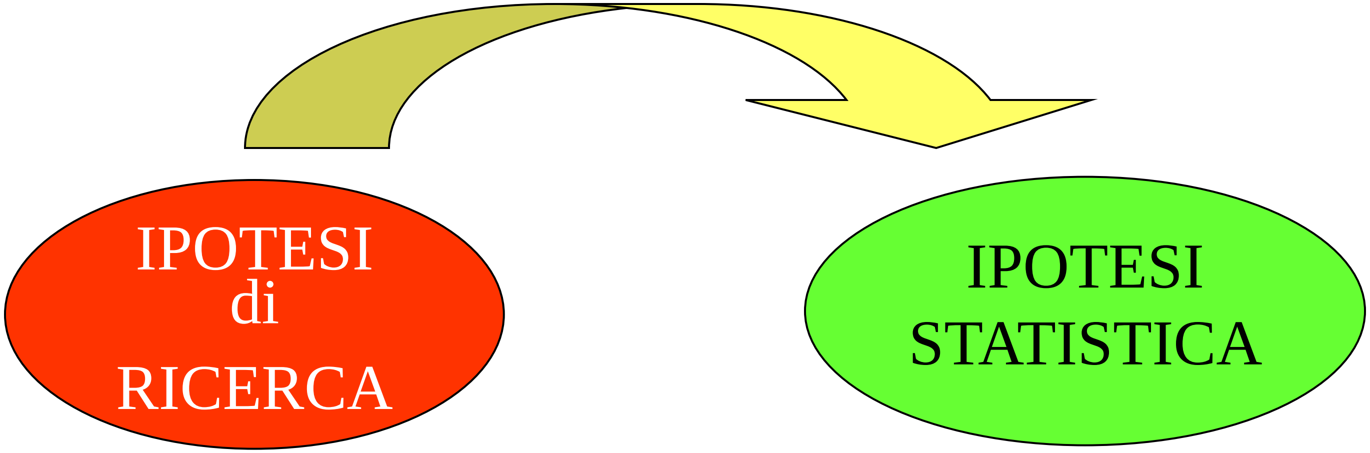
VERIFICA DELLE IPOTESI

☞ **Obiettivo: <u>guidare</u> il clinico, il ricercatore o l'amministratore <u>a prendere una decisione riguardo ad un parametro</u> della popolazione <u>esaminando un campione</u> di quella popolazione.**

L'osservazione dei fenomeni porta alla formulazione di teorie che richiedono un conferma basata su una metodologia scientifica.



Le ipotesi statistiche sono una formulazione delle ipotesi di ricerca in modo tale da poter essere valutate con opportune tecniche statistiche.

SIGNIFICATIVITA' STATISTICA

Confronto tra il farmaco A e il farmaco B

1. Il farmaco A potrebbe essere effettivamente superiore al farmaco B

2. Qualche fattore che non è stato assolutamente controllato, per esempio l'età dei pazienti, può essere responsabile della differenza (in questo caso si avrebbe un confronto viziato)

3. La differenza potrebbe essere dovuta alla variazione casuale

Soltanto dopo aver escluso che sussistono i motivi 2 e 3, potremo concludere che A è superiore a B

VERIFICA DELLE IPOTESI

Analisi dei dati
Assunzioni sul modello probabilistico , sui parametri, sul campione

Formulazione dell'ipotesi :
nulla H_0 e alternativa H_1

Costruzione della statistica test e della sua distribuzione

Definizione della Regola di Decisione e valutazione degli errori:

α rifiutare l'ipotesi nulla vera

β accettare l'ipotesi nulla falsa

Decisione statistica e decisione clinica

PASSI DEL PROCESSO DI VERIFICA DELLE IPOTESI

✎ **DATI**: **la scelta del test appropriato per la verifica delle ipotesi dipende dai dati di cui si dispone.**

✎ **ASSUNZIONI**: **il processo di verifica delle ipotesi cambia in relazione a delle assunzioni o supposizioni**. Le più importanti sono :

- ✓ distribuzione della popolazione (Gauss, binomiale);
- ✓ varianza nota (verifica su una media)
- ✓ varianza incognita omogenea o non omogenea (confronto tra due medie)
- ✓ campioni indipendenti o appaiati

✎ **IPOTESI STATISTICA: si formula un sistema di ipotesi:**

•la prima è una ipotesi di uguaglianza detta ipotesi nulla H_0

•la seconda è una ipotesi di disuguaglianza detta ipotesi alternativa H_1.

Il ragionamento di verifica delle ipotesi parte dal presupposto che H_0 sia vera per giungere al termine del processo con il suo rifiuto, oppure con un “non rifiuto” dell’ipotesi nulla H_0.

✎ IPOTESI:

di solito l’ipotesi alternativa è quella più simile, come formulazione, alla ipotesi di ricerca, è ciò che il ricercatore sta dimostrando;

l’ipotesi nulla è un ipotesi di uguaglianza mentre quella alternativa è un ipotesi di diversità, che può essere una diversità generica (≠) oppure può avere un direzione precisa (< ; >);

l’ipotesi nulla e quella alternativa sono complementari ed esaustive quindi esauriscono tutte le possibilità riguardanti il valore del parametro in analisi.

✎ **IL TEST**: la "statistica test" è una formula matematica che si può calcolare a partire dai dati campionari.

✎ **LA DISTRIBUZIONE DELLA STATISTICA TEST**: ogni statistica test ha una sua distribuzione di probabilità che consentirà la decisione finale di accettazione o rifiuto dell'ipotesi nulla.

✎ **LA REGOLA DI DECISIONE**: la statistica test esita in un calcolo numerico rispetto al quale bisogna prendere la decisione di accettare o rifiutare l'ipotesi nulla. Per fare questo è necessario avere un **termine di riferimento**. Questo dipende:

- ❖ dalla distribuzione della statistica test;
- ❖ dal livello di significatività, che rappresenta il grado di errore che il ricercatore accetta a priori di voler commettere rifiutando l'ipotesi nulla quando invece è vera.

Dalla distribuzione della statistica test e in relazione ad un certo livello di significatività si individua(no) sull'asse delle ascisse dei limiti che delimitano delle aree:

- ☞ quelle più esterne ai limiti sono dette **zone di rifiuto** (bassa probabilità che sia vera H_0);
- ☞ quelle interne ai limiti sono dette **zone di accettazione** (alta probabilità che sia vera H_0).

✎ <u>**IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA'**</u> è indicato con <u>**α**</u> ed è l'<u>**errore di I tipo**</u>: la **probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla vera**.

Di solito si decide di commettere un errore di I tipo piccolo (α =0,05)

E' possibile commettere anche un altro tipo di errore:

accettare l'ipotesi nulla falsa.

Questo è detto <u>**errore di II tipo**</u> e si indica con <u>**β**</u>.
1-**β** si definisce **potenza del test**: rifiutare H_0 quando è vera H_1

