COMPITO DI MATEMATICA FINANZIARIA (C. L. E. C.) – 18 luglio 2013 – PROF. AMATO

1. Essendo δ un numero positivo, si consideri la legge finanziaria su base semestrale

$$v(t,s) = e^{-0.05(s-t)+\delta(s-t)^2} \qquad 0 \leq t \leq s \leq 6\,.$$

   a) Calcolarne la forza d'interesse e studiarne le proprietà;

   b) Si calcoli il prezzo del titolo $x = (200, 400, 600)/(1, 2,3)$ su scadenzario annuale, sapendo che il TCN con scadenza fra 1.5 anni, rende il 4% annuo;

   c) Quale sarebbe stato il prezzo del titolo x in capitalizzazione semplice al 4% annuo?

2. Considerata la struttura di tassi a pronti su base semestrale

$$\check{\imath} = (0.020, 0.021, 0.022, 0.023, 0.023, 0.024)$$

   A) determinare la struttura dei tassi a termine, supposto il mercato perfetto;

   B) determinare il prezzo di acquisto del portafoglio costituito dal titolo x dell'esercizio 1b) e dal TCF di VN = 10000, rimborsato l'1% sopra la pari, cedole semestrali al TAN del 7% e scadenza fra 3 anni;

   C) supponendo di detenere il portafoglio in B) fino alla scadenza, reinvestendo le poste nel mercato, calcolare il TRES a termine dell'operazione.

3. Per l'acquisto di un appartamento, è necessario pagare all'atto di stipula 50600, tutto compreso, e accollarsi un mutuo decennale da ammortizzare con rate semestrali posticipate di euro 6200, a cominciare dalla fine del primo semestre. Sapendo che le spese iniziali ammontano a 600 euro

   a) Si calcoli il TAN del prestito;

   b) si compili la decima riga del piano di ammortamento del finanziamento puro;

   c) si dica se il TAEG è inferiore al l'8%, giustificando la risposta.

4. Da un paniere costituito dal titolo $z = (600, 600, 600, 600, 600, 1000)/(1, 2,3, 4, 5,6)$ su scadenzario semestrale e dal TCF di VN=10000, rimborsato alla pari, cedole semestrali TAN 6.4% e scadenza a 3 anni, viene estratto un portafoglio π(α, 1-α), essendo α la percentuale di composizione del primo titolo, in modo che il prezzo in $t=0$ al 6% annuo sia 10000 euro. Temendo piccole variazioni di tasso, un investitore avverso al rischio preferisce detenere il portafoglio π o il titolo z?

COGNOME	NOME	MATRICOLA	FIRMA

CMF - 18/7/2013 - RISOLUZIONE (ABBATO)

p1/5

Es 1 Osserviamo che $v(t,s) = e^{-0.05(s-t)+\delta(s-t)^2}$, $0 \le t \le s \le 6$ è data come legge finanziaria su base semestrale. Essa banalmente soddisfa le condizioni a scadenza e la positività, per avere il portato di rendimento occorre imporre una condizione su $\delta > 0$, che dovrà essere tale che

$$-0.05(s-t) + \delta(s-t)^2 \le 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\delta(s-t)^2 \le 0.05(s-t)$$, ovvero per $s=t$, mentre per $s-t>0$

diventa $\delta(s-t) \le 0.05$, e poiché il massimo valore di $s-t$ per $0 \le t \le s \le 6$ è 6, si dovrà avere $6\delta \le 0.05$ ovvero $\underline{\delta \le 0.08333333}$

Pertanto per $\delta \in]0, 0.08\bar{3}]$, $v(t,s)$ è una legge finanziaria.

$$\delta(t,s) = v(t,s)\frac{\partial}{\partial s} e^{0.05(s-t)-\delta(s-t)^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left[0.05(s-t) - \delta(s-t)^2\right]$$

$$\underline{\delta(t,s) = 0.05 - 2\delta(s-t)}$$

Poiché $\delta(t,s)$ dipende da t, la legge non è reinvestibile - la legge è invece uniforme vale

$$v(t,s) = f(s-t) \quad \text{con } f(x) = e^{-0.05x+\delta x^2}$$

b) Per calcolare il prezzo $P = V(0,x,v(0,s))$ del titolo, occorre tener presente che il TCN con scadenza fra 1.5 anni ora è al 3 sarà il 4% annuo, quindi dovrà essere $v(0,3)\,1.04^{1.5} = 1$ ovvero $v(0,3) = 1.04^{-1.5} = 0.9428660343$ ed essendo $v(0,3) = e^{-0.05\cdot 3 + \delta\cdot 9}$ è possibile determinare δ, ottenendo

$$9\delta - 0.15 = \lg 0.9428660343 = -0.0588310697 \quad \text{ovvero } 9\delta = 0.0911689302$$

