[-1,1]$
Codominio: $[0, \pi]$
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva $\Leftrightarrow$ funzione invertibile

(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = \cos(y)$)

Monotonia: strettamente decrescente

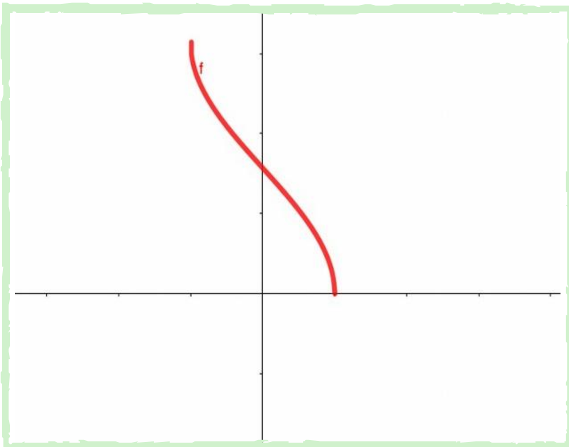


fig. 4.1.18

Concavità/convessità:
strettamente convessa: $]-1,0[$
strettamente concava: $]0,1[$
Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.
Funzione limitata

Funzione arcotangente
(funzione inversa di una restrizione della funzione tangente)

$$f: \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = arctg(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Proprietà:

Dominio: R

Codominio: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva $\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y) = tg(y)$)

Monotonia: strettamente decrescente

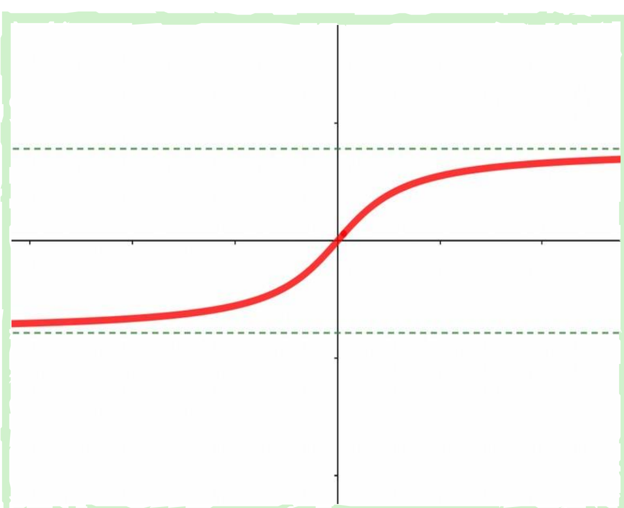


fig. 4.1.19

Concavità/convessità:
strettamente convessa: $]-\infty,0[$
strettamente concava: $]0,+\infty[$
Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.
Funzione limitata

Funzione arcocotangente
(funzione inversa di una restrizione della funzione cotangente)

$$f:\forall x\in R\rightarrow f(x)=y=\text{arccotg}(x)\in\left]0,\pi\right[$$

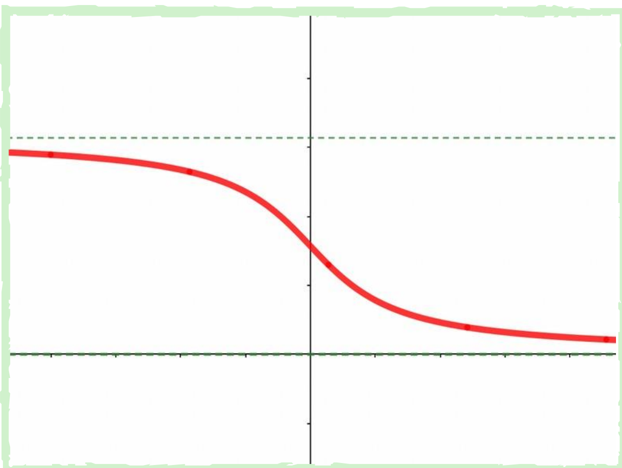


fig. 4.1.20

Proprietà:

Dominio: R
Codominio: $]0,\pi[$
Invertibilità: funzione sia ingettiva che surgettiva $\Leftrightarrow$ funzione invertibile
(Funzione inversa: $f^{-1}(y)=\text{cotg}(y)$)

Monotonia: strettamente decrescente

Concavità/convessità:
strettamente convessa: $]0,+\infty[$
strettamente concava: $]-\infty,0[$
Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.
Funzione limitata

4.2 – L'equazione della retta

Definizione

L'equazione di una retta è quell'equazione di primo grado che individua tutti i valori passanti per 2 punti di un piano cartesiano.

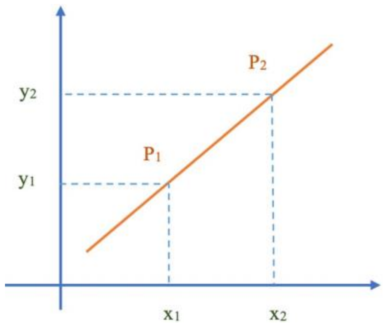


fig. 4.2.1

Dati 2 punti:

$P_1 = (x_1, y_1)$

$P_2 = (x_2, y_2)$

L'equazione della retta risulta espressione della seguente uguaglianza:

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x - x1}$$

che esplicitata in termine di funzione si ha:

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1}(x - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1}(x - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1}(x - x_1) = (x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1}(y - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$\frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = y - y_1$$

quindi l'equazione della retta $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) + y_1 = y$

con $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = m$ che rappresenta il coefficiente angolare della retta.

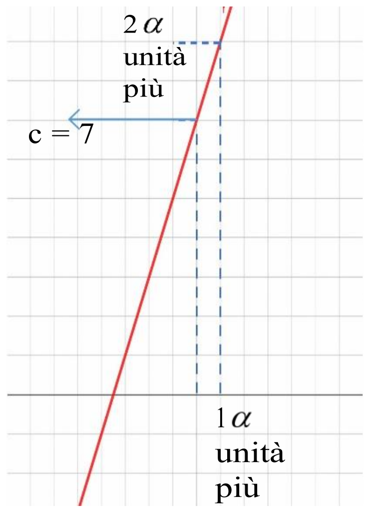
e con $y - x_1 \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = c$ che rappresenta il punto in cui la funzione interseca l'asse delle y (detto anche intercetta). Si osservi inoltre che la retta passa per il punto

Per cui in questo caso la retta passante per il punto x_1, y_1 risulta: $y = m(x - x_1) + y_1)$

Pertanto l'equazione della retta in forma esplicita risulta: $y = mx + c$

Data la retta $y = 2x + 7$, il coefficiente angolare è $m = 2$, e come vediamo nel grafico, per una unità della variabile indipendente $\alpha = alfa$, la funzione fornisce 2 unità della variabile indipendente y , oltre l'intercetta.

Il termine c in questo caso è uguale a 7, quindi il grafico interseca l'asse delle y nel punto (0,7)



Se consideriamo 2 rette $y_1 = m_1 x + c_1$ e $y_2 = m_2 x + c_2$ con $m_1 = m_2$ le due rette sono parallele tra di loro.

Se $m_1 = m_2 \Leftrightarrow r_1 \| r_2$
ovvero r_1 parallela con r_2.

La condizione necessaria e sufficiente per la perpendicolarità tra due rette di equazione rispettivamente:

$y_1 = m_1 x + c_1$ e $y_2 = m_2 x + c_2$ con $m_1 \neq 0$ risulta:

$$m_1 \cdot m_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Leftrightarrow r_1 \perp r_2$$

r_1 risulta perpendicolare con r_2.

Come possiamo
usare queste
conclusioni
nell’atto pratico?

Esempi

Esercizio
1

Date le due rette $2x - y - 3$ e $x - y = -1$ si determini l’eventuale intersezione.

Soluzione

1. Si noti che le due rette non sono parallele, pertanto la loro intersezione sarà la soluzione del seguente sistema.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ 2x - (x+1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ 2x - x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 1 = y \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Quindi, le due rette si intersecano nel punto $(4,5)$

Esercizio
2

a) Scrivere l’equazione della $m_1 = m_2 \Leftrightarrow r_1 \parallel r_2$ passante per il punto $(0,1)$ e avente lo stesso coefficiente angolare della retta r_2 passante per i punti $(2,1)$ e $(3,3)$.

b) Calcolare il punto di intersezione tra la retta [illegible] e la retta di equazione: $y = 3 - x$

Soluzione

a.1. Calcoliamo il coefficiente angolare della rete r_2 .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

Siccome la retta [illegible] ha lo stesso coefficiente angolare della retta r_2, quindi il coefficiente della retta $r_1 = 2$.

a.2. Troviamo l'equazione della retta [illegible]

Ricordiamo l'equazione della retta passante per il punto (x_1, y_1): $y = m(x - x_1) + y_1)$

Sapendo che la retta [illegible] ha un coefficiente angolare pari a 2, e passa per il punto $P_1 = (0,1)$ sostituiamo i valori di m , e $P_1 = (0,1)$ nell'equazione della retta.

$$y = 2(x - 0) + 1$$
$$y = 2x + 1$$

b. Calcoliamo il punto di intersezione tra le due rette osservata

Si noti che le due rette non sono parallele in quanto i coefficienti angolari non sono uguali, pertanto la loro intersezione sarà la soluzione di questo sistema.

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 2x + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3x \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 3 - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza, il punto di intersezione tra le due rette risulta $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Esercizio 3

a) Scrivere l'equazione della rette [illegible] passante per i punti $(2,1)$ e $(-1,2)$.

b) Stabilire se la retta [illegible] interseca la retta r_2: $2x - 3y + 4 = 0$.

Soluzione

a.1. Calcoliamo il coefficiente angolare della rette passante per i punti $P_1 = (2,1)$ $P_2 = (-1,2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

a.2. Troviamo l'equazione della retta r_1.

Sapendo l'equazione di una retta: $y = m(x - x_1) + y_1)$.

La retta r_1 ha il coefficiente angolare $m = -\frac{1}{3}$ e passa per il punto $P_1 = (2,1)$ e quindi per trovare l'equazione della retta è necessario sostituire i valori x e y di $P_1 = (2,1)$

$$y = -\frac{1}{3}(x-2) + 1 == -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$-\frac{1}{3}x + y - \frac{5}{3} = 0$$

b. Stabiliamo se la retta r_1 interseca la retta r_2 : $2x - 3y + 4 = 0$.

Siccome r_1 e r_2 hanno coefficienti angolari diversi, il punto di intersezione tra di loro, sarà punto di soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ \frac{1}{3}x + y - \frac{5}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ \frac{1}{3}x + y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3\left(-\frac{1}{3}x - \frac{59}{33}\right) = -4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x + 5 = -4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -9 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{1}{3}(-3) + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{8}{9} \end{cases}$$

Di conseguenza, il punto di intersezione risulta $\left(-3, \frac{8}{9}\right)$

Distanza tra punti e rette

Iniziamo con l'osservare la distanza tra due punti:

Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$

Per il Teorema di Pitagora, possiamo scrivere che la distanza fra questi punti è:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

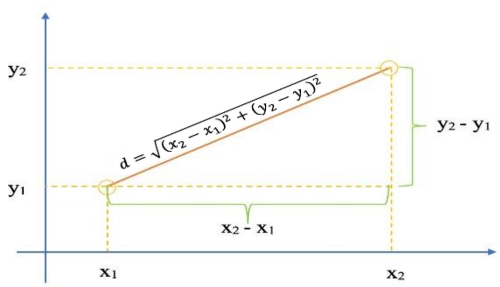


fig. 4.2.3

Distanza tra una retta e un punto:

Sia data una generica retta: $r : ax + by + c = 0$ ed un punto $A = (x_0, y_0)$.

La distanza tra il punto A e la retta r risulta: $d(A, r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Esempio

Calcolare la distanza del punto $A = (1,4)$, dalla retta di equazione $2x - 3y + 5 = 0$

Soluzione

$$d(A,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|(2\cdot 1)-(3\cdot 4)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|2-12+5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|-5|}{\sqrt{13}}=\frac{5}{\sqrt{13}}$$

4.3 – Valore assoluto

Parlare della funzione valore assoluto di un numero reale $x \in R$, equivale a scrivere $|x|$ e tale valore risulta:

$$|x|=\begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo subito affermare che $|x| \geq 0$ risulta vero $\forall x \in R$.

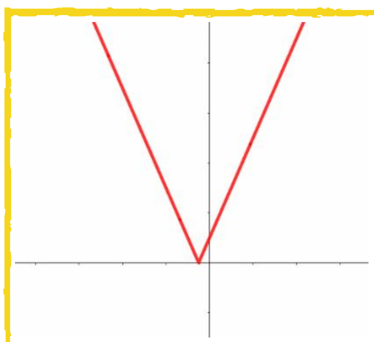


fig. 4.3.1

Esempi

$$|3| = 3 \text{ e } |-3| = -(-3) = 3;$$

oppure, parlare della funzione $2x+1$, in valore assoluto, equivale a scrivere:

$$|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & se\ 2x+1 \geq 0 (se\ x \geq -\frac{1}{2}) \\ -2x-1 & se\ 2x+1 < 0 (se\ x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Alcune sue proprietà

Se consideriamo qualsiasi numero $\alpha \in R$ e poniamo il caso che sia negativo, $\alpha \leq 0$, possiamo subito affermare che:

$|x| \geq \alpha$ risulta sempre vera, $\forall x \in R$;

Nel caso in cui il numero reale sia positivo, $\alpha > 0$ allora:

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \alpha \\ -x \geq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} se\, x \geq 0 \\ se\, x < 0 \end{matrix}$$

ovvero

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, -\alpha\right] \cup \left[\alpha, +\infty\right[$$

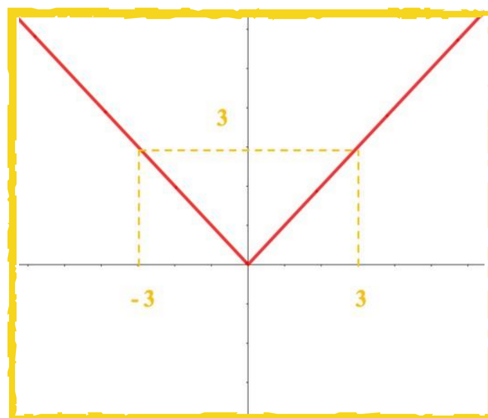


fig. 4.3.2

Come si può osservare dal grafico della fig. 4.3.2, nel caso consideriamo $\alpha = 3$, la funzione valore assoluto assume valori maggiori di 3, solo se consideriamo valori della variabile indipendenti a destra di 3 ed a sinistra di -3.