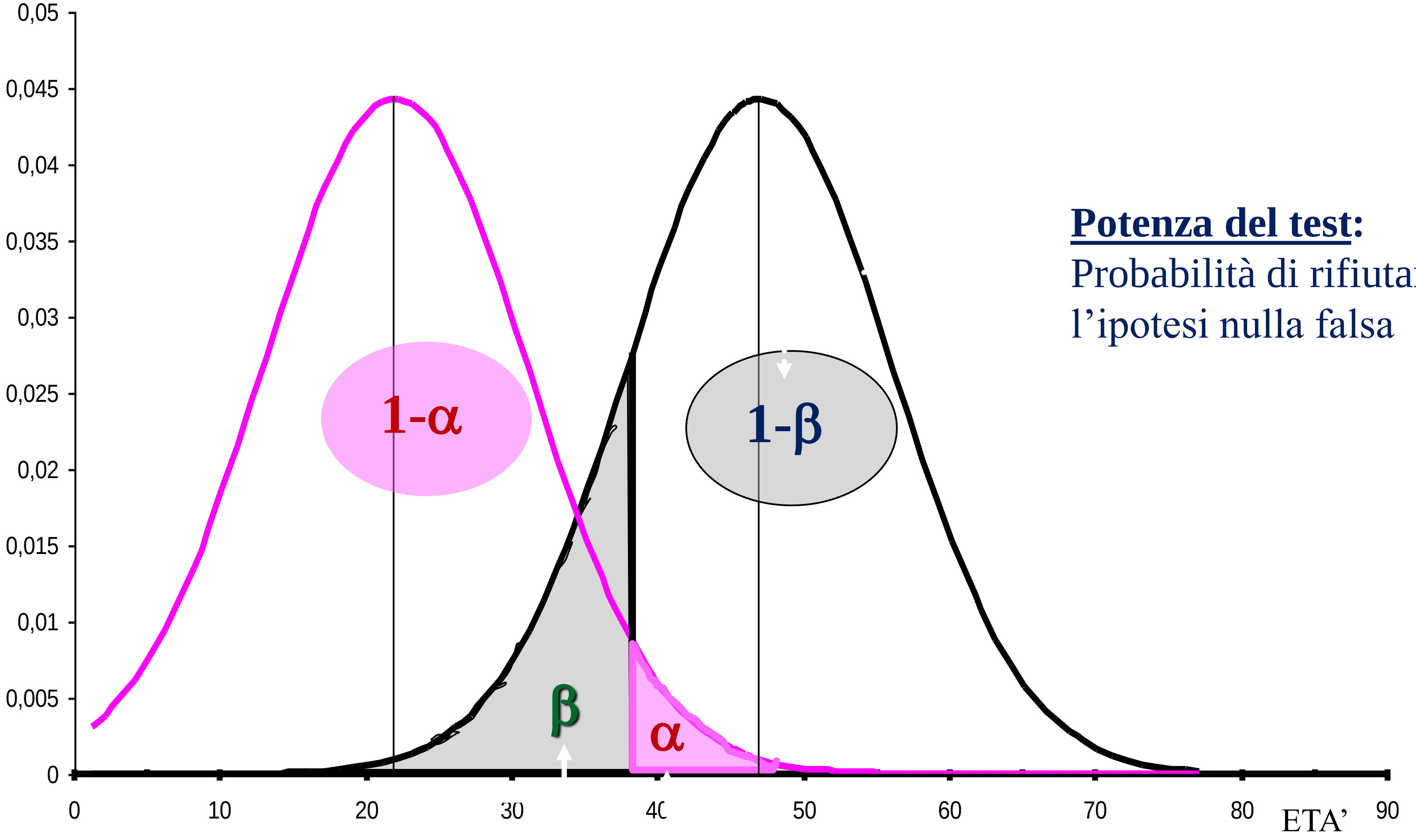
La probabilità di commettere l'errore di II tipo β di solito è maggiore di α ma comunque piccolo.

RISCHIO DI ERRORI

		Ipotesi vera	
		Ipotesi nulla H_0	Ipotesi alternativa H_1
Ipotesi accolta dopo il test	Ipotesi nulla H_0	Esatta $(1-\alpha)$	Errore II specie β
	Ipotesi alternativa H_1	Errore I specie α	Esatta $(1-\beta)$

- **Rischio di prima specie o tipo: α**
  - ☞ **Respingere l'ipotesi H_0 quando essa è vera**
    - ☞ **α = livello di significatività**
- **Rischio di seconda specie o tipo: β**
  - ☞ **Accettare l'ipotesi H_0 quando è vera H_1**

Potenza del test : $1-\beta$
Respingere l'ipotesi H_0 quando è vera l'ipotesi alternativa H_1



Potenza del test:
Probabilità di rifiutare
l'ipotesi nulla falsa

Falsi negativi **Falsi positivi**

Errore di secondo tipo:
rischio di non rifiutare
l'ipotesi nulla falsa

Errore di primo tipo:
rischio di rifiutare
l'ipotesi nulla vera

ERRORE ALFA O ERRORE DI I TIPO

L'ESPRESSIONE "P<" INDICA LA PROBABILITA' DI UNA CONCLUSIONE FALSAMENTE POSITIVA *(UN TRATTAMENTO RISULTA MIGLIORE DELL'ALTRO QUANDO IN REALTA' NON LO E')*

TANTO PIU' PICCOLO E' IL VALORE DI p TANTO MENO PROBABILE E' CHE I TRATTAMENTI POSTI A CONFRONTO ABBIANO UN EFFETTO SIMILE

ERRORE BETA O ERRORE DI II TIPO

COMMETTENDO L'ERRORE BETA SI AFFERMA CHE I TRATTAMENTI SONO UGUALI QUANDO IN REALTA' ESSI SONO DIFFERENTI (*FALSO NEGATIVO*)

L'ERRORE BETA SI VERIFICA SOLITAMENTE IN CASO DI CAMPIONI DI PICCOLE DIMENSIONI

NON SI EVIDENZIA UN EFFETTO FAVOREVOLE QUANDO QUESTO E' PRESENTE

LA POTENZA DI UN TEST HA UN IMPATTO DIRETTO SULLA DIMENSIONE DEL CAMPIONE

PIU' GRANDE E' LA POTENZA

(E' RAGIONEVOLE CHE NON SIA INFERIORE A 0.80)

PIU' GRANDE E' LA DIMENSIONE DEL CAMPIONE

IL VALORE P

Molte volte il ricercatore indica il più basso livello di significatività al quale l’ipotesi di ricerca (ipotesi nulla) può essere respinta.

Questo livello è chiamato ***“valore p”*** ed **esprime la probabilità che una differenza come quella osservata sia causata dal solo caso.**

L’affermazione **“p<0.01”** significa che **è piccolissima la probabilità che la variazione casuale sia da sola responsabile della differenza** cosicché intendiamo in realtà affermare che il risultato è statisticamente significativo.

Inversamente l’affermazione **“p>0.10”** implica che **soltanto il caso può realmente spiegare la differenza osservata**, la quale dovrà perciò essere catalogata come ***statisticamente non significativa***.

Dimensione del campione
e interpretazione dell'assenza di significatività

Una differenza statisticamente significativa è tale in quanto non può essere giustificata dal solo caso.

Al contrario una differenza statisticamente non significativa non deve essere necessariamente attribuibile soltanto al caso.

Di fronte ad una differenza non significativa l'entità del campione è molto importante: con un campione piccolo è infatti probabile che l'errore di campionamento sia elevato, il che conduce spesso ad una non significatività, anche quando la differenza osservata è tutt'altro che casuale.

E' per questa ragione che un risultato statisticamente non significativo dovrebbe essere considerato quasi sempre come non conclusivo, piuttosto che come segno dell'assenza di una vera differenza tra i gruppi confrontati.

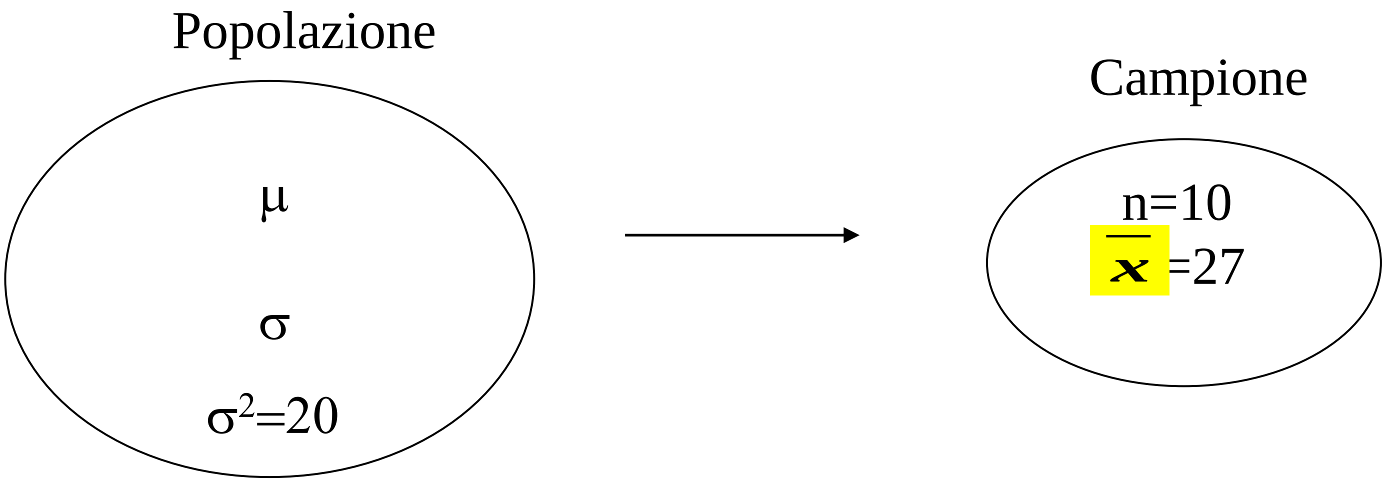
Significatività clinica e significatività statistica

E’ importante tenere sempre presente che un’etichetta di **significatività statistica non significa necessariamente che la differenza sia significativa dal punto di vista clinico.**

Con campioni di cospicua entità, piccolissime differenze, che possiedono poca o nessuna importanza clinica, possono rivelarsi statisticamente significative.