da cui si ottiene $\boxed{\delta = 0.010129888 11} \simeq 0.01013$. Pertanto approssimativamente

$$P = V(0,x,v(0,s)) \simeq 200\,v(0,2) + 400\,v(0,4) + 600\,v(0,6) = 200\,e^{-0.05\cdot 2 + 0.01013\cdot 4} +$$

$$+ 400\,e^{-0.05\cdot 4 + 0.010123\cdot 16} + 600\,e^{-0.05\cdot 6 + 0.01013\cdot 36} = \underline{1092.362477}$$

c) In cap. semplice al 4% annuo, abbiamo

$$P_3 = V_3(0,x,4\%) = \frac{200}{1+0.04\cdot 1} + \frac{400}{1+0.04\cdot 2} + \frac{600}{1+0.04\cdot 3} = 1098.392348.$$

CMF – 18/7/2013 – RICOGNIZIONE (AMATO)

(p2/5)

ES 2 a) In un mercato obbligazionario perfetto, la formula di passaggio dalla struttura di tassi a pronti alla struttura di tassi a termine è data da

$$i(0,k-1,k) = \frac{(1+i(0,k))^k}{(1+i(0,k-1))^{k-1}} - 1$$

pertanto

$$\tilde{i} = (0.020, 0.022, 0.024, 0.026, 0.023, 0.029)$$

b) Il valore di rimborso del TCF è l'1% sopra la pari, pertanto $VR = VN \cdot 1.01$ quindi $VR = 10100$, mentre la cedola è $I = 350$, quindi

$$TCF = (350, 350, 350, 350, 350, 10450)/(1,2,3,4,5,6)$$

acci ne scrivendo il flusso $x = (200, 400, 600)/(2,4,6)$, quindi il portafoglio è

$$\pi = (350, 550, 350, 750, 350, 11050)/(1,2,3,4,5,6).$$

Il prezzo si ottiene scontando le varie poste con la struttura di tassi a pronti $\tilde{i}$ assegnata. Pertanto

$$P = V(0,\pi,\tilde{i}) = \frac{350}{1.02} + \frac{550}{1.021^2} + \frac{350}{1.022^3} + \frac{750}{1.023^4} + \frac{350}{1.023^5} + \frac{11050}{1.024^6}$$

$$= 11780,14945$$

c) Occorre investire a termine le poste di π fino alla scadenza 6, cioè alla fine del 6° semestre

$$\tilde{V}(6,\pi) = 350\, m(0,1,6) + 550\, m(0,2,6) + 350\, m(0,3,6) + 750\, m(0,4,6) + 350\, m(0,5,6) + 11050 = 350 \frac{m(0,6)}{m(0,1)} + 550 \frac{m(0,6)}{m(0,2)} + 350 \frac{m(0,6)}{m(0,3)} + 750 \frac{m(0,6)}{m(0,4)} + 350 \frac{m(0,6)}{m(0,5)} + 11050 = \left(\frac{350}{m(0,1)} + \frac{550}{m(0,2)} + \frac{350}{m(0,3)} + \frac{750}{m(0,4)} + \frac{350}{m(0,5)}\right) m(0,6) + 11050 = \left[\frac{350}{1.02^1} + \frac{550}{1.021^2} + \frac{350}{1.022^3} + \frac{750}{1.023^4} + \frac{350}{1.023^5}\right] 1.024^6 + 11050 = 13581,58763$$

Dunque, tenendo conto del prezzo calcolato in 2), il TRES annuo a termine è

$$TRES = \left(\frac{13581,58763}{11780,14945}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.048576 \simeq 4.86\% \text{ annuo}$$

CMF - 18/7/2013 - RISOLUZIONE (ABBATO)

p 3/5

Es 3 a) La banca paga 50600, comprese le spese di 600 euro, l'altra parte pagherà 6200 euro a semestre, cominciando da subito. Il valore attuale delle rate anticipate è

$$f(v) = 6200 \frac{1-v^{20}}{1-v} v = \frac{v-v^{21}}{1-v} 6200$$

e l'importo del finanziamento pari a 50600, non essendovi altro modo di pagare le spese iniziali, pertanto l'equazione del TAN è

$$f(v) = 6200 \frac{v-v^{21}}{1-v} = 50600$$

mentre quella del TAEG è $f(v) = 50000$. Notiamo che

$$f'(v) = \frac{1-21v^{20}+20v^{21}}{(1-v)^2} 6200$$

, e applichiamo il metodo di Newton

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n) - 50600}{f'(v_n)}$$

Essendo 20 rate da 6200 (20 × 6200 =), il tasso semestrale è molto alto, partiamo quindi con $v_0 = 0.91$. Abbiamo

$$v_1 = 0.91 - \frac{f(0.91) - 50600}{f'(0.91)} = 0.91 - \frac{2582,43778}{440425.2234} = 0.9041364898$$

$f(v_1) = 50683,22637$

$$v_2 = 0.9041364898 - \frac{83.22637}{412394,3142} = 0.9039350372$$

$f(v_2) = 50600,24173$, $f'(v_2) = 411468,7922$

$$v_3 = v_2 - \frac{0.24173}{411468.7922} = 0.9039344497$$

$f(v_3) = 50599,99999$ $\quad v^* = v_3 \quad i_2^* \cong \frac{1}{v_3} - 1 = 0.106274908 \cong 10.63\%$ sem.