Naturalmente nel caso si volessero considerare le seguenti disuguaglianze:

$$|x| > \alpha$$
$$|x| < \alpha$$

Vanno fatti gli stessi ragionamenti di cui sopra, nel rispetto della stretta disuguaglianza.

Infine, con $x, y \in R$ e con $y \neq 0$ risultano interessanti le seguenti relazioni:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Capitolo 5
I limiti

5.1 – Concetti preliminari

Intorno di un punto

Si definisce intorno di un punto $x_0 \in R$ un intervallo aperto con centro in x_0 e si denota con I_{x_0}, ovvero $\forall \delta > 0, I_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

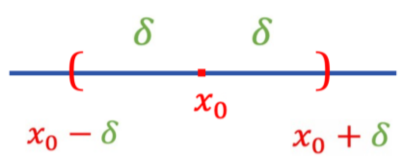


fig. 5.1.1

Punto di accumulazione

Si definisce $x_0 \in R$ punto di accumulazione per/di $X \subseteq R$ se comunque preso I_{x_0} risulta:

$$I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \neq \phi$$

Se consideriamo l'intervallo $X = \left]0,1\right[$ con $x_0 = 0$

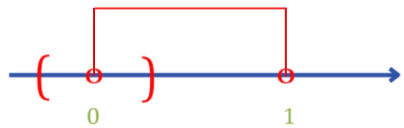


fig. 5.1.2

Come si evince dal grafico, risulta che per ogni intorno di 0, l'intersezione con l'intervallo $\left]0,1\right[$ è sempre diversa dal vuoto. Pertanto 0 è un punto di accumulazione per $\left]0,1\right[$.

Definito in simboli si ha: $\forall I_0, I_0 \cap \left]0,1\right[- \{0\} \neq 0$

Punto isolato

Si definisce $x_0 \in X$ punto isolato per/di $X \subseteq R$ se $\exists I_{x_0}$ tale che

$$I_{x_0} \cap X - \{x_0\} = \phi$$

Se consideriamo l'insieme Z ed $x_0 = -1$

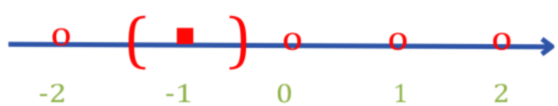


fig. 5.1.3

Si osserva che esiste un intorno di -1, la cui intersezione con Z tranne il punto -1 è vuota.

Pertanto -1 è un punto isolato di Z.

Definito in simboli: $\exists I_{-1}, I_{-1} \cap Z - \{-1\} = \phi$

5.2 – Definizione di limite

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

$\widehat{R}$ (R ampliato) significa $R \cup \pm \propto$

$x_0 \in R$	$x_0 = +\propto$ $\sup X = +\propto$	$x_0 = -\propto$ $\sup X = -\propto$
x_0 è un punto di accumulazione per X	X non è limitato superiormente	X non è limitato inferiormente

$\Leftrightarrow f$ è regolare nel punto x_0

Pertanto se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \widehat{R}$

Il limite esiste se, sia il limite a sinistra, sia il limite a destra sono uguali.

$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x)$

$L \in R$	$L = +\propto$	$L = -\propto$
$\Leftrightarrow f$ è **convergente** nel punto in cui stiamo facendo il limite	$\Leftrightarrow f$ è **divergente** positivamente	$\Leftrightarrow f$ è **divergente** negativamente

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $L \in \widehat{R}$

Per definizione di limite se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \widehat{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall I_L \exists I_{x_0}$ tale che se prendo $x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\}: f(x) \in I_L$

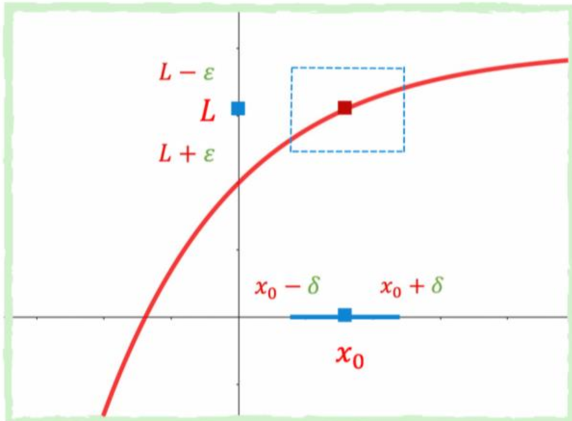


fig. 5.2.1

Si noti che la grandezza dell'intorno di x_0 dipende dalla grandezza dell'intorno di L

Tale definizione di limite può essere espressa nei seguenti altri modi:

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $L \in \widehat{R}$

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \widehat{R}$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \cap \underbrace{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[}_{I_{x_0}} : f(x) \in \underbrace{]L - \varepsilon, L + \varepsilon[}_{I_L}$$

Si osserva:

$f(x) \in I_L$
$\Leftrightarrow f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$
$\Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$
$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$
$\Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$x \in I_{x_0}$
$\Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$
$\Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$
$\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$

$|x - x_0| > 0 \quad x \neq x_0$
$|x - x_0| > 0$

Quindi riportiamo la definizione di limite alla luce delle osservazioni fatte:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

Da tale ultima definizione risulta semplice articolare la stessa in base al valore assunto da x_0 e da L.

Pertanto se $x_0 \in \widehat{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in R \\ x_0 = +\infty \\ x_0 = -\infty \end{cases}$ e se $L \in \widehat{R} \Leftrightarrow \begin{cases} L \in R \\ L = +\infty \\ L = -\infty \end{cases}$

possono combinarsi i seguenti 9 casi di definizione di limite

I CASO

Sia $f: X \to R$

Siano $x_0 \in R$ ed $L \in R$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

II CASO

Sia $f: X \to R$

Siano $x_0 \in R$ ed $L \in +\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; 0 < |x - x_0| < \delta : f(\mathrm{x}) > \varepsilon$

in quanto $I_L =]\varepsilon, +\infty[, I_{+\infty} \; con \; \varepsilon > 0$ si ha $f(x) \in I_L \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

III CASO

Sia $f: X \to R$

Siano $x_0 \in R$ ed $L \in -\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) < -\varepsilon$

in quanto $I_L =]-\infty, -\varepsilon[, I_{-\infty} : allora \;\; f(x) \in I_L \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

IV CASO

Sia $f : X \to R$

Siano $x_0 \in +\infty$ ed $L \in R$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; x > \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

In quanto $I_{x_0} =]\delta, +\infty[$

V CASO

Sia $f : X \to R$

Siano $x_0 \in -\infty$ ed $L \in R$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; x < -\delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

In quanto $I_{x_0} =]-\infty, -\delta[$

VI CASO

Sia $f : X \to R$

Siano $x_0 \in +\infty$ ed $L \in +\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; x > \delta : f(x) > \varepsilon$

VII CASO

Sia $f : X \to R$

Siano $x_0 \in +\propto$ ed $L \in -\propto$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; x > \delta : f(\text{x}) < \text{-}\varepsilon$

VIII CASO

Sia $f : X \to R$

Siano $x_0 \in -\propto$ ed $L \in -\propto$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; x < -\delta : f(\text{x}) < \text{-}\varepsilon$

IX CASO

Sia $f : X \to R$

Siano $x_0 \in -\propto$ ed $L \in +\propto$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; t.c \; se \; x \in X \; e \; se \; x < -\delta : f(\text{x}) > \varepsilon$

Limiti di operazioni tra funzioni

Sia $f : X \to R$

Sia $g : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Sia $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$

allora $\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

allora $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, con\ g(x) \neq 0\ e\ M \neq 0$

5.3 – Teoremi sui limiti

T *Teorema dell'unicità del limite*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $L \in \widehat{R}$

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

allora

Tesi

Il limite è unico.

Dimostrazione

Si procede per assurdo, quindi poniamo che esistono due limiti diversi, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ ed $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, con $L_1 \neq L_2$. Conseguentemente esisteranno due intorni $I_{L_1}\ e\ I_{L_2}$, tali che $I_{L_1} \cap I_{L_2} = \phi$.

Richiamando la definizione di limite si ha per il primo limite, in corrispondenza di $I_{L_1} : \exists I'x_0 \; t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I'x_0 \; risulta \, f(x) \in I_{L_1}$

Per il secondo limite

$I_{L_2} : \exists I''x_0 \; t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I''x_0 \; risulta \, f(x) \in I_{L_2}$. Se ora consideriamo l'intorno $I_{x_0} : I'x_0 \cap I''x_0, \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \; risulta \, f(x) \in I_{L_1} \; ed \; f(x) \in I_{L_2}$ Quindi $f(x) \in (I_{L_1} \cap I_{L_2}) \Leftrightarrow f(x) \in \phi$ e questo, per l'ipotesi del teorema, è assurdo, pertanto la tesi è confermata.

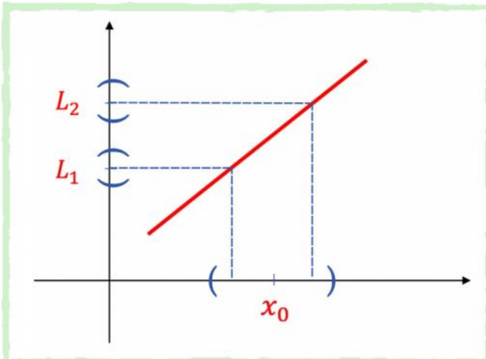


fig. 5.3.1

T *I Teorema del confronto*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$, sia $g : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Siano $L, M \in \widehat{R}$

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \; ed \; \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = M$

e risulta che $L < M$

allora

Tesi

$\exists I_{x_0} \; t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \; risulta \, f(x) < g(x)$

II Teorema del confronto

Ipotesi

Sia $f : X \to R$, sia $g : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Siano $L, M \in \widehat{R}$

se $\exists I_{x_0}$ *t.c.* $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$ *risulta* $f(x) \leq g(x)$

allora

Tesi

$L \leq M$

Teorema della permanenza del segno

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $L \in \widehat{R}$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L < 0$

allora

Tesi

$\exists I_{x_0}$ *t.c.* $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$ *risulta* $f(x) < 0$

Dimostrazione I:

Servendosi del I Teorema del Confronto, ponendo la funzione $g(x)=0, \forall x \in X$ e replicando il Teorema della permanenza del segno si ha:

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \; ed \; \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e risulta che $L < 0$

Allora $\exists I_{x_0} \; t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \bigcap I_{x_0} \; risulta \; f(x) < 0$

Dimostrazione II:

Si osservi che se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L < 0$, esistono due intorni $I_L \; e \; I_0$, tale che $I_L \bigcap I_0 = \phi$, quindi $\forall \alpha \in I_L, \alpha \notin I_0$ e quindi $a < 0$.

Pertanto richiamando la definizione di limite:

$$\forall I_L, \exists I_{x_0} \; t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \bigcap I_{x_0} \; risulta \; f(x) \in I_L \text{ quindi } f(x) < 0.$$

T *III Teorema del confronto*

Ipotesi

Sia $f: X \to R$, sia $g: X \to R$ e sia $h: X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $L \in \widehat{R}$

se $\exists I_{x_0} \; t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \bigcap I_{x_0} : h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

e se $\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = L \; ed \; \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

allora

Tesi

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Dimostrazione:

Per la definizione di limite, in riferimento al limite della funzione h si ha,

$\forall I_L, \exists I'_{x_0}$ $t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I'_{x_0} : h(x) \in I_L$

In riferimento alla funzione g , si ha

$\forall I_L, \exists I''_{x_0}$ $t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I''_{x_0} : g(x) \in I_L$

Quindi se consideriamo l'intorno $J_{x_0} = I_{x_0} \cap I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$ si ha:

$\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap J_{x_0}$ *risulta* $f(x) \in [h(x), g(x)]$ *ed* $h(x) \in I_L$ e $g(x) \in I_L$

per cui il teorema sulla caratterizzazione degli intervalli essendo $h(x)$ e $g(x)$ due elementi dell'intervallo I_L si ha: $[h(x), g(x)] \subseteq I_L$ e siccome $f(x) \in [h(x), g(x)]$ allora $f(x) \in I_L$.