Le implicazioni pratiche di qualsiasi risultato devono essere valutate su basi diverse da quelle esclusivamente statistiche.

VERIFICA DI IPOTESI SU UNA MEDIA – Varianza nota



Si vuole verificare se l'età media della popolazione sia diversa da un valore dato μ_0=30.

Dati: età dei 10 soggetti del campione. La stima della media nel campione è di 27 anni.

Assunzioni:

☞ campione estratto da popolazione con distribuzione normale;

☞ varianza della popolazione nota.

Ipotesi

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$ → Ipotesi alternativa bidirezionale

$\mu > \mu_0$ → Ipotesi alternativa unidirezionale

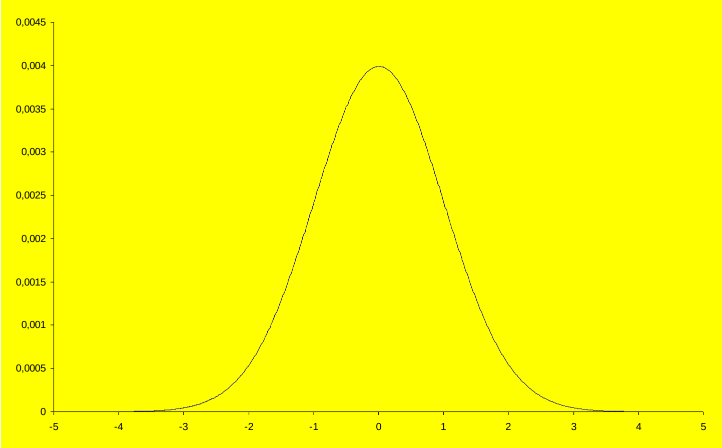
$\mu < \mu_0$

Statistica test

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

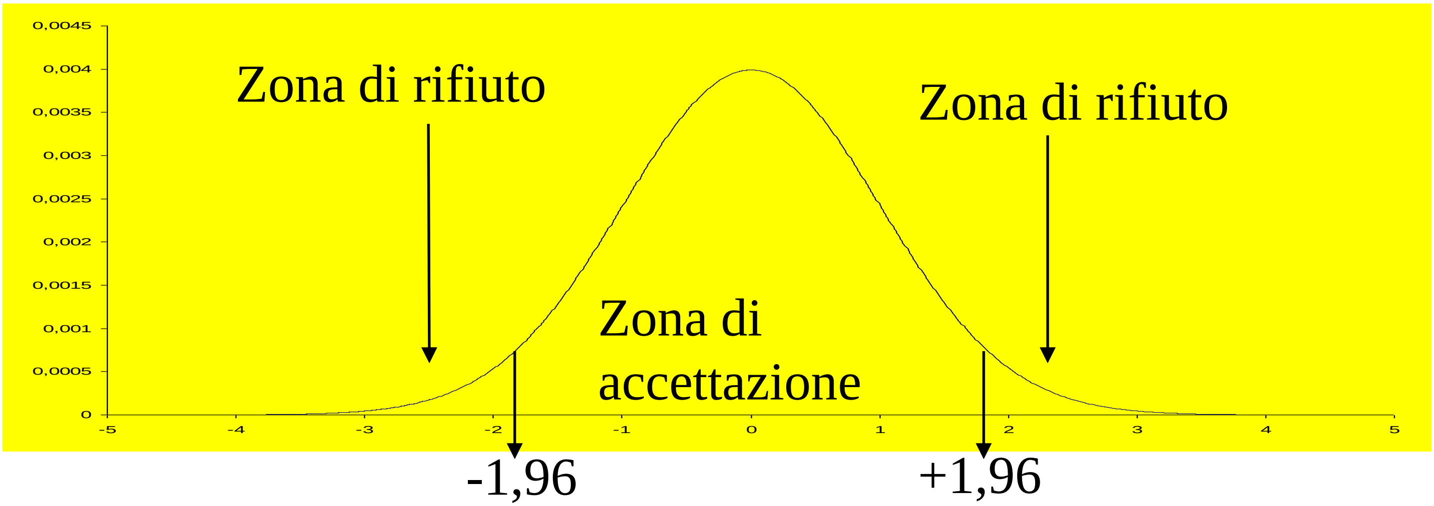
Distribuzione della statistica test

Distribuzione di Gauss standard.



Regola di decisione

Fisso α, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera, accettabilmente bassa: 0,05. Supponendo di aver formulato un ipotesi bidirezionale dovremo suddividere α nei due lati della curva ($\alpha/2$ nelle code). Si individueranno in questo modo i limiti della zona di rifiuto (code); sapendo che la distribuzione della statistica è di Gauss standard i limiti si ricercheranno nelle apposite tavole e saranno uguali ed opposti.



Calcolo la statistica test:

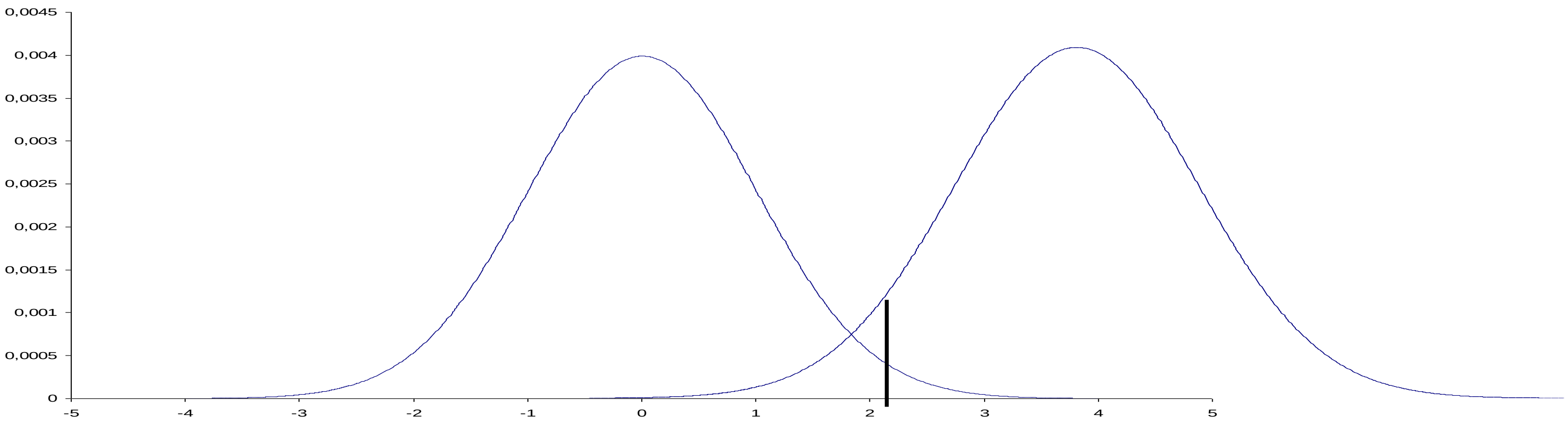
$$z = \frac{27-30}{\sqrt{20/10}} = -\frac{3}{1,4142} = -2,12$$