$TAN = 0.223844172 \simeq 22,38\%$ annuo.

b) $\underline{I_1} = 50600 \cdot i_2^* = \underline{5377,510345}$ $\quad \underline{C_1} = 6200 - I_1 = \underline{822,4896552}$

Trattandosi di ammortamento francese vale la formula $C_{k+1} = C_1(1+i)^k$, quindi

$\underline{C_{10}} = C_1 \cdot (1+i_2^*)^9 = \underline{2041,258484}$, $\underline{I_{10}} = \underline{4158.741516}$

Inoltre per il fcon. dell'ammortamento francese, abbiamo

$$D^{c}_{10} = C_1 + C_1(1+i) + \dots + C_1(1+i)^9 = C_1 \frac{(1+i)^{10}-1}{i} = 13509,33549$$

$$D^{z}_{10} = 50600 - D^{c}_{10} = 37090,66451,$$

e) Essendo il TAEG $\geq$ TAN, certamente non è $\leq 8\%$.

Es. 4 Avendo i contributi del titolo z e del TCF

$y = (320, \dots, 320, 10320)/(1,2,\dots,5,6)$ entrambi su

scadenze semestrali, per cui il portafoglio $\pi(\alpha, 1-\alpha)$,

con α percentuale del titolo z nel portafoglio, è dato da

$$\pi = (600\alpha + 320(1-\alpha), \dots, 600\alpha + 320(1-\alpha), 1000\alpha + 10320(1-\alpha))/(1,2,\dots,5,6)$$

$$= (280\alpha + 320, \dots, 280\alpha + 320, 280\alpha + 320 + (10000 - 9600\alpha))/(1,\dots,5,6)$$

$$= z_6 + (10000 - 9600\alpha)/(6)$$

Cioè π si può considerare come somma di una rendita

immediata posticipata di 6 rate di $(280\alpha + 320)$ euro più un

TCN di pari 10000 − 9600α da 6. Abbiamo quindi, con

$i_2 = 1.06^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.029563014$,

$$V(0, \pi, 0.029563014) = (280\alpha + 320)\frac{1 - 1.029563014^{-6}}{0.029563014} + (10000 - 9600\alpha)1.029563014^{-6}$$

$$= (280\alpha + 320)5.425046191 + (10000 - 9600\alpha)0.839619283 5$$

$$= 10132,20762 - 6541,332188\alpha$$

Imponendo che il valore del portafoglio π sia 10000, come richiesto,

otteniamo, l'equazione che contiene α e $1-\alpha$:

$$10132,20762 - 6541,332188\alpha = 10000$$

da cui otteniamo

$$\alpha = 0.020911156 \simeq 0.02 \quad , 1-\alpha = 0.979788884 6 \simeq 0.98 -$$

CMF – 18/7/2013 – Risoluzione (AAAA10)

Abbiamo quindi

$280\alpha + 320 = 325,659423$ e $10000 - 9600\alpha = 9805,973292$, quindi

$\pi = (325,659423, \dots, 325,659423, 9805,973292)/(1, \dots, 5, 6)$.

L'investitore avendo al vincolo preferisce il titolo con volatilità o durata inferiore. Calcoliamo le durations; posto $v = (1+i_2)^{-1} = 0.971285862 5$, otteniamo

$$D(0,z,i_2) = \frac{600v \cdot 1 + 600v^2 \cdot 2 + 600v^3 \cdot 3 + 600v^4 \cdot 4 + 600v^5 \cdot 5 + 1000v^6 \cdot 6}{600(v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5) + 1000v^6}$$

$$= \frac{13131,23881}{3590,877287} = 3,656805221 \simeq 3,65681 \text{ anni.}$$

$$D(0,\pi,i_2) \simeq \frac{325,6591[v \cdot 1 + v^2 \cdot 2 + \dots + v^5 \cdot 5] + 9805,9733 \cdot v^6 \cdot 6}{325,6591[v + v^2 + \dots + v^5] + 9805,9733\, v^6}$$

$$= \frac{53792,62773}{9726,577894} \simeq 5,530478 \text{ anni}$$

quindi l'investitore preferisce detenere il titolo z.

FINE