Quindi si è costruita la definizione di limite anche per la funzione f , ovvero: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

T *Teorema sul limite delle funzioni composte*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$, sia $g : Y \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $y_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su Y

Sia $L \in \widehat{R}$

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

se $\exists I_{x_0}$ $t.c. \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} : f(x) \neq y_0$

e se $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = L$

allora

Tesi

$\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$

T *Teorema sul limite della funzione reciproca*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Sia $L \in \widehat{R} - \{0\}$

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

allora

Tesi

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

T *Teorema sul limite della funzione reciproca con forma indeterminata*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in \widehat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, con $f(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

e se $\exists I_{x_0}$ *t.c.* $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} : f(x) > 0$

$(f(x) < 0)$

allora

Tesi

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \qquad \left(\exists \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \right)$$

5.4 – Il numero di Nepero

Sia $f : N \to R$, una successione di numeri reali, con $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

si osserva che tale successione è strettamente crescente, ovvero

$\forall n_1, n_2 \in N$ con $n_1 < n_2$ risulta $x_{n_1} < x_{n_2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1} < \left(1+\frac{1}{n_2}\right)^{n_2}$;

ed inoltre limitata superiormente, ovvero $\sup_{n\in N} x_n = k \in R$

Grafico di $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

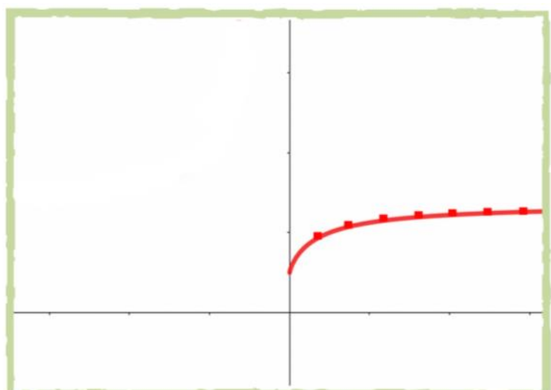


fig. 5.4.1

Sia $g : N \to R$, una successione di numeri reali, con $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

si osserva che tale successione è strettamente decrescente, ovvero

$\forall n_1, n_2 \in N$ con $n_1 < n_2$ risulta $x_{n_1} > x_{n_2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{n_1+1} > \left(1+\frac{1}{n_2}\right)^{n_2+1}$;

ed inoltre limitata inferiormente, ovvero $\inf_{n\in N} x_n = h \in R$

ed inoltre risulta che le due successioni sono contigue, quindi $k = h$, e tale unico elemento separatore risulta appunto il numero di Nepero, e.

$$e = 2{,}718282$$

Capitolo 6

Le funzioni continue

6.1 – Definizione di funzione continua

Data una funzione

Sia $f : X \to R$

Funzione continua in un punto

si definisce funzione continua nel punto x_0,

se $x_0 \in X$ e se x_0 è punto isolato per X

oppure

se x_0 è punto accumulazione per X e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = f(x_0)$$

Funzione continua

Si dice che f è continua, nel suo dominio, se f è continua in tutti i punti del suo dominio.

Punto di discontinuità

x_0 si definisce punto di discontinuità se la funzione non è continua in esso, e può assumere una di queste forme:

1- Punto di discontinuità eliminabile

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$

Sia x_0 punto di accumulazione per X

se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$

allora x_0 è un punto di **discontinuità eliminabile**

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), x \in \left]-\propto;0\right[\cup \left]0;+\propto\right[\\ \dfrac{\pi}{2} \qquad\qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \neq f(0) = \frac{\pi}{2}$$

in quanto

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\propto \to \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arccotg}(y) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\propto \to \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arccotg}(y) = 0$$

Quindi 0 è un punto di discontinuità *eliminabile*

2. Punto di discontinuità di I specie

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$

Sia x_0 punto di accumulazione per X

se $\exists \lim_{x \to x_0 +} f(x) = L_1 \in R$

$\exists \lim_{x \to x_0 -} f(x) = L_2 \in R$ con $L_1 \neq L_2$

allora x_0 è un punto di **discontinuità di I specie**

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \in R - \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Si osservi nel punto 0

$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{|x|}{x} \right) = -1, \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{|x|}{x} \right) = 1 \to -1 \neq 1$ pertanto 0 è un punto di discontinuità di *I specie*.

3. Punto di discontinuità di II specie

Nei punti di discontinuità di II specie rientrano tutti i casi non contemplati nei primi 2 casi.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \in \left]-\propto ;0\right[\cup \left]0;+\propto\right[\\ \pi, & x = 0 \end{cases}$$

Si osservi nel punto 0

$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} \right) = -\propto \to \lim_{y \to -\propto} \left(e^y \right) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \to \lim_{y\to+\infty}\left(e^y\right) = +\infty$$

Pertanto $\nexists \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ e non rientra nei 2 casi precedenti, quindi 0 è un punto di discontinuità di *II specie*.

6.2 – Teoremi sulle funzioni continue

T *Teorema sulla continuità delle funzioni elementari*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

se f è monotona

se $f(X)$ è un intervallo

allora

Tesi

f è continua

Ne consegue che tutte le funzioni elementari, sono continue nel loro insieme di definizione

T *Teorema sulla continuità delle operazioni tra funzioni*

Ipotesi

Sia $f: X \to R$ e sia $g: X \to R$

Sia $x_0 \in X$

Se f e g sono continue in x_0

allora

Tesi

le funzioni $f+g$, $f \cdot g$ ed $\dfrac{f}{g}$ con $g(x) \neq 0$, sono continue in x_0 e sono continue in X se sono continue in ogni punto del loro dominio

T *Teorema sulla continuità delle funzioni composte*

Ipotesi

Sia $f: X \to Y$ e sia $g: Y \to R$

Sia $x_0 \in X$

se f è continua in x_0

se g è continua in $y_0 = f(x_0)$

allora

Tesi

$g \circ f$ è continua in x_0

Teorema di Weierstrass

Ipotesi

Sia $f : X \to R, X \subseteq R$

se X è chiuso e limitato

se f è continua

allora

Tesi

$f(X)$ è chiuso e limitato e conseguentemente f è dotata di minimo e massimo assoluti

Teorema di Bolzano

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

se X è un intervallo

se f è continua

allora

Tesi

$f(X)$ è un intervallo e conseguentemente f assume tutti i valori compresi tra due suoi valori.

Dimostrazione:

Se f è costante, assume sempre lo stesso valore, quindi è dimostrato.

In caso contrario, comunque si considerino due punti del dominio x_1, x_2 t.c $x_1 < x_2$, considerando che X è un intervallo e la funzione f è continua, l'intervallo dato dai valori

$f(x_1)$ e $f(x_2)$ sarà incluso in $f(X)$.

Quindi per il teorema che caratterizza gli intervalli, $f(X)$ è un intervallo e conseguentemente $\forall y \in [f(x_1), f(x_2)] \Leftrightarrow y \in f(X)$

Quindi $\exists \mathrm{x} \in \mathrm{X}$ t.c $f(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$

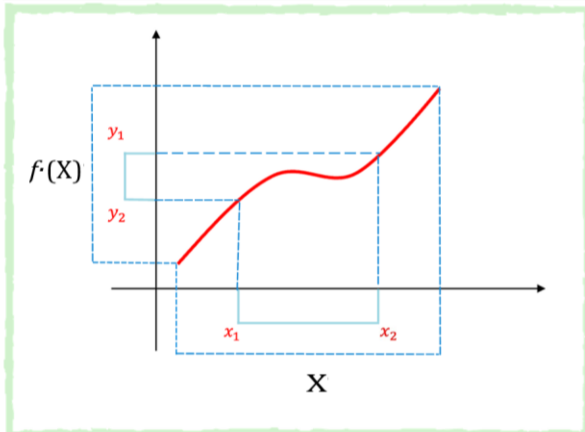


fig. 6.2.1

T *Teorema degli Zeri*

Ipotesi

Sia $f : [a,b] \to R$

se f è continua

se $f(a) \cdot f(b) < 0$

allora

Tesi

$\exists x_0 \in]a,b[$ t.c $f(x_0) = 0$

Dimostrazione:

In tale teorema ricorrono tutte le ipotesi del teorema di Bolzano, pertanto $f([a,b])$ è un intervallo, e consideriamo i due valori

$f(a), f(b) \in f([a,b])$, si ha: $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$ e ricordando che $f(a) \cdot f(b) < 0$, pertanto $0 \in [f(a), f(b)] \Leftrightarrow 0 \in f([a,b])$

Quindi $\exists x_0 \in]a,b[$ t.c $f(x_0) = 0$

T *Teorema del punto fisso*

Ipotesi

Sia $f:[a,b] \to R$

se f è continua

se $f([a,b]) \subseteq [a,b] \Leftrightarrow f(a), f(b) \in [a,b]$

allora

Tesi

$\exists c \in [a,b]$t.c $f(c) = c$

Dimostrazione:

Consideriamo la funzione $g:[a,b] \to f(x) - x$ ed osserviamo che essendo la differenza di funzioni continue, è continua.

Osserviamo ancora che $g(a) = f(a) - a$ ed $g(b) = f(b) - b$ e tenendo conto delle ipotesi, risulta:

$f(a) \geq a \Leftrightarrow f(a) - a \geq 0 \Leftrightarrow g(a) \geq 0$ ed $f(b) \leq b \Leftrightarrow f(b) - b \leq 0 \Leftrightarrow g(b) \leq 0$.

Quindi se $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$, il teorema è dimostrato. Se $g(a) \neq 0$ e $g(b) \neq 0$ ed essendo quindi $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$ ricorrono le ipotesi del teorema degli Zeri, per cui:

$\exists c \in]a,b[$ t.c $g(c) = 0$ ovvero $f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$

6.3 – Gli asintoti

L'asintoto

L'asintoto per una funzione è quella retta alla quale la funzione si avvicina, senza mai toccarla.

1. Asintoto verticale

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in R$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Se $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \pm \propto$, allora la retta $x = x_0$ si definisce asintoto verticale sinistro.

Se $\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \pm \propto$, allora la retta $x = x_0$ si definisce asintoto verticale destra.

Esempio

Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \frac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1}$$

1. Il dominio risulta: $R - \{2\}$ in quanto $\frac{x}{2} - 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq 1$ pertanto $x \neq 2 : f : R - \{2\}$
2. Verifichiamo ora il limite in $x_0 = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1} = \lim_{x \to 2^-} -2x+1 \cdot \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\frac{x}{2}-1} = -3 \cdot -\propto = +\propto$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1} = \lim_{x \to 2^+} -2x+1 \cdot \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\frac{x}{2}-1} = -3 \cdot +\propto = -\propto$$

Pertanto l'equazione della retta $x = 2$, risulta un asintoto verticale sia a sinistra che a destra per la funzione data.

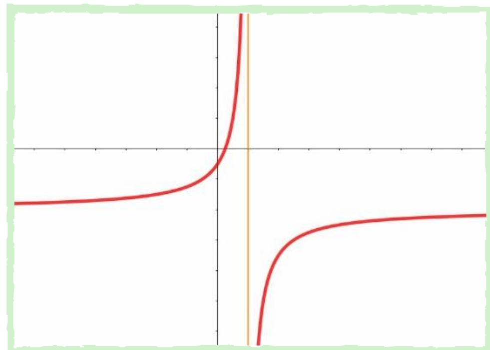


fig 6.3.1

2. Asintoto orizzontale:

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 = \pm \propto$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in R$, allora la retta $y = L$ si definisce asintoto orizzontale.

Esempio

Sia data la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}}$$

1. Essendo definito in $R - \{-1\}$, verifichiamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -\propto} \frac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \to -\propto} \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5x}\right)} = 3$$

$$\lim_{x \to +\propto} \frac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \to +\propto} \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5x}\right)} = 3$$

Pertanto l'equazione della retta $y = 3$, risulta un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra per la funzione data.

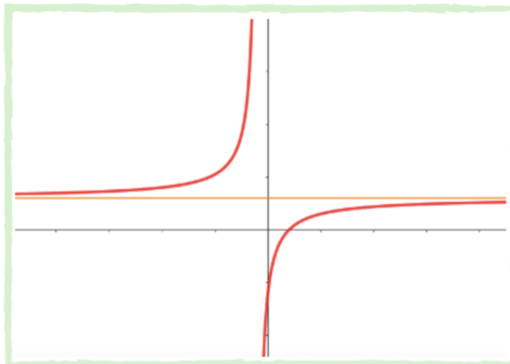


fig 6.3.2

3. Asintoto obliquo:

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 = \pm \propto$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm \propto$, allora la funzione come si osserva non ha un asintoto orizzontale, ma potrebbe avere un asintoto obliquo.

Pertanto per definizione di asintoto, l'asintoto obliquo risulterà l'equazione della retta $y = ax + b$ tale che $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - (ax+b)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} + \frac{b}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = a \in R - \{0\}$

Conseguentemente $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - ax = b$, per cui la retta $ax + b = y$ è l'equazione della retta asintoto obliquo.

Si nota che la funzione che ha un asintoto orizzontale non può avere un asintoto obliquo.

Esempio

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to +\propto} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to +\propto} \frac{x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 3 \lim_{x \to +\propto} x = 3(+\propto) = +\propto$$

Pertanto verifichiamo se la funzione $f(x)$ potrebbe avere un asintoto obliquo:

1. Calcoliamo il limite di x che tende a $+\infty$ di $\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=3$$

2. Calcoliamo ora:

$$f(x)-ax=b$$

$$\frac{3x^2-2x+1}{x-1}-3x=\frac{3x^2-2x+1-3x^2+3x}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1$$

La retta di equazione $y=3x+1$ risulta l'asintoto obliquo a destra.

3. Calcoliamo il limite di x che tende a $-\infty$ di $\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x(1-\frac{1}{x})}=3\lim_{x\to-\infty}x=3(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to.\infty}\frac{\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=3$$

4. Essendo anche in questo caso $a=3$, calcoliamo b:

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1$$

Quindi la funzione $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1}$ ha un asintoto obliquo (sia a sinistra che a destra), di equazione $y=3x+1$

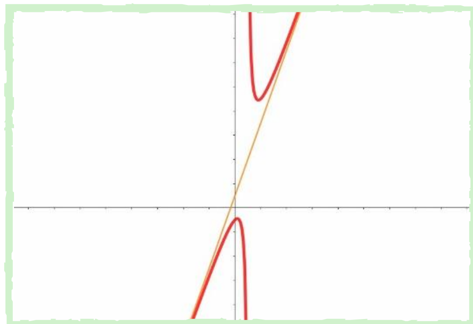


fig 6.3.3

Capitolo 7
Derivate

7.1 – Definizione di derivata

Rapporto incrementale

Sia $f : X \rightarrow R$, $x_0 \in X$

$\forall x \in X$

si definisce rapporto incrementale della funzione f in x_0, il rapporto tra il Δ (incremento) della funzione f in x_0 e il Δ (incremento) della variabile indipendente in x_0

Pertanto se Δ di $f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ e se Δ di $x_0 = x - x_0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si definisce rapporto incrementale

Quindi

Sia $f : X \rightarrow R$

Sia $x_0 \in X$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$,

$f'(x_0)$ è detta derivata della funzione f in x_0.