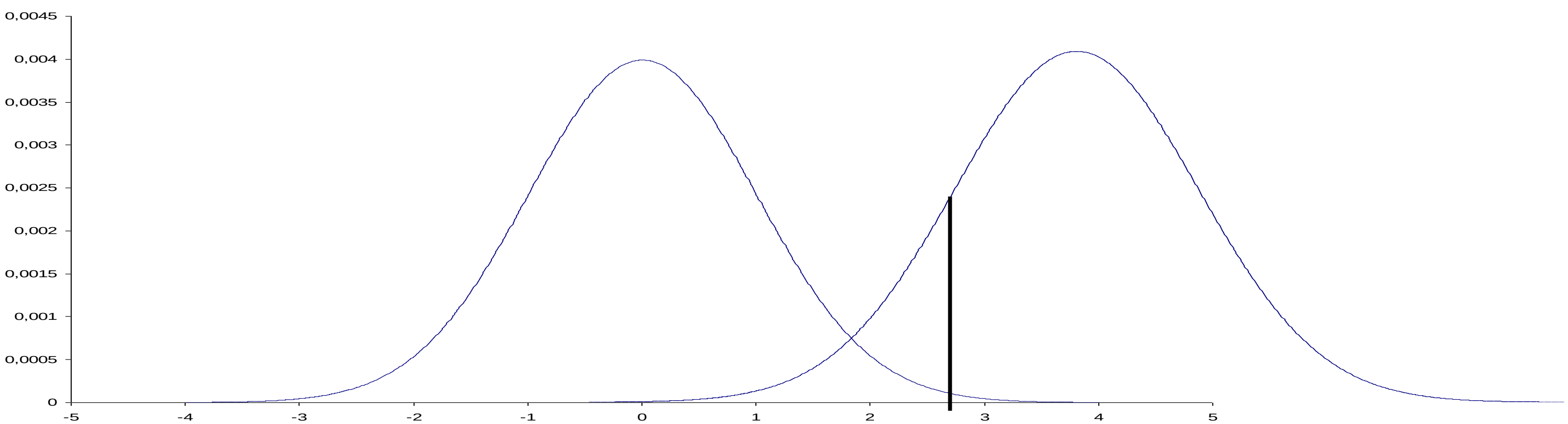
Decisione statistica

Confronto z_{calc} con z ricavato dalle tavole della distribuzione Gauss standard in corrispondenza di α=0,05: -1,96>-2,12.

La decisione statistica sarà di rifiutare H_0 perché -2,12 cade nella zona di rifiuto.

La media dell'età della popolazione da cui è stato estratto il campione è significativamente diversa da 30 ad un livello di significatività del 5%.


0,0045
0,004
0,0035
0,003
0,0025
0,002
0,0015
0,001
0,0005
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


0,0045
0,004
0,0035
0,003
0,0025
0,002
0,0015
0,001
0,0005
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

VERIFICA DELLA SIGNIFICATIVITA' DI UNA MEDIA CON VARIANZA INCOGNITA

Supponiamo di eseguire uno studio immunologico in un campione di 49 soggetti, la variabile di interesse è il diametro in mm dell'alone cutaneo (reazione all'antigene nel punto di inoculo).

Dati: diametro in mm dell'alone di 49 soggetti del campione. La stima della media nel campione è $\bar{x}$=21 mm, la deviazione standard stimata nel campione è S=11 mm.

Assunzioni:

☞ campione estratto da popolazione con distribuzione normale;

☞ varianza della popolazione non nota.

Supponiamo di voler verificare che la nostra media sia diversa da un media data μ_0 =30 mm

Ipotesi

H$_0$: $\mu = \mu_0$

H$_1$: $\mu \neq \mu_0$ → Ipotesi alternativa bidirezionale

$\mu > \mu_0$ → Ipotesi alternativa unidirezionale

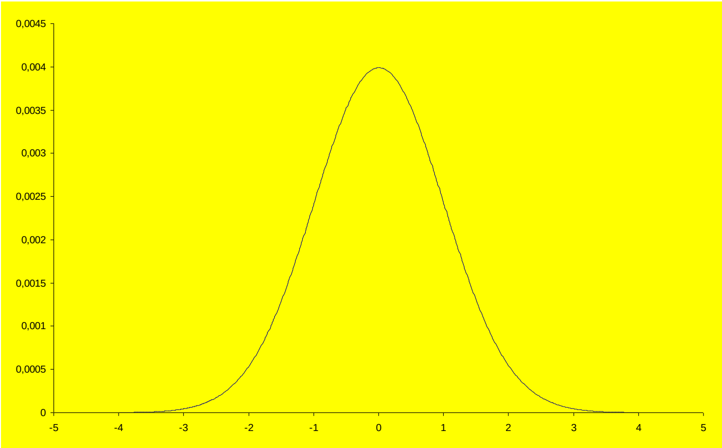
$\mu < \mu_0$

Statistica test

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

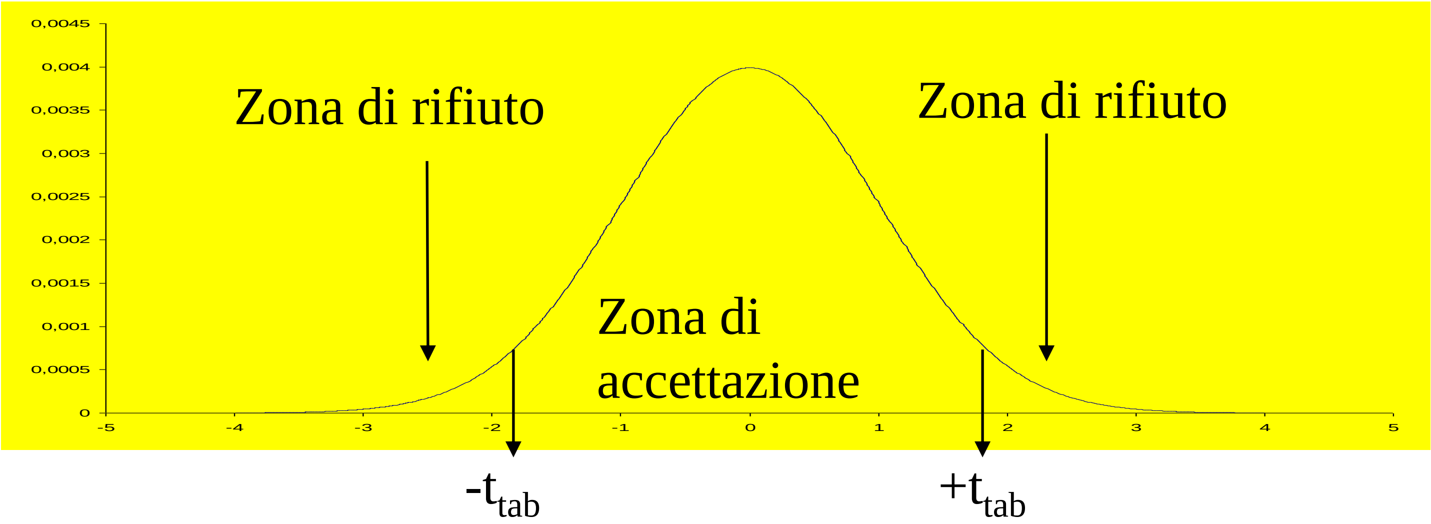
Distribuzione della statistica test

Distribuzione t-Student, caratterizzata dai gradi di libertà, n-1, della varianza



Regola di decisione

Fisso α, la probabilità di rifiutare l’ipotesi nulla quando è vera, accettabilmente bassa: 0,05. Supponendo di aver formulato un ipotesi bidirezionale dovremo suddividere α nei due lati della curva (α/2 nelle code). Si individueranno in questo modo i limiti della zona di rifiuto (code); sapendo che la distribuzione della statistica è t-Student i limiti si ricercheranno nelle apposite tavole in corrispondenza del livello di significatività prescelto e dei gradi di libertà n-1. Anche in questo caso i limiti sono uguali ed opposti.



Nel nostro esempio con α = 0,05
distribuzione della statistica: t-Student con gradi di libertà: 48 (n-1).
I valori tabulati di t-Student sono ± 2,201.

Calcolo della statistica test:

$$t_{calc} = \frac{21 - 30}{11 / \sqrt{49}} = \frac{-9}{1,5714} = -5,72$$

Decisione statistica: rifiuto l’ipotesi nulla dato che -5,72<-2,201

Decisione clinica:

il valore medio del diametre nella popolazione da cui è stato estratto il campione è significativamente diverso da 30 mm

VERIFICA DI IPOTESI:
CONFRONTO DI DUE MEDIAPER CAMPIONI INDIPENDENTI
VARIANZE NOTE

μ_1 $\quad$ Popolazione $\quad$ μ_2

$\sigma_1 = 1{,}5$ $\quad$ $\sigma_2 = 2$

$n_1 = 12$ $\quad$ Campione $\quad$ $n_2 = 12$

$\bar{x}_1 = 11{,}1$ $\quad$ $\bar{x}_2 = 7{,}8$

Si vuole verificare se le medie dei valori di calcemia nelle due popolazioni che presentano deficit di vit. D siano diverse, sapendo che la popolazione 1 è sottoposta a trattamento dietetico, mentre la popolazione 2 non è sottoposta ad alcun trattamento.

Dati: valori di calcemia, in mg%ml dei 12 soggetti dei due campioni.

Assunzioni:

- ☞ campioni estratti da popolazioni con distribuzione di Gauss;
- ☞ campioni indipendenti
- ☞ varianza della popolazione nota.

Ipotesi

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ → Ipotesi alternativa bidirezionale

$\mu_1 > \mu_2$

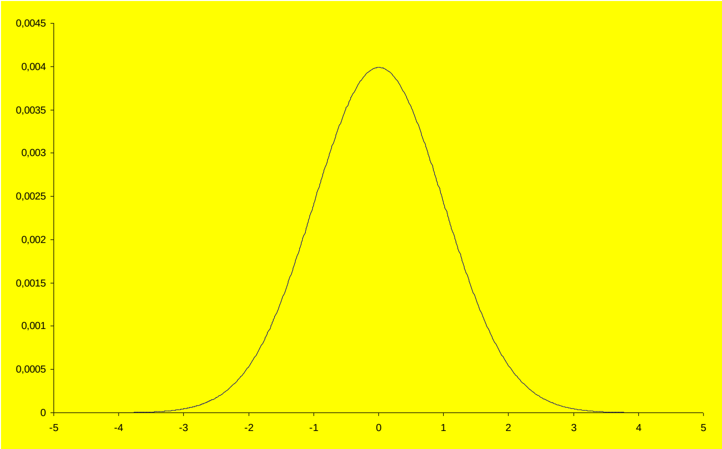
$\mu_1 < \mu_2$ → Ipotesi alternativa unidirezionale

Statistica test

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

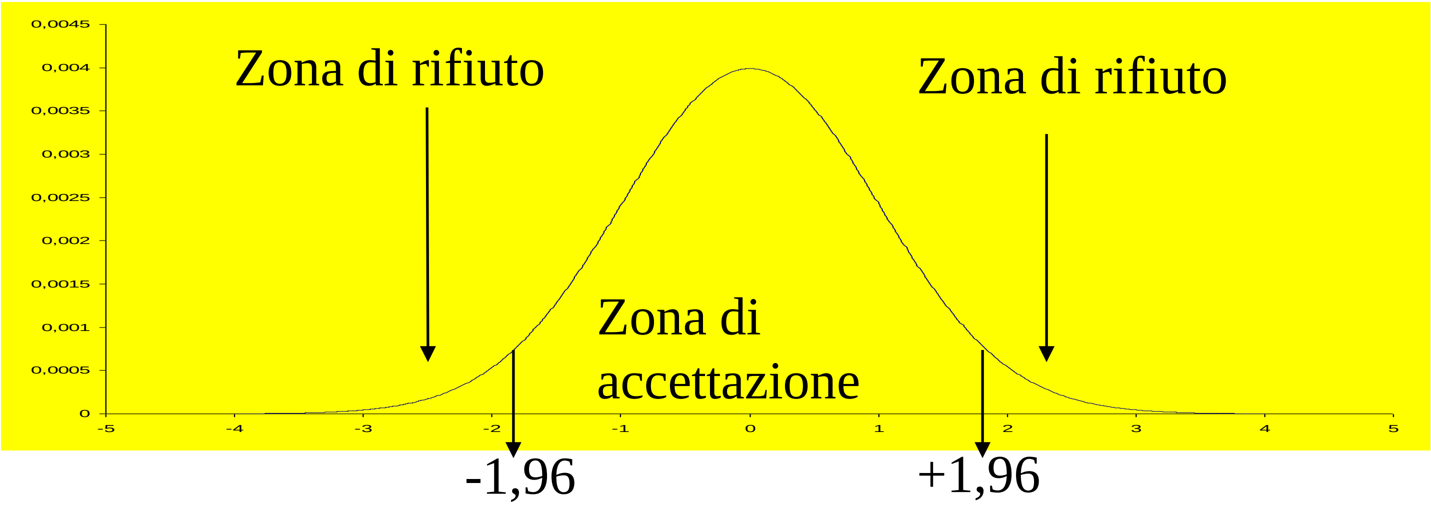
Distribuzione della statistica test

Distribuzione di Gauss standard.



Regola di decisione

Fisso α, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera, accettabilmente bassa: 0,05. Supponendo di aver formulato un ipotesi bidirezionale dovremo suddividere α nei due lati della curva ($\alpha/2$ nelle code). Si individueranno in questo modo i limiti della zona di rifiuto (code); sapendo che la distribuzione della statistica è di Gauss standard i limiti si ricercheranno nelle apposite tavole e saranno uguali ed opposti.



Calcolo della statistica test:

$$z_{calc} = \frac{11 - 7{,}8}{\sqrt{\frac{1{,}5^2}{12} + \frac{2^2}{12}}} = \frac{3{,}3}{0{,}78} = 4{,}57$$

Decisione statistica

rifiuto l'ipotesi nulla dato che 4,57>1,96

Decisione clinica

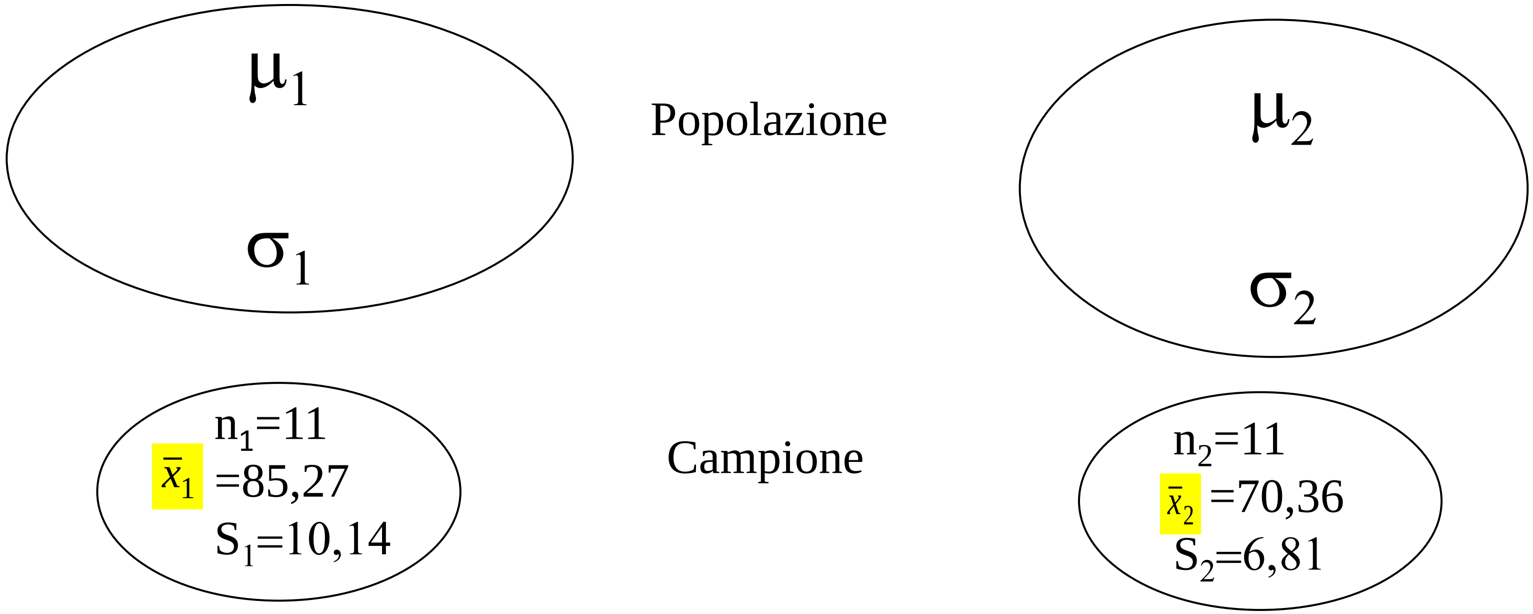
il valore medio della calcemia nelle due popolazione è significativamente diverso, pertanto l'integrazione di vit. D nella dieta favorisce positivamente la concentrazione di calcio ematica

IL PROBLEMA

Sono stati rilevati i dati relativi alla frequenza cardiaca (misurata in battiti al minuto) in un gruppo di soggetti con angina e in un gruppo di soggetti con infarto.