Significato geometrico della derivata

Se consideriamo due punti: $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$

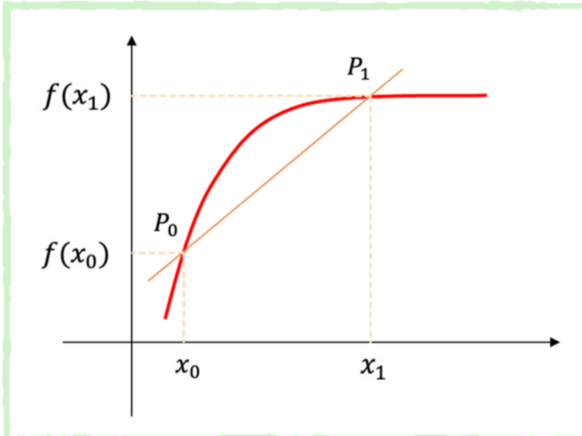


fig. 7.1.1

L'equazione della retta passante per i due punti assegnati, risulta:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{y - f(x_0)} = \frac{x_1 - x_0}{x - x_0}$$

$$\left(f(x_1) - f(x_0)\right)(x - x_0) = (x_1 - x_0)\left(y - f(x_0)\right)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y - f(x_0)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) = y$$

Si noti che il coefficiente angolare di questa retta, è un rapporto incrementale, pertanto se consideriamo il seguente limite:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

si ha l'equazione della retta tangente sulla funzione f, nel punto $(x_0, f(x_0))$, il cui coefficiente angolare è appunto, come si osserva, la derivata nel punto x_0, ovvero: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

7.2 – Derivabilità di una funzione

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$

f è derivabile (in x_0)

Una funzione f si dice **derivabile**, se è derivabile in tutto il suo dominio, ovvero se:

(il dominio di $f \cap$ dominio di $f' \subseteq$ dominio di f)

Una funzione di dice *dotata di derivata* nel punto x_0 se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \pm \propto$$

T *Teorema sulla continuità delle funzioni derivabili*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X

Sia f derivabile in x_0

allora

Tesi

x_0 è continua in x_0

Dimostrazione:

Se osserviamo che $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$

E consideriamo $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$

essendo $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$ ed essendo $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$

in quanto per definizione x_0 derivabile in x_0, risulta:

$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, esattamente la definizione di funzione continua in x_0.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Sia $\boldsymbol{x_0\in X}$

Sia $x_0\in X$ in cui è possibile effettuare il limite su X

Punti angolosi

Se $\lim_{x\to x_0-}f'(x)=L_1\in R$ e se $\lim_{x\to x_0+}f'(x)=L_2\in R$, con $L_1\neq L_2$,

allora x_0 è un punto **angoloso**

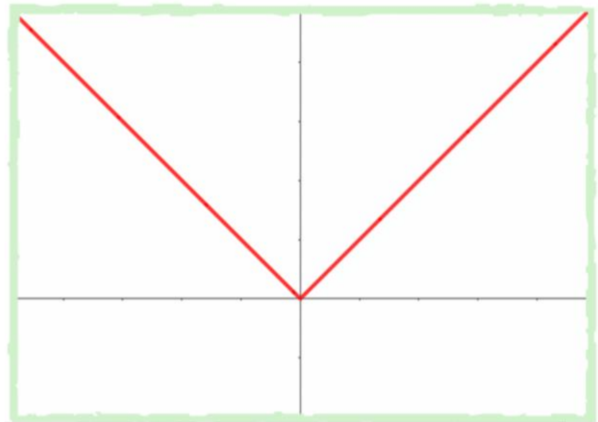
Se $\lim_{x\to x_0-}f'(x)=\pm\propto$ e se $\lim_{x\to x_0+}f'(x)=L\in R$,

allora x_0 è un punto **angoloso**

Se $\lim_{x\to x_0-}f'(x)=L\in R$ e se $\lim_{x\to x_0+}f'(x)=\pm\propto$,

allora x_0 è un punto **angoloso**

Esempio



Esempio di punto angoloso

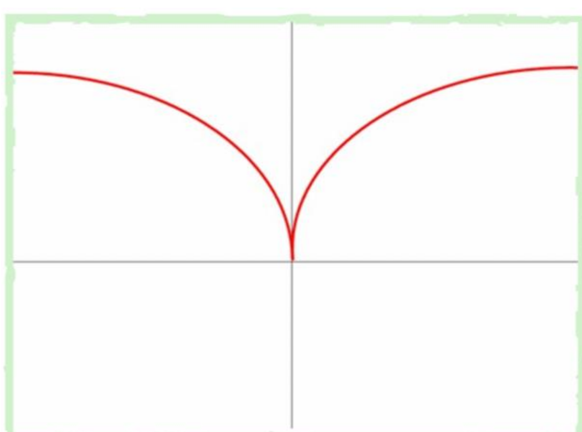
fig. 7.2.1

Punti di cuspide

Se $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = \pm \propto$ e se $\lim_{x \to x_0 +} f'(x) = \mp \propto$,

allora x_0 è un punto di **cuspide**

Esempio



Esempio di punto di cuspide

fig. 7.2.2

Punti di flesso

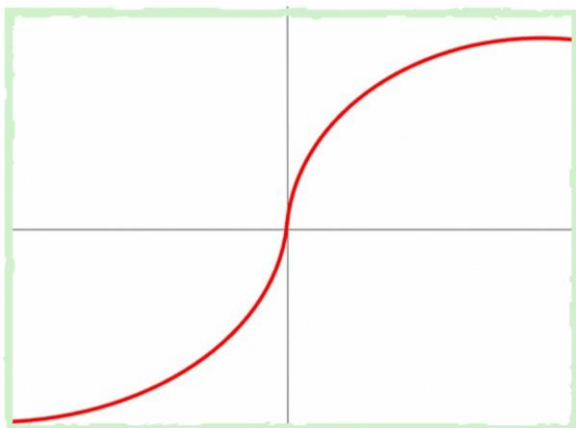
Se $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = +\propto$ e se $\lim_{x \to x_0 +} f'(x) = +\propto$,

allora x_0 è un punto di **flesso ascendente**

Se $\lim_{x \to x_0 -} f'(x) = -\propto$ e se $\lim_{x \to x_0 +} f'(x) = -\propto$,

allora x_0 è un punto di **flesso discendente**

Esempio



Esempio di punto di flesso

fig. 7.2.3

7.3 – Alcune derivate di funzioni elementari

1. D $k = 0$, funzione costante con $k \in R$
2. D $x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$, funzione potenza con $a \in N$ ed $x \in R$
3. D $\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$ caso x^{α}, con $\alpha = \frac{m}{n}$ ed $x \in]0, +\propto[$
4. D $senx = \cos x$ con $x \in R$
5. D $\cos x = -senx$ con $x \in R$
6. D $tgx = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ con $x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

7. D $\mathrm{cotg}x=-\dfrac{1}{sen^2x}=-\left(1+\mathrm{cotg}^2x\right)$ con $x\in R-\bigcup_{k\in Z}\{k\pi\}$
8. D $arcsenx=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $x\in\left]-1,1\right[$
9. D $\arccos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ con $x\in\left]-1,1\right[$
10. D $arctgx=\dfrac{1}{1+x^2}$ con $x\in R$
11. D $\mathrm{arccotg}x=-\dfrac{1}{1+x^2}$ con $x\in R$
12. D $\alpha^x=\alpha^x\log\alpha$, con $0<a\neq1$ ed $x\in R$
13. D $e^x=e^x$ con $e=2.718281828$ ed $x\in R$
14. D $|x|=\dfrac{|x|}{x}$ con $x\neq0$
15. D $\log_\alpha x=\dfrac{1}{x}\log_\alpha e$ con $0<a\neq1$ ed $x>0$
16. D $\log_\alpha(-x)=-\dfrac{1}{x}\log_\alpha e$ con $0<a\neq1$ ed $x<0$
17. D $\log_\alpha|x|=\dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{|x|}{x}\log_\alpha e$ con $x\neq0$

7.4 – Alcune regole fondamentali di derivazione

1. D $\left[kf(x)\right]=kf'(x)$ con $x\in dom(f')$ e $k\in R$
2. D $\left(f(x)\pm g(x)\right)=f'(x)\pm g'(x)$ con $x\in dom(f')\cap dom(g')$
3. D $\left(\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right)=\alpha f'(x)\pm\beta g'(x)$ con $x\in dom(f')\cap dom(g')$ ed $\alpha,\beta\in R$
4. D $\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ con $x\in dom(f')\cap dom(g')$
5. D $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ con $x\in dom(f')\cap dom(g')$ e $g(x)\neq0$
6. D $g\left(f(x)\right)=g'\left(f(x)\right)f'(x)$ con $x\in dom(f')$ ed $f(x)\in dom(g')$
7. D $f(x)^\alpha=\alpha\left(f(x)\right)^{\alpha-1}\cdot f'(x)$ con $x\in dom(f'), f(x)>0$ ed $\alpha\in R$
8. D $\log_a f(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_\alpha e$ con $x\in dom(f'), f(x)>0$ ed $0<\alpha\neq1$
9. D $\log f(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ con $x\in dom(f'), f(x)>0$

10. D $a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x) \log \alpha$ con $x \in dom(f')$ ed $\alpha > 0$

11. D $f^{-1}(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$ con $x \in dom(f'), f(x_0) \neq 0$ ed $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$

*Nota**

Le regole 1 e 2 sono casi particolari della 3 (linearità)

Le regole 7, 8 e 10 sono casi particolari della 6

Alcune derivate di funzione composte

1. D $sen(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
2. D $\cos(f(x)) = -sen(f(x)) \cdot f'(x)$
3. D $tg(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
4. D $\mathrm{cotg}(f(x)) = -\dfrac{f'(x)}{sen^2(f(x))}$
5. D $arctg(f(x)) = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$
6. D $\mathrm{arccotg}(f(x)) = -\dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$
7. D $f(x)^{g(x)} = \mathrm{D}\, e^{\log(f(x))^{g(x)}} = \mathrm{D}\, e^{g(x)\log(f(x))} = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\log(f(x)) + \dfrac{f'(x)}{f(x)} g(x) \right]$

7.5 – Derivazione di secondo ordine

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X

Sia $f' : X \to R$

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) \in R \Leftrightarrow$ f' è derivabile (in x_0)

Conseguentemente la funzione f è derivabile due volte in x_0.

Una funzione si dice dotata di derivata seconda se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) = \pm \propto$

Conseguentemente la funzione f è dotata di derivata seconda nel punto x_0.

Condizioni sufficienti sulla stretta monotonia di una funzione

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X

Se $\exists$ il limite del rapporto incrementale della funzione f, il segno della funzione f' ne determina la stretta monotonia della funzione f.

> Pertanto:
>
> Se $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente **crescente**
>
> Se $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente **decrescente**

Condizioni sufficienti sulla convessità e concavità di una funzione

Sia $f : X \to R$

Sia X un intervallo

Se $\exists$ il limite del rapporto incrementale della funzione f', il segno della funzione f'' ne determina la stretta convessità o concavità della funzione f.

> Pertanto:
>
> Se $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente **convessa**
>
> Se $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ è strettamente **concava**

7.6 – Minimo e massimo assoluto/relativo

Minino e massimo assoluti e/o relativi di una funzione

Sia $f : X \to R$ ed $x_0 \in X$

si definisce:

Minimo assoluto della funzione, $f(x_0)$

$\forall I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) \geq f(x_0)$

Minimo relativo della funzione, $f(x_0)$

$\exists I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) \geq f(x_0)$

Minimo assoluto proprio della funzione, $f(x_0)$

$\forall I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) > f(x_0)$

Minimo relativo proprio della funzione, $f(x_0)$

$\exists I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) > f(x_0)$

Massimo assoluto della funzione, $f(x_0)$

$\forall I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) \leq f(x_0)$

Massimo relativo della funzione, $f(x_0)$

$\exists I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) \leq f(x_0)$

Massimo assoluto proprio della funzione, $f(x_0)$

$\forall I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) < f(x_0)$

Massimo relativo proprio della funzione, $f(x_0)$

$\exists I_{x_0}, se\ x \in X \bigcap I_{x_0} : f(x) < f(x_0)$

N.B x_0 è detto punto di minimo/massimo, $f(x_0)$ è il minimo/massimo.

7.7 – Teoremi sulla derivazione

T *Teorema dei punti critici*

Ipotesi

Sia $g : [a,b] \to R$

Sia g continua in $[a,b]$

Siano:

$F = \{a,b\}$

$C = x \in]a,b[/ \nexists g'(x) \in R$

$S = x \in]a,b[/ g'(x) = 0$

E sia quindi $A = \{F \cup C \cup S\}$

allora

Tesi

$\max_{x \in [a,b]} g(x) = \max_{x \in A} g(x)$

oppure

$\min_{x \in [a,b]} g(x) = \min_{x \in A} g(x)$

T *Teorema di de L'Hopital*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $g : X \to R$

Se $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

allora

Tesi

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

T *Teorema di Fermat*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X sia a sinistra che a destra

Sia f derivabile in x_0

Sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo

allora

Tesi

$f'(x_0) = 0$

Dimostrazione:

Per le ipotesi fatte, la funzione è derivabile in x_0, quindi risulta $f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0)$.

Se ci poniamo nel caso che x_0 sia un punto di massimo relativo, avremmo che $f'_s(x_0) \geq 0$ e $f'_d(x_0) \leq 0$

e per la derivabilità della funzione in x_0 risulta: $0 \leq f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

T

Teorema di Rolle

Ipotesi

Sia $f[a,b] \rightarrow R$

Sia f continua in $[a,b]$

Sia f derivabile in $]a,b[$

e sia $f(a) = f(b)$

allora

Tesi

$\exists c \in]a,b[/ f'(c) = 0$

Dimostrazione:

Per il teorema di Weierstrass, la funzione è dotata di minimo e massimo assoluti.