Anginosi	Infartuati
81	61
65	75
77	78
87	80
95	68
89	65
103	68
89	69
78	70
83	79
91	61

VERIFICA DI IPOTESI:
CONFRONTO DI DUE MEDIE PER CAMPIONI INDIPENDENTI
VARIANZE INCOGNITE



<u>Dati</u>: frequenza cardiaca in battiti al minuto degli 11 soggetti dei due campioni.
1. anginosi; 2. infartuati

<u>Assunzioni</u>:

☞ campioni estratti da popolazioni con distribuzione di Gauss;

☞ campioni indipendenti

☞ varianza delle popolazioni non nota;

☞ varianza delle popolazioni omogenee.

Ipotesi

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: & \mu_1 \neq \mu_2 \\ & \mu_1 > \mu_2 \\ & \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

$\mu_1 \neq \mu_2$ → Ipotesi alternativa bidirezionale

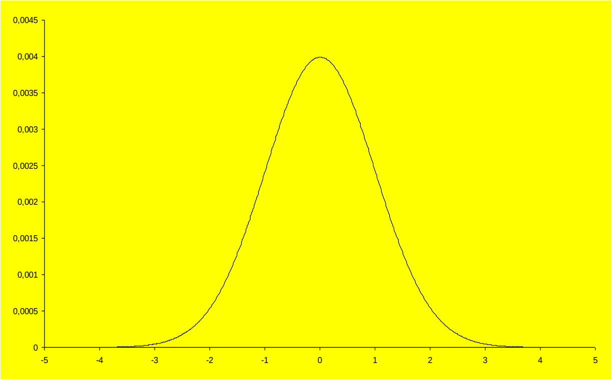
$\mu_1 > \mu_2$, $\mu_1 < \mu_2$ → Ipotesi alternativa unidirezionale

Statistica test

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

Distribuzione della statistica test

Distribuzione t-Student con g.l. n_1+n_2-2 della varianza comune S^2_p.

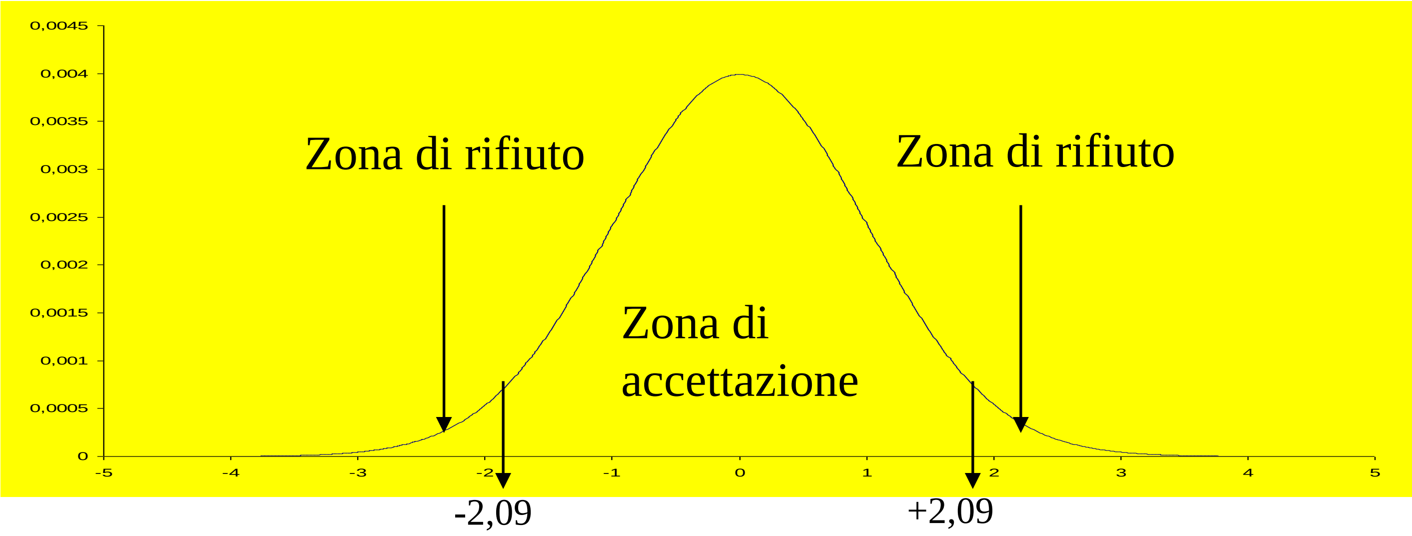


Si ricorda che :

$$S_p^2 = \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Regola di decisione

Fisso α, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera, α=0,05. Supponendo di aver formulato un ipotesi bidirezionale dovremo suddividere α nei due lati della curva (α/2 nelle code). Sapendo che la distribuzione della statistica è di t-Student i limiti si ricercheranno nelle apposite tavole in corrispondenza di α e dei gradi di libertà n_1+n_2-2 e saranno uguali ed opposti (nel nostro esempio i limiti sono ±2,09).



Calcolo della statistica test: Sapendo che S^2_p =74,635 con g.l.=20

$$t_{calc} = \frac{85,27 - 70,36}{\sqrt{\frac{74,635}{11} + \frac{74,635}{11}}} = 4,05$$

Decisione statistica: rifiuto l'ipotesi nulla dato che 4,05>2,09

Decisione clinica: il valore medio dei battiti minuto nelle due popolazioni è significativamente diverso

Il confronto tra campioni indipendenti prevede il calcolo della varianza comune S^2_p che è possibile calcolare solo se le varianze sono omogenee . Pertanto è necessario verificare l'omogeneità delle varianze:

IPOTESI

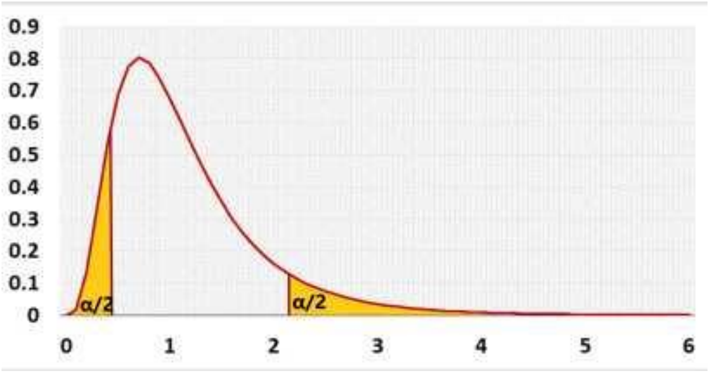
$$\begin{cases} H_0: \quad \sigma^2_1 = \sigma^2_2 \\ H_1: \quad \sigma^2_1 \neq \sigma^2_2 \end{cases}$$

Statistica test

$$F = S_1^2 / S_2^2$$

Distribuzione della statistica test

Distribuzione F-Fisher che dipende dai g.l. del numeratore e del denominatore.



Regola di decisione

Fisso α= 0,05, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera. Si individueranno in questo modo i limiti della zona di rifiuto (coda); sapendo che la distribuzione della statistica è di F-Fisher i limiti si cercheranno nelle apposite tavole in corrispondenza di α e dei gradi di libertà n_1-1 (g.l.=10) del numeratore e n_2-1 (g.l.=10) del denominatore. Nel nostro esempio F_{tab}=0.27 e 3.72

Calcolo della statistica test:

$$F_{cal} = 102,82 / 46,45 = 2,21$$

Decisione statistica

non rifiuto l’ipotesi nulla dato che $0,27 < 2,21 < 3,72$.

Le due varianze si possono considerare omogenee e quindi posso calcolare S^2_p

Decisione clinica:
le due varianze si possono considerare uguali nel limite della variabilità biologica e dell’errore casuale.

Nel caso in cui il test F abbia portato a rifiutare l'ipotesi nulla, allora le due varianze non si possono considerare uguali.
Il test per il confronto tra due medie diventa allora :

$$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

I gradi di libertà di questa statistica che ha ancora una distribuzione t-Student sono determinati dalla formula di Dixon e Massey:

$$g.l. = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2}}$$

CONFRONTO TRA CAMPIONI INDIPENDENTI
TEST DELLA SOMMA DEI RANGHI
(WILCOXON)

Dati: frequenza cardiaca misurata in battiti al minuto degli 11 soggetti con angina e degli 11 soggetti con infarto.

Assunzioni:

☞ campioni indipendenti

☞ non si possono fare assunzioni sulla distribuzione.

Anginosi	Infartuati	Campione combinato	
81	61	61i	61i
65	75	65i	65a
77	78	68i	68i
87	80	69i	70i
95	68	75i	77a
89	65	78i	78a
103	68	79i	80i
89	69	81a	83a
78	70	87a	89a
83	79	89a	91a
91	61	95a	103a

Campione combinato	**Assegnazione dei ranghi**	
61i	1	1,5
61i	2	1,5
65i	3	3,5
65a	4	3,5
68i	5	5,5
68i	6	5,5
69i	7	7
70i	8	8
75i	9	9
77a	10	10
78i	11	11,5
78a	12	11,5
79i	13	13
80i	14	14
81a	15	15
83a	16	16
87a	17	17
89a	18	18,5
89a	19	18,5
91a	20	20
95a	21	21
103a	22	22

Si noti che a valori uguali si assegna rango pari alla media dei ranghi che ciascun valore avrebbe se fossero diversi

Campione combinato	Assegnazione dei ranghi
61i	1,5
61i	1,5
65i	3,5
65a	3,5
68i	5,5
68i	5,5
69i	7
70i	8
75i	9
77a	10
78i	11,5
78a	11,5
79i	13
80i	14
81a	15
83a	16
87a	17
89a	18,5
89a	18,5
91a	20
95a	21
103a	22

Somma ranghi degli anginosi
$\Sigma Ra=173$

Somma ranghi degli infartuati
$\Sigma Ri=80$

Cerco sulle tavole di Wilcoxon il valore tabulato in corrispondenza della numerosità dei due campioni e del livello di significatività.
Confronto il valore del campione di numerosità più piccola con l'intervallo tabulato.
Se il valore calcolato cade fuori dall'intervallo tabulato allora rifiuto H_0, altrimenti accetterò H_0.
Nel nostro caso i valori tabulati sono 96-157, per cui rifiuto H_0.

TEST DI WILCOXON PER CAMPIONI INDIPENDENTI

Si costituisce un unico gruppo di valori provenienti dai due gruppi indipendenti

↓

Si dispongono i valori in ordine crescente

↓

Si assegnano i ranghi ai valori ordinati. A valori uguali si assegneranno ranghi pari alla media dei ranghi che i valori avrebbero avuto se fossero stati diversi

↓

Si sommano i ranghi appartenenti ai valori del primo gruppo e quelli appartenenti ai valori del secondo gruppo, ottenendo così due somme di ranghi

↓

Si individua l'intervallo di valori tabulato per α fissato (0,05) e la numerosità dei gruppi a confronto

↓

Se la somma dei ranghi del campione di numerosità minore risulta esterna all'intervallo tabulato si rifiuta l'ipotesi nulla di uguaglianza delle mediane

IL PROBLEMA

Si vuole verificare l’efficacia di una dieta sulla riduzione dei livelli di colesterolo in un gruppo di soggetti obesi.
Pertanto il livello di colesterolo è stato misurato prima e dopo la dieta

X_1 Prima	X_2 Dopo
201	200
231	236
221	216
260	233
228	224
237	216
326	296
235	195
240	207
267	247
284	210
201	209

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$$

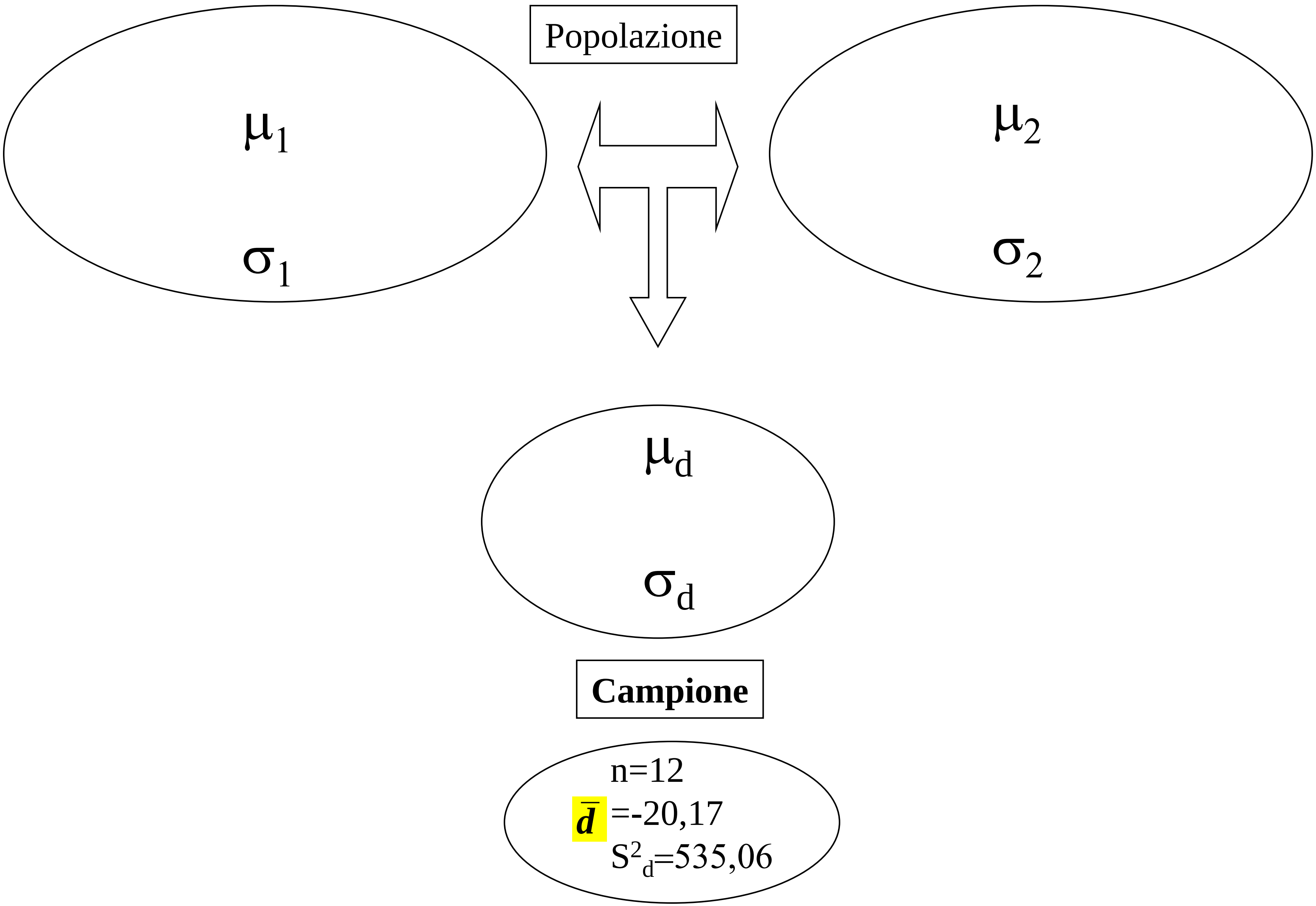
X_1	X_2	$di = x_2 - x_1$
201	200	-1
231	236	+5
221	216	-5
260	233	-27
228	224	-4
237	216	-21
326	296	-30
235	195	-40
240	207	-33
267	247	-20
284	210	-74
201	209	+8

Dati: valori di colesterolo, in mg%ml, prima e dopo un trattamento di 12 soggetti. Si esegue la differenza tra i volori prima e dopo del trattamento. La media è la media delle differenze, la deviazione standard è la deviazione standard delle differenze.