Quindi se $x_1 = a$ ed $x_2 = b$ con x_1 e x_2 punti di minimo e massimo assoluti per la funzione, allora per le ipotesi nel teorema, la funzione risulta costante in quanto $f(x_1) = f(x_2)$, e pertanto $\forall x \in [a,b]: f'(x) = 0$.

Nel caso in cui $x_1 \neq a$ allora $x_1 \in]a,b[$, quindi ricorrono tutte le ipotesi del teorema di Fermat, per cui basta porre $x_1 = c$; cosi come nel caso $x_1 \neq b$. Il teorema resta così completamente dimostrato.

Capitolo 8
Integrazione

8.1 – Definizione di integrale

Il concetto di integrale nasce dall'esigenza di misurare l'area sottostante una curva.
I primi studi risalgono ad Archimede (287-212 a.C)

Iniziamo con il dare la definizione di funzione **generalmente derivabile:**

Sia $f : X \to R$

se $\exists Y$ finito e risulta $Y \subseteq X$

Se f è derivabile in $X - Y$

Allora si dice che f è **generalmente derivabile** in X

Per esempio, se consideriamo la funzione:

$f : R \to f(x) = |x| \in R$, la sua derivata risulta $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}, \forall x \in R - \{0\}$

quindi la funzione f risulta generalmente derivabile nel suo dominio.

Definizione di primitiva di una funzione

Sia $F : X \to R$, con X un intervallo, e con $\overset{o}{X} \neq \phi$

$\overset{o}{X}$ rappresenta l'interno di X .

Sia $f : X \to R$,

Sia F continua in X

e sia F generalmente derivabile in I chiuso e limitato, con $I \subseteq \overset{o}{X}$

Si dice che F è una **primitiva della funzione** f

Se $\forall I$, intervallo chiuso e limitato, con $I \subseteq \overset{o}{X}$, ed F generalmente derivabile in I, risulta: $F'(x) = f(x)$

Esempio

Siano le funzioni

$f : R - \{0\} \to f(x) = \dfrac{1}{x} \in R$,

$F : R - \{0\} \to F(x) = \log|x| \in R$ è una primitiva di $f(x)$ in quanto $F'(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$

T *Teorema sull'esistenza di infinite primitive*

Ipotesi

Sia $F : X \to R$ una primitiva della funzione $f : X \to R$

allora

Tesi

La funzione $G(x) = F(x) + c$,

è anche una primitiva della funzione $f(x)$, $\forall c \in R$

Dimostrazione:

Si vede facilmente in quanto essendo F una primitiva di f, F è continua e generalmente derivabile. Conseguentemente anche $G = F + c$ è continua e generalmente derivabile, e risulta $G'(x) = D(F + c) = DF + Dc = F' = f$

Quindi se esiste una primitiva, esistono infinite primitive.

T *Teorema sulla differenza di 2 primitive*

Ipotesi

Siano F_1 e F_2 due primitive di f, $F_1 : X \to R$, $F_2 : X \to R$

allora

Tesi

$F_1(x) - F_2(x) = c \in R$

Dimostrazione:

Poniamo $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, quindi la funzione G è continua e generalmente derivabile e risulta $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f - f = 0$, questo implica che solo la derivata di una costante è pari a 0, pertanto: $F_1(x) - F_2(x) = c$, con c costante.

Quindi tutte e solo le primitive differiscono per una costante.

Definizione di integrale indefinito

Sia $f : X \to R$, con $\overset{o}{X}$ intervallo, e con $\overset{o}{X} \neq \phi$, f ammette almeno una primitiva.

Si definisce **integrale indefinito di** f, l'insieme delle primitive della funzione f.

{ $F : X \to R$, tale che F primitiva di f }

E si scrive anche $\int f(x)dx = F(x)$

Alcune proprietà

Proprietà di linearità dell'integrale indefinito:

Siano $f: X \to R$ e $g: X \to R$, dotate di primitive e siano $a, b \in R$ si ha:

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

L'integrale della combinazione lineare è uguale alla combinazione lineare degli integrali.

Se si pone $b = 0$, si ha $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

Se si pone $a = b = 1$, si ha $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

8.2 – Alcuni integrali indefiniti immediati

1. $\int kdx = kx + c$, con $k \in R$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$, con $p \in R$
3. $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$
4. $\int a^x dx = a^x \cdot \log_a e + c$
5. $\int \cos x dx = senx + c$
6. $\int senx dx = -\cos x + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$
8. $\int -\frac{1}{sen^2 x}dx = \mathrm{cotg}x + c$
9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + c$
10. $\int -\frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arccotg}x + c$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + x$
12. $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$

8.3 – Alcuni integrali indefiniti quasi immediati

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c$
2. $\int [f(x)]^p f'(x)dx = \dfrac{[f(x)]^{p+1}}{p+1} + c$ con $p \in R$
3. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$
4. $\int a^{f(x)} f'(x)dx = a^{f(x)} \cdot \log_a e + c$
5. $\int \cos(f(x)) f'(x)dx = senf(x) + c$
6. $\int sen(f(x)) f'(x)dx = -\cos f(x) + c$
7. $\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tgf(x) + c$
8. $\int \dfrac{-f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = \text{cotg} f(x) + c$
9. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = arcsenf(x) + c$
10. $\int \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arccos f(x) + c$
11. $\int \dfrac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \text{arccotg} f(x) + c$
12. $\int \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = arctgf(x) + c$

Esempio

del tipo 8.2.1:

$$\int 1dx = x + c$$

del tipo 8.2.2:

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

del tipo 8.2.2:

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

del tipo 8.2.2:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$$

del tipo 8.3.1:

$$\int (x^2 - 2x + 3)dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + 3\int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x + c = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c$$

del tipo 8.3.2:

$$\int (2x)^2 dx = \frac{1}{2}\int (2x)^2 \cdot 2dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{(2x)^3}{6} + c$$

del tipo 8.3.6:

$$\int sen(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

del tipo 8.3.9:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx = \frac{1}{3}arcsen(3x) + c$$

del tipo 8.3.12:

$$\int \frac{1}{1+4x^2}dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x) + c$$

8.4 – Alcuni integrali di funzioni razionali

Caso di polinomio al numeratore, con grado maggiore o uguale, del denominatore

Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 5}{3x - 1}$

è possibile effettuare **la divisione tra i polinomi,** e pertanto si ha:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^2 + x - 5 & \underline{3x-1} \\
\underline{2x^2 - \frac{2}{3}x} & \frac{2}{3}x + \frac{5}{9} \\
\quad \frac{5}{3}x - 5 & \\
\quad \underline{\frac{5}{3}x - \frac{5}{9}} & \\
\quad -\frac{40}{9} &
\end{array}
$$

1)

2) $\dfrac{2x^2 + x - 5}{3x - 1} = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{9} - \dfrac{\frac{40}{9}}{3x - 1}$

3) Quindi l'integrale della funzione data, risulta:

$$\int \frac{2x^2 + x - 5}{3x - 1}dx = \int \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{9} - \frac{\frac{40}{9}}{3x - 1} \right) dx = \frac{2}{3}\int xdx + \frac{5}{9}\int dx - \frac{40}{27}\int \frac{3}{3x - 1}dx\,,$$

conseguentemente una primitiva risulta: $F(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{5}{9}x - \dfrac{40}{27}\log|3x - 1| + c$.

Caso di polinomio al denominatore con delta < 0

Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - x + 1}$ il cui polinomio al denominatore ha $\Delta < 0$.

Si ricorda che un generico polinomio, $ax^2 + bx + c$ con delta negativo, può essere scritto:

$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ e conseguentemente ridurlo al tipo

$a\frac{\left(\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2+\frac{\Delta}{4a^2}\right)}{\frac{\Delta}{4a^2}}\frac{\Delta}{4a^2}=\Delta\frac{\left(\left(\frac{2ax+b}{2a}\sqrt{\frac{4a^2}{\Delta}}\right)^2+1\right)}{4a}$ e quindi

$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\Delta\frac{\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+1\right)}{4a}}=\frac{4a}{\Delta}\frac{1}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}$ che è del tipo $\frac{4a}{\Delta}\frac{1}{1+(f(x))^2}$ per cui

$\frac{4a}{\Delta}\frac{1}{1+(f(x))^2}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{4a}{\Delta f'(x)}\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$,

quindi, $\int\frac{4a}{\Delta f'(x)}\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx=\frac{4a}{\Delta f'(x)}\int\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx=\frac{4a}{\Delta f'(x)}arctgf(x)$

Pertanto l'integrale della funzione data, $\int\frac{1}{2x^2-x+1}dx$, può essere ricondotto al seguente integrale:

$$\int\frac{1}{2x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{4x-1}{4}\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right)+\frac{7}{16}}dx=$$

$$=\frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\int\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)+c$$

Caso di polinomio al denominatore con delta $=0$

Nel caso in cui il polinomio al denominatore ha $\Delta=0$ del tipo: $\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx$

Trovata la soluzione doppia del polinomio, si ha:

$$\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\int(x+1)^{-2}dx=-(x+1)^{-2+1}+c=-\frac{1}{(x+1)}+c$$

Caso di polinomio al denominatore con delta > 0

Nel caso in cui il polinomio al denominatore ha $\Delta > 0$ del tipo: $\int \frac{1}{2x^2+x-1}dx$

In un generico polinomio, trovate le soluzioni, α e β, possiamo scrivere: $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ e quindi si ha:

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{A(x-\beta)+B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{(A+B)x - A\beta - B\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Per cui per l'identità dei polinomi, basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A\beta - B\alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ B(\beta-\alpha)=1 \end{cases} = \begin{cases} A = -\dfrac{1}{(\beta-\alpha)} \\ B = \dfrac{1}{(\beta-\alpha)} \end{cases}$$

Pertanto $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{\frac{-1}{(\beta-\alpha)}}{(x-\alpha)} + \frac{\frac{1}{(\beta-\alpha)}}{(x-\beta)}$

Quindi

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{1}{a(\beta-\alpha)}\int\frac{1}{(x-\alpha)}dx + \frac{1}{a(\beta-\alpha)}\int\frac{1}{(x-\beta)}dx = -\frac{1}{(\beta-\alpha)}\log|x-\alpha| + \frac{1}{a(\beta-\alpha)}\log|x-\beta|$$

Pertanto l'integrale assegnato, diventa:

$$\int\frac{1}{2x^2+x-1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}dx$$

Per cui $\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{A}{\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{A(x+1)+B\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{x(A+B)+A-\frac{1}{2}B}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}$

Da cui $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B\frac{1}{2}=1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ -B-B\frac{1}{2}=1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ -B\left(1+\frac{1}{2}\right)=1 \end{cases} = \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=-\frac{2}{3} \end{cases}$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2}{3}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}dx+\int\frac{-\frac{2}{3}}{(x+1)}dx=\frac{1}{3}\log\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{3}\log|x+1|+c=\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{2x+2}\right|+c$$

8.5 – Integrazione per parte

Ricordando la regola di derivazione di un prodotto di due funzioni, $D(f(x)\cdot g(x))=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$, da cui integrando l'equazione, si ha:

$$\int D(f(x)\cdot g(x))=\int f'(x)\cdot g(x)+\int f(x)\cdot g'(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)=\int f'(x)\cdot g(x)+\int f(x)-g'(x)$$

quindi

I caso: $\int f'(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)-g'(x)$

II caso: $\int f(x)\cdot g'(x)=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)$

Pertanto la regola dell'integrazione per parte consente di poter risolvere l'integrale del prodotto di due funzioni:

quindi date le funzioni $f:X\to R$ e $g:X\to R$ ed il seguente integrale $\int f(x)g(x)dx$

se si possono porre le funzioni, sotto la forma (primo caso): $\int f'(x)\cdot g(x)dx$

La regola dell'integrazione per parte che ci consente di poter calcolare l'integrale (primo caso), è la seguente: $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

Analogamente per il secondo integrale risulta: $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

Esempi

Primo esempio:

$$\int x^2\cdot e^x dx$$

Posto $f(x)=x^2$ e quindi $g'(x)=e^x$

Ci troviamo nel secondo caso.

$$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$$

Per cui applicando l'equazione del secondo caso, si ha:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx$$

Si osserva che l'ultimo integrale, $\int x \cdot e^x dx$ può essere ancora una volta risolto per parte.

Pertanto ponendo:

$f'(x) = x$, $g(x) = e^x$ rientriamo nel primo caso.

$$\int f'(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)$$

Quindi essendo $f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$, ed essendo $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$.

Per l'equazione del primo caso si ha:

$$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^x dx$$

Si osserva che quest'ultimo integrale è risolvibile sempre per parte, ma si pone in una forma peggiorativa rispetta alla precedente, in poche parole siamo ritornati al primo integrale. Questo vuol dire che la soluzione adottata non è consigliata.

Pertanto è preferibile ricondurre l'integrale $\int x \cdot e^x dx$ nella forma del secondo caso.

Ovvero ponendo: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$$

e quindi per l'equazione del secondo caso si ha: $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

di cui quest'ultimo integrale è immediato: $\int e^x dx = e^x$

In definitiva il nostro integrale di partenza risulta:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2xe^x - 2e^x + c = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx == \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$$

Secondo esempio

$\int 2x^2 \cdot arctgxdx$

$f'(x) = 2x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^3}{3}$

$g(x) = arctgx \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\int 2x^2 \cdot arctgxdx = \frac{2x^3}{3} \cdot arctgx - \int \frac{2x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2x^3}{3} arctgx - \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$

Prendiamo in considerazione: $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & \underline{x^2+1} \\ \underline{-(x^3+x)} & x \\ -\mathrm{x} & \end{array}$$

Quindi: $\frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int xdx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \int 2x^2 \cdot arctgxdx =$

$= \frac{2x^3}{3} arctgx - \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right|\right) + c = \frac{2x^3}{3} arctgx + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$

$$\int 2x^2 \cdot arctgxdx == \frac{2x^3}{3} arctgx + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + c$$

Terzo esempio

$\int x \cdot \log xdx$

$f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x\cdot\log x dx=\frac{x^2}{2}\cdot\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\log x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^2\log x}{2}-\frac{x^2}{4}+c$$

$$\int x\cdot\log x dx=\frac{2x^2\log x-x^2}{4}+c=\frac{x^2(2\log x-1)}{4}+c$$

$$\int x\cdot\log x dx=\frac{x^2(2\log x-1)}{4}+c$$

Quarto esempio

$$\int arcsenx dx$$

si osserva che tale integrale può essere scritto come $\int 1\cdot arcsenx dx$, pertanto può essere risolto per parte.