Assunzioni:

- ☞ campione estratto da popolazione con distribuzione di Gauss;
- ☞ campioni non indipendenti

VERIFICA DI IPOTESI:
CONFRONTO DI DUE MEDIE PER CAMPIONI NON INDIPENDENTI



Ipotesi

H_0: $\mu_d = 0$

H_1: $\mu_d \neq 0$ → Ipotesi alternativa bidirezionale

$\mu_d > 0$

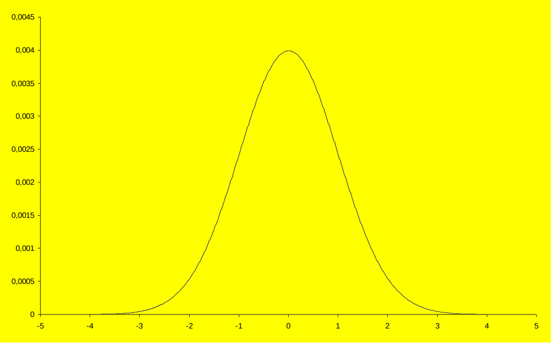
$\mu_d < 0$ → Ipotesi alternativa unidirezionale

Statistica test

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_d / \sqrt{n}}$$

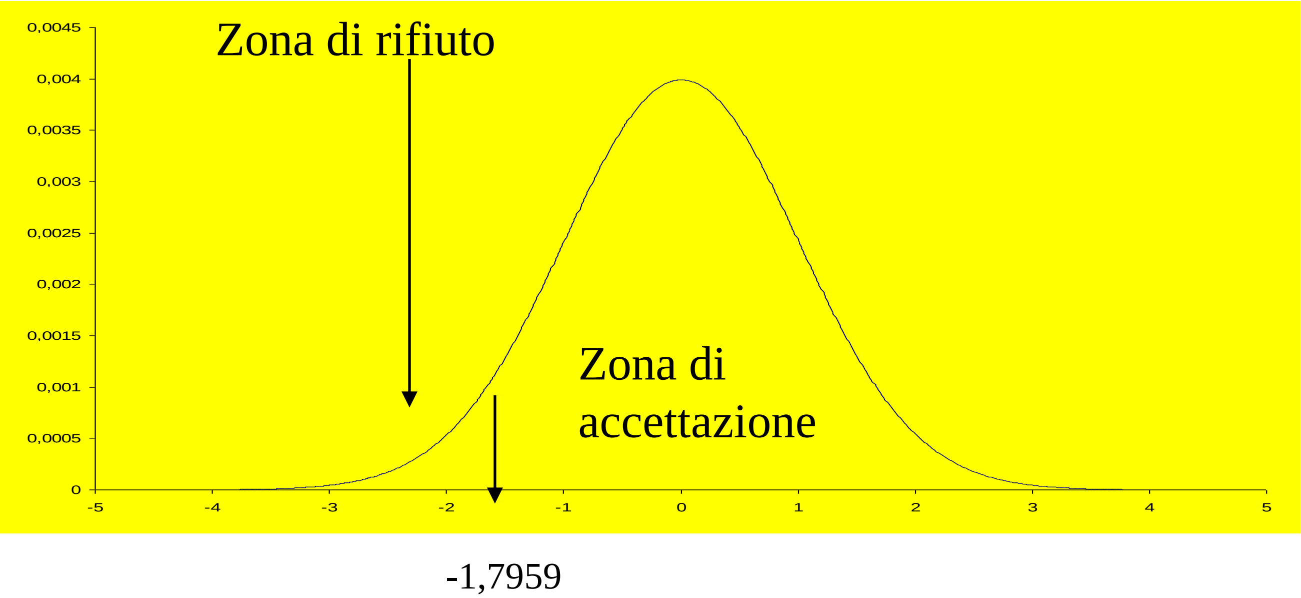
Distribuzione della statistica test

Distribuzione t-Student, caratterizzata dai gradi di libertà, n-1, della varianza



Regola di decisione

Fisso α, la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando è vera, accettabilmente bassa: 0,05. Supponendo di aver formulato un ipotesi unidirezionale, si individua in questo modo il limite della zona di rifiuto (coda); sapendo che la distribuzione della statistica è di t-student il limite si ricerca nelle apposite tavole in corrispondenza del livello di significatività e dei gradi di libertà.



Calcolo della statistica test:

$$t_{calc} = \frac{-20{,}17}{\sqrt{\frac{535{,}06}{12}}} = \frac{-20{,}17}{6{,}68} = -3{,}02$$

Decisione statistica

Rifiuto H_0 dato che -3,02<-1,7959; il valore calcolato cade nella regione di rifiuto

Decisione clinica

Il trattamento eseguito ha avuto un effetto positivo nella riduzione dei livelli di colesterolo.

Si noti che se avessimo assunto l’indipendenza dei campioni sarebbero cambiati i gradi di libertà:

gruppo 1=12

gruppo 2=12

g.l.=$n_1+n_2-2=n+n-2=2n-2=2(n-1)=24-2=22$

Invece considerando i campioni appaiati si ha:

n=12

g.l.=n-1=12-1=11.

E’ evidente che cambiando i gradi di libertà cambia anche il t_{tab}, con possibili conseguenze sull’accettazione o rifiuto dell’ipotesi nulla

CONFRONTO TRA CAMPIONI NON INDIPENDENTI
TEST DELLA SOMMA DEI RANGHI CON SEGNO
(WILCOXON CON SEGNO)

X_1	X_2	$di=x_2-x_1$
201	200	-1
231	236	+5
221	216	-5
260	233	-27
228	224	-4
237	216	-21
326	296	-30
235	195	-40
240	207	-33
267	247	-20
284	210	-74
201	209	+8

Differenze senza segno in ordine non decrescente e relativo rango

1	1	-
4	2	-
5	3,5	+
5	3,5	-
8	5	+
20	6	-
21	7	-
27	8	-
30	9	-
33	10	-
40	11	-
74	12	-

Sommo tra loro i ranghi
con segno positivo **ΣR+= 8.5**
e quelli con segno negativo **ΣR- = 69.5**

Per prendere la decisione confronterò i valori calcolati con un intervallo di valori che trovo sulle tavole dei ranghi con segno in corrispondenza del numero di coppie e del livello di significatività $\alpha= 0.05$ stabilito a priori.

nel nostro esempio 13 – 65

Se la coppia di valori calcolati cade all'interno dell'intervallo tabulato allora accetto H_0;
se invece i valori cadono all'esterno dell'intervallo tabulato rifiuterò H_0.

Nel nostro caso entrambe le somme dei ranghi sono fuori dell'intervallo

pertanto

rifiuto l'ipotesi nulla e concludo che la dieta è stata efficace

TEST DI WILCOXON PER CAMPIONI APPAIATI

Dopo aver effettuato le differenze tra i valori, si considerano le differenze in valori assoluto

↓

Si dispongono le differenze in valore assoluto in ordine crescente

↓

Si assegnano i ranghi ai valori ordinati. A valori uguali si assegneranno ranghi pari alla media dei ranghi che i valori avrebbero avuto se fossero stati diversi. Le differenze nulle vengono eliminate

↓

Si sommano i ranghi appartenenti alle differenze con segno positivo e quelli appartenenti alle differenze con segno negativo, ottenendo così due somme di ranghi

↓

Si individua l'intervallo di valori tabulato per α fissato (0,05) e la numerosità delle differenze escluse quelle nulle

↓

Se la somma dei ranghi calcolata risulta esterna all'intervallo tabulato si rifiuta l'ipotesi nulla di uguaglianza