Ponendo:

$f'(x)=1 \Rightarrow f(x)=x$ e si risolverebbe facilmente ponendolo nella forma del primo caso.

$$g(x)=arcsenx \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int 1\cdot arcsenx dx= x\cdot arcsenx-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\cdot arcsenx-\int x\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=x\cdot arcsenx-\frac{1}{2}\int -2x\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=x\cdot arcsenx-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+c=$$

$$=x\cdot arcsenx-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+c=x\cdot arcsenx-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot 2+c=x\cdot arcsenx-\sqrt{1-x^2}+c$$

$$\int arcsenx dx= x\cdot arcsenx-\sqrt{1-x^2}+c$$

Quinto esempio

$$\int \log x dx$$

$$f'(x)=1 \Rightarrow f(x)=x$$

$$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \cdot \log x dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log x - \int dx = x \cdot \log x - x = x(\log x - 1) + c$$

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + c$$

8.6 – Teoremi sugli integrali

T *Teorema della media dell'integrale secondo Riemann*

Ipotesi

Sia $f : [a,b] \to R$

Sia f integrabile (esiste la primitiva)

allora

Tesi

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x)(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)dx \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)(b-a)$$

Con l'estensione:

Se risulta f continua, allora $\exists c \in [a,b]$, tale che risulti

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = f(c)(b-a)$$

T *Teorema della media degli integrali definiti*

Ipotesi

Sia $f : X \to R$

Sia f continua

allora

Tesi

$\forall a,b \in X, \exists c \in [a,b]$, tale che $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

T *Teorema fondamentale del calcolo integrale*

Ipotesi

Sia $f:[a,b] \to R$

Sia f continua

allora

Tesi

$\forall G$, primitiva di f risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)+c]_a^b = G(b)-G(a)$$

Capitolo 9
Algebra lineare

9.1 – Definizione di matrice

Siano $m, n \in N$, con $a_{i,j}$ si denota l'elemento $(i, j) - esimo$ della matrice mxn, con $i \in \{1,2,.., m\}$ e $j \in \{1,2,.., n\}$.

Pertanto $\forall (i, j) \in \{1,2,.., m\} x \{1,2,.., n\}$, $a_{i,j}$ rappresenta l'intera matrice.

Quindi se $m = 3$ ed $n = 2$ la matrice 3×2 risulta: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Esempio

La matrice $m = 3$ ed $n = 1$ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ si definisce **matrice colonna.**

La matrice $m = 1$ ed $n = 3$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ si definisce **matrice riga.**

La matrice $m = n$ si definisce **matrice quadrata** ed è definita di ordine 1 se $m = n = 1$, di ordine 2 se $m = n = 2$ e cosi di seguito.

Uguaglianza tra matrici

Se $a_{i,j} = b_{i,j} \ \forall (i, j) \in \{1,2,.., m\} \times \{1,2,.., n\}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6:3 \\ 3-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & -2-1 & 2 \\ 2 & 4:4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici opposte

Se $a_{i,j} = -b_{i,j} \ \forall (i, j) \in \{1,2,.., m\} \times \{1,2,.., n\}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici nulle

Se $a_{i,j} = 0 \ \forall (i, j) \in \{1,2,.., m\} \times \{1,2,.., n\}$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La diagonale principale di una matrice è data da tutti gli elementi $a_{i,j}\ \forall i=j$.

La diagonale secondaria di una matrice è data da tutti gli elementi $a_{i,j}\ \forall i\in\{m,...3,2,1\}$ e $\forall j\in\{1,2,3,..,n\}$.

Matrice identità

$\forall(i,j)\in\{1,2,3,..,m\}x\{1,2,3,..,m\}$

Se $a_{i,j}=1\ \forall i=j$ e se $a_{i,j}=0\ \forall i\neq j$

Operazioni con le matrici

Date due matrici A e B rispettivamente di ordine $m\times n$

Si definisce somma tra le due $A+B$, la matrice C il cui elemento $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}\ \forall(i,j)\in\{1,2,..,m\}\times\{1,2,..,n\}$

9.2 – Proprietà delle matrici

Proprietà della somma tra matrici

La somma tra matrici dello stesso tipo gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà associativa:** $A+(B+C)=(A+B)+C$
- **Proprietà commutativa:** $A+B=B+A$
- Ammette come **elemento neutro** la matrice nulla dello stesso tipo: $A+0=0+A=A$, per ogni matrice A.

Prodotto di una matrice

Il prodotto di una matrice per un numero reale k, è una matrice $k \cdot a_{i,j} \ \forall (i,j) \in \{1,2,..,m\} \times \{1,2,..,n\}$

Esempio

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \end{pmatrix}$$

Prodotto tra due matrici

Il prodotto tra due matrici AxB si effettua righe per colonne ed è possibile se e solo se il numero di colonne di A equivale al numero di righe di B.

Esempio

$A \times B = C$ con $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$ e con $c_{i,j} = \sum_{r=1}^{p} a_{i,r} b_{r,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + ... + a_{i,p} b_{p,j}$

La matrice C è di ordine $m \times n$

Si osserva che se possibile effettuare il prodotto, allora $A \cdot B \neq B \cdot A$

Se $A \cdot B = B \cdot A$, allora A e B si dicono **commutabili.**

ed A e B sono matrici quadrate.

- Il prodotto di una matrice per una matrice nulla ha come risultato una matrice nulla: $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
- Il prodotto di una matrice per una matrice identica ha come risultato la matrice stessa: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

  Quindi la matrice identica di ordine n, I_n, è **l'elemento neutro della prodotto** fra matrici quadrate di ordine n.

Non vale la legge…

1. **Non vale la legge di annullamento del prodotto.** Infatti, la matrice prodotto $A \cdot B$ può essere la matrice nulla 0 senza che siano nulle le matrici A e B.
2. **Non vale la legge di cancellazione,** ossia si può verificare che da $A \cdot B = A \cdot C$ non segua necessariamente che $B = C$

Esempio

Il prodotto fra due matrici del tipo: $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

ha come risultato la matrice $C_{2\times 4}$ con gli elementi generici

$$c_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

I cui elementi della prima riga della matrice prodotto, si ottengono moltiplicando e sommando rispettivamente ogni elemento della prima riga della matrice *A*, con ogni elemento della prima colonna della matrice *B*.

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0) = 2$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot -2) = 4$$

$$c_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 3$$

L'operazione si ripete per ogni riga della matrice *A*. Quindi la seconda riga della matrice prodotto risulta così composta.

$$c_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 1 + -2 \cdot 5 + 3 \cdot 0) = -11$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + -2 \cdot -1 + 3 \cdot 1) = 5$$

$$c_{23} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 3 + -2 \cdot 4 + 3 \cdot -2) = -17$$

$$c_{24} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + -2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = -5$$

Proprietà del prodotto

Proprietà associativa:
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Proprietà distributiva (a sinistra e a destra) **del prodotto rispetto alla somma:**
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Proprietà distributiva del prodotto di un numero rispetto alla somma tra matrici:
$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B, \alpha \in R$

9.3 – Determinante di una matrice

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il suo determinante si denota: $\det(A)$ o $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e risulta $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Prima di dare la definizione di determinante di una matrice quadrata, di ordine $n > 2$, diamo alcune definizioni di cui ci serviremo.

Definizione di minore complementare

Si definisce minore complementare dell'elemento $a_{i,j}$ della matrice A e si denota con $|A_{ij}|$, il determinante della matrice A alla quale si è eliminata la riga *i-esima* e la colonna *j-esima*.

Si definisce complemento algebrico dell'elemento $a_{i,j}$ della matrice A , $(-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$

Il determinante

Il determinante di una generica matrice A quadrata, di ordine n , con $n > 2$, sarà dato dalla somma di tutti gli elementi di una linea qualsiasi per i rispettivi complementari algebrici.

In generale, sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Se scegliamo la prima riga:

$$\det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \det(A_{11}) + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \det(A_{12}) + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \det(A_{13})$$

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Prendiamo la terza colonna

$$\det(A) = 1\cdot(-1)^{1+3}|A_{13}| + 1\cdot(-1)^{2+3}|A_{23}| + 0\cdot(-1)^{3+3}|A_{33}|$$

$$|A| = 1\cdot(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(2\cdot2)-(1\cdot1)-1(1\cdot2)-(0\cdot1)+0 = 4-1-2=1$$

9.4 – Sistemi lineari

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazione in n incognite si definisce di ordine $m \times n$ e nel caso $m=3$ ed $n=3$ risulta:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Si configura quale matrice *incompleta* del sistema, la matrice A, costituita dai coefficienti delle incognite dello stesso, ovvero:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si configura quale matrice *completa* del sistema, la matrice B, data dalla matrice incompleta A e dalla colonna dei termini noti dello stesso, ovvero:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Il sistema di ordine $m \times n$ si dice ***compatibile*** **se ammette soluzioni.**

Se la soluzione è unica ovvero **costituita da una ennupla ordinata**, allora il sistema si dice ***determinato***.

Il sistema $n \times n$ è **determinato** se la matrice A **incompleta *non è singolare***.

Una matrice si dice singolare se il suo $\det = 0$.

Se la matrice A è singolare, il sistema è **incompatibile** oppure **indeterminato** (ammette infinite soluzioni)

Un sistema $n \times n$ si dice **di Cramer** se la matrice A ***non è singolare.***

L'unica soluzione di un sistema di Cramer può essere determinata con la *regola di Cramer*.

Esempio

Un sistema 3×3 di Cramer ha per soluzioni:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{|A|} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{|A|} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{|A|}$$

Essendo A_1, A_2, A_3 le tre matrici ottenute da A sostituendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna con la colonna dei termini noti

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

La cui matrice incompleta ed il rispettivo determinante, risultano:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2(-4+1)+(4-1)+3(-2+2)=-6+3=-3\neq 0$$

Quindi il sistema risulta di Cramer, determinato, e la cui soluzione è:

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-3}\quad,\ x_2=\frac{\det(A_2)}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-3}\ ,\ x_3=\frac{\det(A_3)}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-3}$$

$$\det(A_1)=1\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4+1+1-6=-8$$

$$\det(A_2)=-1\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-4+1+2-6=-8$$

$$\det(A_3)=1\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-2+2+4-2=2$$

Quindi: $x_1=\frac{8}{3}$ $\quad x_2=\frac{7}{3}$ $\quad x_3=-\frac{2}{3}$

Pertanto la tripla ordinata, soluzione del sistema è: $\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)$

Si osservi:

La matrice trasposta della matrice A, si denota con A^T ed è quella matrice alla quale si sono invertite le righe con le colonne della matrice *A*.

Un sistema di n equazione in n incognite può essere rappresentato quale prodotto di due matrici $A\cdot x=b$

Con A, la matrice incompleta, x il vettore colonna delle incognite e b il vettore dei termini notti

Esempio

Siano:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\ \text{e}\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot x=b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Pertanto essendo un sistema, il prodotto di matrice del tipo $A\cdot x=b \Leftrightarrow x=A^{-1}\cdot b$

Quindi il vettore delle incognite può essere determinato quale prodotto della matrice inversa A^{-1} per il vettore colonna dei termini notti.

La matrice inversa risulta: $A^{-1}=\dfrac{Agg(A)}{|A|}$

Al cui numeratore, $Agg(A)$ denota la matrice aggiunta della matrice A, quale *matrice trasposta* della matrice dei *complementi algebrici* della matrice A.

Pertanto $A^{-1}=\dfrac{Agg(A)}{|A|}=\dfrac{C^T}{|A|}$, con C la matrice dei complementi algebrici della matrice A.

Esempio

Sia $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, sia $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ e sia $|A|\neq 0$

Con $c_{11}=(-1)^{1+1}|A_{11}|=a_{22}$, $c_{12}=(-1)^{1+2}|A_{12}|=-a_{21}$, $c_{21}=(-1)^{2+1}|A_{21}|=-a_{12}$, $c_{22}=(-1)^{2+2}|A_{22}|=a_{11}$

Pertanto $C=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

Conseguentemente $C^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = Agg(A)$

Pertanto $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$

Si osservi:

Se il vettore dei termini noti è un vettore nullo: $A \cdot x = 0$, il sistema si dice **omogeneo**.

I *sistemi omogenei* sono **compatibili**, infatti hanno ***almeno*** la soluzione $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Inoltre, se il $\det(A) \neq 0$ allora il sistema è anche **determinato** e quindi non esistono altre soluzioni oltre la soluzione $(0,0,0)$.

Caratteristica di una matrice

Si definisce caratteristica o rango di una matrice, l'ordine più alto delle sottomatrici estratte da A con determinante diverso da 0 e si denota con r.

T *Teorema di Rouché-Capelli*

Ipotesi

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette soluzioni se e solo se la caratteristica della matrice incompleta A è uguale alla caratteristica della matrice B.

allora

Tesi

1. Se $r = n = m$, il sistema è di Cramer, quindi compatibile, determinato e, come si è visto è risolvibile con la regola di Cramer oppure $A^{-1} \cdot b = x$
2. Se $r = n < m$, il sistema ammette una soluzione valida anche per le $m - n$ equazioni
3. Se $r < n = m$ allora il sistema è compatibile indeterminato, ovvero ammette infinite soluzioni.
4. Se $r < n < m$, il sistema ammette infinite soluzioni valide anche per le $m - n$ equazioni

Esempi

Primo caso: $r = n = m$

Consideriamo il sistema: $\begin{cases} 2x_1 + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

Si osserva che la matrice incompleta risulta $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

il cui determinante è

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+2) - (-2-1) - (2-2) = 12 + 3 = 15 \neq 0$$

$Car(A) = 3 = Car(B)$

Risolviamo $A^{-1} \cdot b = x$

$Agg(A) = C^T$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix},\ c_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\ c_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix},\ c_{21}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\ c_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix},\ c_{22}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\ c_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$$

Pertanto $C=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 5\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, quindi $C^T=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}$

Pertanto $A^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}}{15}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Quindi $x=A^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

$x_1=\frac{2}{5},\ x_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{3-5}{15}=-\frac{2}{15},\ x_3=-\frac{1}{3}$

Quindi la tripla ordinata risulta: $\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{15},-\frac{1}{3}\right)$

Secondo caso $r=n<m$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases}4x-y=0\\ 2y=1\\ 8x+2y=2\end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\\ 8 & 2\end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A)=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=8$$

Ed essendo la matrice completa

$$B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 8 & 2 & 2\end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(B)=\begin{vmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 8 & 2 & 2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 8 & 2\end{vmatrix}=4(4-2)-8=0$$

Quindi la $Car(A)=Car(B)=2=n<m$

Pertanto la soluzione del sistema dato sarà la soluzione del seguente sistema, e soddisferà anche le restanti $m-n$ equazioni

$$\begin{cases}4x-y=0\\ 2y=1\end{cases}$$

Essendo quindi tale sistema di Cramer, lo si può risolvere servendosi della regola di Cramer, per cui

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{8}=\frac{1}{8} \text{ ed } y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{8}=\frac{1}{2}$$

Quindi la coppia ordinata soluzione del sistema assegnato risulta

$$\left(\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right)$$

Terzo caso $r<n=m$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases}x+y+3z=1\\ -2x+2y+2z=2\\ -x+y+z=0\end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$$

Ed essendo la matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(B) = 0$$

Pertanto considerando la matrice incompleta ridotta di una riga ed una colonna, si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Quindi la $Car(A) = Car(B) = 2 < n = m$

Pertanto il sistema risulta compatibile indeterminato, le cui soluzioni saranno date dal seguente sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 - 3z \\ -2x + 2y = 2 - 2z \end{cases}$$

Pertanto, essendo tale sistema di Cramer, lo si può risolvere servendosi della regola di Cramer, per cui

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 1 \\ 2-2z & 2 \end{vmatrix}}{4} \text{ ed } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ -2 & 2-2z \end{vmatrix}}{8}$$

Quindi

$$x = \frac{2(1-3z) - (2-2z)}{4} \text{ ed } y = \frac{2 - 2z - (-2(1-3z))}{4}$$

Pertanto

$$x = \frac{-4z}{4} \text{ ed } y = \frac{4 - 8z}{4}$$

Quindi la tripla ordinata delle infinite soluzione del sistema assegnato risulta:

$$(-z, 1-2z, z), \quad \forall z \in R$$

Quarto caso $r < n < m$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$ il cui determinante è $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$

Quindi la $Car(A) = 1$

Ed essendo la matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$ il cui determinante è

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$$

$Car(B) = 1$

Quindi la soluzione è $x = 1 + y \ \forall y \in R$

Sistema incompatibile

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ il cui determinante è $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$

Quindi la $Car(A) = 2$

$$\det(B)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2(1+1)+(3-1)+(3+1)=10$$

$Car(B)=3\neq Car(A)=2$, quindi il sistema è incompatibile

Capitolo 10

Funzioni di due variabili

10.1 – Definizioni preliminari

Intorno di un punto

Si definisce *intorno* di *un punto* $(x_0, y_0) \in S$, *di raggio* $r > 0$, con $S \subseteq R^2$, il cerchio di raggio *r* e centro in (x_0, y_0) e si indica con

$$I_{(x_0,y_0)}(r) = \left\{(x, y) \in R^2 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\}$$

Punto interno di un insieme

Si dice che (x_0, y_0) è *punto interno* di un insieme *S*, con $S \subseteq R^2$, se esiste un intorno $I_{(x_0,y_0)}(r)$ tale che $I_{(x_0,y_0)} \subseteq S$.

Sottoinsieme aperto

Un sottoinsieme $S \subseteq R^2$, si dice *Aperto*, se $S = \varnothing$ oppure se $\forall (x_0, y_0) \in S$, (x_0, y_0) è interno ad *S*.

Funzione di due variabili

Si definisce una *funzione* f *di due variabili* reali x e y con dominio $S \subseteq R^2$, quella legge che assegna un determinato valore, $f(x,y)$, per ogni punto (x,y) di S, e si denota: $f : S \to R$, con $S \subseteq R^2$ aperto e diverso dal vuoto e con $z = f(x,y)$.

Massimo(minimo) relativo

Sia $f : S \to R$, con $S \subseteq R^2$, si definisce *punto di massimo* (*minimo*) *relativo* per f il punto (x_0, y_0) tale che, se $\exists I_{(x_0,y_0)}$ per cui $\forall (x,y) \in S \cap I_{(x_0,y_0)}$ risulta $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$).

aperto e diverso dal vuoto e con $z = f(x,y)$.

Si osserva che, in tal caso, $f(x_0, y_0)$ si definisce *massimo* (*minimo*) *relativo* di f .

Massimo(minimo) assoluto

Sia $f : S \to R$, con $S \subseteq R^2$, si definisce *punto di massimo* (*minimo*) *assoluto* per f il punto (x_0, y_0), tale che, se $\forall I_{(x_0,y_0)}$ per cui $\forall (x,y) \in S \cap I_{(x_0,y_0)}$ risulta $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$).

Si osserva che, in tal caso, $f(x_0, y_0)$ si definisce *massimo* (*minimo*) *assoluto* di f .

Si osserva che, in tal caso, $f(x_0, y_0)$ si definisce *massimo* (*minimo*) *assoluto* di f .

Derivata parziale

Sia $f: S \rightarrow R$, con $S \subseteq R^2$ aperto e diverso dal vuoto e con $z = f(x, y)$, la *derivata parziale* misura la variazione del valore della funzione f rispetto alla variazione dei valori delle variabili indipendente x e y.

La derivata parziale *del primo ordine* di f rispetto a x e con y mantenuta costante, si denota con: $\frac{\partial f}{\partial x}$, o con $\frac{\partial z}{\partial x}$ oppure con $f'_x(x, y)$.

Risulta quindi $f'_x(x, y) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}$.

La derivata parziale *del primo ordine* di f rispetto a y e con x mantenuta costante, si denota con $\frac{\partial f}{\partial y}$, o con $\frac{\partial z}{\partial y}$ oppure con $f'_y(x, y)$.

Risulta quindi $f'_y(x, y) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$.

Sia $f: S \rightarrow R$, con $S \subseteq R^2$ aperto e diverso dal vuoto e con $z = f(x, y)$, la derivata parziale del primo ordine $\frac{\partial f}{\partial x}$ in genere, risulta ancora una funzione di due variabili e posta che sia derivabile parzialmente, si possono generare due nuove funzioni quali derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti x e y.

Analogamente possiamo ragionare per la funzione derivata parziale del primo ordine $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Le quattro funzioni che si ottengono sono dette *derivate parziali del secondo ordine* di f, e si denotano rispettivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y) = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x,y)=f''_{yy}(x,y).$$

Per la maggior parte delle funzioni f in due variabili, per il Teorema di Schwarz, risulta vera la seguente uguaglianza $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

Gradiente della funzione

Sia $f: S \to R$, con $S \subseteq R^2$ aperto e diverso dal vuoto e con $z=f(x,y)$, si definisce *gradiente* della funzione f il vettore delle derivate parziali del primo ordine, rispetto alle variabili indipendenti e si indica con $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$

Estremanti relativi interni

Sia $f: S \to R$, con $S \subseteq R^2$ aperto e diverso dal vuoto e con $z=f(x,y)$, che ammette derivate parziali fino al secondo ordine:

Si definiscono *estremanti relativi interni* della funzione, i punti $(x_0, y_0) \in S$ in cui la funzione assume valore massimo o minimo relativo.

10.2 – Alcuni utili teoremi

T *Teorema 0, di Weierstrass*

Ipotesi

Sia $f: S \to R$, con $S \subseteq R^2$ e sia $z = f(x,y)$ continua e sia S un insieme piano non vuoto, chiuso e limitato.

allora

Tesi

Esistono due punti $(a,b) \in S$ e $(c,d) \in S$, tale $\forall (x,y) \in S$ risulta: $f(a,b) \leq f(x,y) \leq f(c,d)$

Questo primo teorema fornisce le condizioni sufficienti dell'esistenza di un minimo ed un massimo assoluto.

Il successivo teorema ci aiuta ad individuare tali punti.

T *Teorema di Fermat (condizioni necessarie per gli estremanti interni)*

Ipotesi

Sia $f: S \to R$, con $S \subseteq R^2$ e $z = f(x,y)$, funzione differenziabile, se (x_0, y_0) è un punto interno ad S ed è un punto di massimo o di minimo per $f(x,y)$

allora

Tesi

(x_0, y_0) è un **punto stazionario**, ovvero $f'_x(x_0, y_0) = 0$ e $f'_y(x_0, y_0) = 0$

In un punto di estremo locale interno, la funzione deve essere stazionaria, ovvero tutte le derivate parziali del primo ordine devono essere nulle.

Tuttavia un punto stazionario *non necessariamente è un punto* di estremo locale.

Esempio 1

Si dimostra che il punto $A=(0,0)$, per la funzione $f(x,y)=x^2-y^2$ non è di estremo locale. È facile verificare che il punto $A=(0,0)$ è un punto *stazionario* in quanto $\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}=\{2x,-2y\}$ per cui si annulla nel punto dato e risulta che $f(0,0)=0$. Inoltre si osserva che $f(x,0)=x^2$ mentre $f(0,y)=-y^2$ quindi la funzione assume, in un intorno molto prossimo al punto stazionario, valori sia positivi che negativi, mentre la funzione in tale punto vale 0; pertanto nell'intorno dello stesso la funzione non risulta sempre maggiore di zero, nel caso fosse un *punto di minimo,* o sempre minore di zero, nel caso fosse un *punto di massimo*, quindi è un **punto di sella**.

T *Teorema II, sulle condizioni sufficienti del secondo ordine per gli estremanti interni*

Ipotesi

Sia $f:S\to R$, con $S\subseteq R^2$ e $z=f(x,y)$, funzione differenziabile, sia (x_0,y_0) un **punto interno ad *S*, stazionario per** $f(x,y)$, ovvero $f'_x(x_0,y_0)=0$ e $f'_y(x_0,y_0)=0$,

Sia $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$ e sia $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

Tesi

Se $A<0$, e $AC-B^2>0$, allora (x_0,y_0) è un punto di massimo locale

Se $A>0$, e $AC-B^2>0$, allora (x_0,y_0) è un punto di minimo locale

Se $AC-B^2<0$, allora (x_0,y_0) è un punto di sella

Se $AC-B^2=0$, allora (x_0,y_0) potrebbe essere un punto di massimo, di minimo o di sella locale.

Con $AC-B^2=H_{(x,y)}$ il determinante Hessiano.

Esempio 2

Data la funzione $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$, ipotizziamo che abbia un punto di minimo.

Pertanto per il I Teorema di Fermat bisogna individuare gli eventuali punti stazionari, ovvero i punti in cui il gradiente della funzione si annulla:

$\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$, quindi posto tale vettore pari a zero, si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6y=0 \\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow 6y-6x=0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-y=0 \\ y-x=0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-x=0 \\ y=x \end{cases} = \begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=x \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i due punti stazionari $A=(0,0)$ e $B=(1,1)$

Mostriamo ora che la funzione $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$, ha un minimo nel punto stazionario $B=(1,1)$,

pertanto per il II Teorema bisogna trovare le derivate parziali di secondo ordine, ovvero

$f''_{xx}(x,y)=12x$, $f''_{yy}(x,y)=6$, $f''_{xy}(x,y)=-6$ ed $f_{yx}(x,y)=-6$

Quindi essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2=72x-36=36>0$, per cui $H_{(1,1)}=72-36=36>0$ ed essendo $f''_{xx}(1,1)=12>0$, $f''_{yy}(x,y)=6>0$

Quindi il punto stazionario trovato è un punto di minimo, il cui valore è: $f(1,1)=2-6+3=-1$

Mentre essendo $H_{(0,0)}=-36<0$ il punto $A=(0,0)$ è un punto di sella.

Esempio 3

Data la funzione $f(x,y)=-2x^2-2xy-2y^2+36x+42y-158$, ipotizziamo che abbia un punto di massimo,

pertanto per il I Teorema bisogna individuare gli eventuali punti stazionari, ovvero

$\nabla f(x,y)=\{f'_x(x,y), f'_y(x,y)\}$, detto gradiente della funzione *f*, pari a zero, quindi

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow -4x-2y+36=0 \\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow -2x-4y+42=0 \end{cases} = \begin{cases} 4x+2y=36 \\ 2x+4y=42 \end{cases} = \begin{cases} 2x+y=18 \\ x+2y=21 \end{cases} = \begin{cases} 2(21-2y)+y=18 \\ x=21-2y \end{cases}$$

Pertanto la soluzione è $A=(5,8)$

Mostriamo ora che la funzione $f(x,y)=-2x^2-2xy-2y^2+36x+42y-158$, ha un massimo nel punto stazionario $A=(5,8)$

pertanto per il II Teorema bisogna trovare le derivate parziali di secondo ordine, ovvero

$f''_{xx}(x,y)=-4<0$, $f''_{yy}(x,y)=-4<0$, $f''_{xy}(x,y)=-2$ ed $f_{yx}(x,y)=-2$

e $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2=16-4=12>0$

Il punto stazionario trovato è un punto di massimo ed ha valore $f(5,8)=100$

Esempio 4

Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$f(x,y)=x^3-x^2-y^2+8$

Il gradiente fornisce il seguente sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x=0 \\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow -2y=0 \end{cases} = \begin{cases} x(3x-2)=0 \\ -2y=0 \end{cases}$$

da cui osserviamo che le soluzioni sono, dalla prima $x=0$ e $x=\frac{2}{3}$ e dalla seconda $y=0$, pertanto $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3},0\right)$ sono gli unici due punti stazionari , inoltre

$f''_{xx}(x,y)=6x-2$, e $f''_{yy}(x,y)=-2$, e $f''_{xy}(x,y)=0$

Pertanto avendo nel punto stazionario $(0,0)$, $f''_{xx}(0,0)=-2<0$ ed essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2=4>0$, il punto stazionario trovato è di massimo locale, stretto.

Mentre nel punto stazionario $\left(\frac{2}{3},0\right)$, $f''_{xx}\left(\frac{2}{3},0\right)=2>0$ ed essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2=-4<0$, il punto stazionario trovato è di sella.

Esempio 5

Un'azienda produce due prodotti, *A* e *B*.

La funzione di costo giornaliero per la produzione di x quantità di *A*, e di y quantità di *B*, è la seguente: $C(x,y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500$

Supponendo che l'azienda venda tutta la merce prodotta giornalmente ad un prezzo unitario di 15 euro per *A* e di 9 euro per *B*, quindi la funzione ricavi è la seguente: $R(x,y) = 15x + 9y$

Calcolare i livelli giornalieri di produzione x e y che massimizzano il profitto.

Considerando che il profitto giornaliero è dato dalla differenza tra i costi ed i ricavi, si determina la funzione profitto

$$\pi(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$$

$$\pi(x,y) = 15x + 9y - 0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 - 4x - 2y - 500$$

$$\pi(x,y) = -0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 + 11x + 7y - 500$$

Da cui il gradiente $\frac{\partial \pi}{\partial x} = -0.08x - 0.01y + 11$ e $\frac{\partial \pi}{\partial y} = -0.02y - 0.01x + 7$, le cui soluzioni sono $x = 100$ e $y = 300$, e quindi il profitto è $\pi(100{,}300) = 1100$

Si osserva che il punto cercato è un massimo in quanto

$\frac{\partial \pi}{\partial xx} = -0.08 < 0$, $\frac{\partial \pi}{\partial yy} = -0.02 < 0$ e $\frac{\partial \pi}{\partial xy} = -0.01 < 0$ ed il determinante della matrice Hessiana risulta positivo.

Esempio 6

La produzione di un'azienda inquina, e pertanto viene limitata la sua produzione ad un massimo di 100 unità per entrambi gli unici suoi due prodotti.

Il problema è determinare il massimo della funzione di profitto con tale *vincolo* di limitazione, per cui considerando la funzione profitto dell'esempio 5, si ha:

$$\max \pi(x,y) = -0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 + 11x + 7y - 500$$

Soggetta a $x+y=100$

Da cui $x+y=100 \Leftrightarrow y=100-x \Leftrightarrow g(x)=100-x$

Per cui nella funzione profitto, si ottiene

$\pi(x,g(x))=-0.04x^2-0.01x(100-x)-0.01(100-x)^2+11x+7(100-x)-500$, ottenendo quindi

$\hat{\pi}(x)=-0.04x^2-x+0.01x^2-100+2x-0.01x^2+11x+700-7x-500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \hat{\pi}(x)=-0.04x^2+5x+100$

Siamo di fronte ad una funzione ad una variabile, pertanto

$$\hat{\pi}'(x)=-0.08x+5 \Leftrightarrow \hat{\pi}'(x)=0 \Leftrightarrow -0.08x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{0.08}=62.5$$

Pertanto dal vincolo posto si ha $y=100-62.5=37.5$

Ed osservando che $\hat{\pi}''(x)=-0.08<0$, il punto provato e di massimo, ed il suo valore è dato da:

$$\pi(62.5,37.5)=-0.04(62.5)^2-0.01(62.5)(37.5)-0.01(37.5)^2+11(62.5)+7(37.5)-500=256.25$$

Esempio 7

Un'azienda produce tre prodotti e deve soddisfare un ordine di 100 quantità complessive.

Quindi $x+y+z=100$

La funzione costo di ogni singolo prodotto, è:

$C_1(x)=10+\frac{1}{2}x^2$,

$C_2(y)=10+\frac{1}{4}y^2+y$,

$C_3(z)=10+2z$,

pertanto la funzione complessiva che esprime il costo è:

$C(x,y,z)=10+\frac{1}{2}x^2+10+\frac{1}{4}y^2+y+10+2z$.

Osserviamo che la funzione vincolo $x+y+z=100 \Leftrightarrow z=100-x-y$, e quindi è possibile riscrivere la funzione costo complessivo

$$\hat{C}(x,y,g(x,y))=10+\frac{1}{2}x^2+10+\frac{1}{4}y^2+y+10+2(100-x-y)$$

Ovvero, $C(x,y,g(x,y))=\hat{C}(x,y)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{4}y^2-y+130$

Il cui gradiente è $\nabla\hat{C}(x,y)=\left\{\hat{C}'_x=x-2,\hat{C}'_y=\frac{1}{2}y-1\right\}$,

per cui le soluzioni del sistema $\nabla\hat{C}(x,y)=0$, sono $x=2$ ed $y=2$, che nel vincolo forniscono $z=100-2-2=96$

e danno un costo complessivo

$$C(2,2,96)=10+\frac{1}{2}2^2+10+\frac{1}{4}2^2+2+10+2\cdot 96=227$$

10.3 – Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Un modo per determinare i minimi e massimi di una funzione di due o più variabili, anche nelle ipotesi che ci fossero dei vincoli, e che non sia facilmente riconducibile ad una funzione di una variabile, è quello che utilizza la funzione **Lagrangiana**.

Incominciamo con l'enunciare il **Teorema delle condizioni necessarie** per i punti estremanti.

Siano $f:S\to R$ e $g:S\to R$ con $S\subseteq R^2$ due funzioni, derivabili con derivate continue. Condizione necessaria ma non sufficiente affinché $(x_0,y_0)\in S$ sia di estremo relativo per la funzione *f*, ristretta al vincolo dato dall'equazione $g(x,y)=0$ della funzione *g*, è che siano verificate le seguenti condizioni:

1) $g'(x_0,y_0)=0$ ed $\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0)$

2) $\exists\lambda_0\in R$ tale che il gradiente della funzione ausiliaria $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y))$ sia nullo nel punto (x_0,y_0,λ_0)

ovvero

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y)-\lambda g'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)-\lambda g'_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

dove λ_0 è detto moltiplicatore di Lagrange, mentre *L*, viene detta la funzione Lagrangiana.

Tale metodo non ci permette di classificare i punti stazionari, ma ci dice quali sono.

Un modo per classificarli, è valutare la funzione $f(x,y)$ nei punti che soddisfano il sistema di cui sopra, eliminando la componente λ_0.

Per esempio per determinare le soluzione del problema di minimo o massimo della funzione $f(x,y)$, soggetta al vincolo $g(x,y)=c$

Dato λ un parametro reale, si scrive la funzione Lagrangiana *L*

I) $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-c)$

II) Si determina il gradiente di tale funzione, ponendolo pari a zero

III) Si ottiene quindi un sistema lineare di tre equazione in tre incognite

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow f'_x(x,y)-\lambda g'_x(x,y)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow f'_y(x,y)-\lambda g'_y(x,y)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow g(x,y)=c \end{cases}$$

IV) Le terne dei valori (x,y,λ) che risolvono simultaneamente il sistema sono le candidate alle possibili soluzione del problema, ammesso che il problema abbia soluzioni.

Esempio 8

Un soggetto con funzione utilità $U(x,y)=xy$ e vincolo di bilancio dato dall'equazione $g(x,y)=2x+y=100$ determinare la eventuale soluzione

Si osservi che $\nabla g(x,y)=\{2,1\}\neq(0,0)$

Per determinare il massimo $U(x,y)=xy$ soggetta a $g(x,y)=2x+y-100=0$

Ci serviamo della funzione Lagrangiana $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+y-100)$

Il suo gradiente posto uguale a zero, risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow y-2\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x-\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2x+y=100 \end{cases} = \begin{cases} y=2\lambda \\ x=\lambda \\ 2x+y=100 \end{cases}$$

Pertanto operando per sostituzione , dalla seconda equazione, la prima risulta $y=2x$ che sostituita nel vincolo, $100=2x+2x \Leftrightarrow x=25$ e conseguentemente $y=50$ quindi la terna che soddisfa il sistema è $P=(25,50,25)$, per cui la funzione di utilità in tale punto avrà valore $U(25,50)=1250$, ovvero l'utilità massima.

Esempio 9

Risolvere il problema di massimo o di minimo della seguente funzione

$f(x,y)=x^2+y^2$ con vincolo $g(x,y)=x^2+xy+y^2=3$

Si osservi che $\nabla g(x,y)=\{2x+y,x+2y\}\neq(0,0)$ si annulla nel punto $(0,0)$, pertanto valore da scartare nelle soluzioni.

La funzione Lagrangiana risulta $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^2+xy+y^2-3)$

ed il suo gradiente posto uguale a zero, è:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2x-\lambda(2x+y)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 2y-\lambda(2y+x)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x^2+xy+y^2=3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda=\dfrac{2x}{(2x+y)} \\ 2y=\dfrac{2x}{(2x+y)}(2y+x) \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$$

Ovvero $\begin{cases} \lambda=\dfrac{2x}{(2x+y)} \\ 2y(2x+y)=2x(2y+x) \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda=\dfrac{2x}{(2x+y)} \\ y^2=x^2 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$

Quindi nella seconda equazione, essendo $y=\pm x$, per cui se $y=x$ sostituito nel vincolo $g(x,x)=x^2+xx+x^2=3$ si hanno le soluzioni, $(1{,}1)$ e $(-1,-1)$.

Se $y=-x$ nel vincolo $g(x,-x)=x^2-xx+x^2=3$ si hanno le soluzioni, $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Se poi osserviamo che il sistema pone che deve essere rispettata anche la disuguaglianza, $2x+y\neq 0$, nel caso si abbia $y=-2x$, questa condizione nella prima equazione del sistema, determina $2x-\lambda(2x+y)=0 \Leftrightarrow 2x-\lambda(2x-2x)=0 \Leftrightarrow x=0$ così come anche $y=0$, ma questa soluzione non soddisfa il vincolo, pertanto viene rispettata la disuguaglianza $2x+y\neq 0$.

Trovati i quattro punti incriminati, è possibile vedere che nella funzione $f(x,y)=x^2+y^2$, assumono i seguenti valori:

$f(1{,}1)=f(-1,-1)=2$

$f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=6$

Pertanto è possibile concludere che i punti $(1{,}1)$ e $(-1,-1)$ risolvono il problema di minimizzazione, mentre i punti $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ quello di massimizzazione.

Esempio 10

Un soggetto con funzione utilità $U(x,y)=xy$ e vincolo di bilancio dato dall'equazione $g(x,y)=x^2+y^2-1$ determinare la soluzione

Si osservi che $\nabla g(x,y)=\{2x,2y\}\neq(0,0)$ si annulla nel punto $(0,0)$, pertanto da scartare nelle soluzioni.

Il massimo $f(x,y)=xy$ soggetta a $g(x,y)=x^2+y^2-1$

La funzione Lagrangiana è $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$

Ed il suo gradiente posto uguale a zero, risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow y-2x\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x-2y\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 1-x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Pertanto i punti che soddisfano il sistema risultano: $P_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$, $P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$, $P_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ e $P_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$; ai quali restano associati i seguenti punti stazionari $S_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $S_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $S_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $S_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; per cui valutando la funzione in tali punti si ha $f(S_1)=\frac{1}{2}$, $f(S_2)=-\frac{1}{2}$, $f(S_3)=-\frac{1}{2}$, ed $f(S_4)=\frac{1}{2}$; per cui confrontando i valori, S_1 ed S_4 risultano punti di massimo, mentre S_2 ed S_3 punti di minimo.

Esempio 11

Un soggetto con funzione $f(x,y)=xy$ e vincolo dato dalla disequazione $g(x,y)=x^2+2y^2-1\leq 0$, determinare la soluzione

Osserviamo che il vincolo è dato da una ellisse, $x^2+2y^2=1$ e la disequazione $x^2+2y^2-1\leq 0$ rappresenta pertanto l'ellisse e la sua parte interna, e la funzione è continua al suo interno, pertanto per il Teorema di Weierstrass, ammette minimo e massimo al suo interno. Troviamo quindi i punti estremanti liberi

$Int(S)=\{(x,y)\in R^2, x^2+2y^2-1<0\}$

Determiniamo gli estremi liberi con il gradiente Hessiano

$f'_x(x,y)=y$ e $f'_y(x,y)=x$, per cui

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow y=0 \\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow x=0 \end{cases},$$

pertanto il punto $(0,0)$ è l'unico punto stazionario interno ed il valore della funzione è $f(0,0)=0$.

Il determinante Hessiano risulta $H(0,0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$ pertanto il punto trovato è di sella.

Si osservi che $\nabla g(x,y)=(2x,4y)\neq(0,0)$ si annulla nel punto $(0,0)$, pertanto da scartare nelle soluzioni.

Concentriamoci sulla frontiera

$Frontiera\ (S)=\{(x,y)\in R^2, x^2+2y^2-1=0\}$

La funzione Lagrangiana è $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+2y^2-1)$

Ed il suo gradiente posto uguale a zero, risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow y-2x\lambda=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow x-4y\lambda=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow 1-x^2+2y^2=0 \end{cases}$$

Pertanto i punti che soddisfano il sistema risultano: $P_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $P_3=\left(+\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $P_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; ai quali restano associati i seguenti punti stazionari $S_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$, $S_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$, $S_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ e $S_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$; per cui valutando la funzione in tali punti si ha $f(S_1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(S_2)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(S_3)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ed $f(S_4)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$; per cui confrontando i valori, S_1 ed S_4 risultano punti di massimo, mentre S_2 ed S_3 punti di minimo.

Indice analitico