1/6

Compito di Matematica Finanziaria (Corso L-Z).

04/02/2010 Prof. Amelio

1. In un mercato perfetto si osserva al momento t=0 la seguente struttura di prezzi a pronti

V = (0.99, 0.98, 0.98, 0.975, 0.975, 0.965, 0.960, 0.960)

su scadenzario trimestrale. Determinare

4 a) la struttura per scadenza dei tassi a termine;

2 b) il montante allo scadere del primo anno del TCF di valore nominale 10.000 rimborsato alla pari con scadenza fra 2 anni e cedola semestrale al TAN 10%.

2. Si dica se la seguente è una legge finanziaria

$$v(t,s) = \frac{1+log(1+t)}{1+log(1+s)} \qquad 1 \le t \le s \le 5 \text{ su scadenzario annuo ,}$$

(I) 4 e, dopo averne calcolato la forza d'interesse, se ne studino le proprietà.

Si dica inoltre se l'operazione finanziaria

$$\tilde{x} = (-100v(1,3),100)/(1,3)$$

2 rende più o meno del 6% su base annua.

3. Sono disponibili oggi t=0 sul mercato i seguenti due titoli:

A) Il titolo x = (100, 280)/(1, 2) su scadenzario annuale, al prezzo 330;

B) il TCF di cui al punto b) dell'esercizio 1.

4 Quale dei due è più conveniente detenere in caso di variazioni di tasso di piccola entità ?

2 Quale subisce una variazione % maggiore, in caso di una flessione del tasso pari a $\Delta i = -0.0005$?

4. Un prestito di 80.000 euro è ammortizzato con una rendita trimestrale posticipata di 40 rate di 2000 euro differita di 1 anno e due ulteriori pagamenti di 7000 ciascuno da pagare alla fine del 4 e de 5° anno. Supposto che le spese iniziali, dedotte dal finanziamento, ammontino a 800 euro e che non vi siano altre spese,

9 a) calcolare il TAN del finanziamento e compilare la 4° e la 32° rata del piano di ammortamento ;

3 b) dire, motivando la risposta, se il TAEG supera o no l'8%.

Cognome	nome	matricola	Corso di laurea	Firma

Appl. 04/02/2010

2/6

ES 1

$\tilde{v} = (0{,}99\ ;\ 0{,}98,\ 0{,}98\ ,\ 0{,}975,\ 0{,}975,\ 0{,}965\ ;\ 0{,}96,\ 0{,}96)$

$\tilde{v} \to \tilde{i} \qquad i(0,k) = \left[\frac{1}{v(0,k)}\right]^{\frac{1}{k}} - 1$

$\tilde{i} = (\cancel{0.0615 0962},$

$\tilde{i} = (0.010101010101,\ 0.010152544,\ 0.00675696?,\ 0.006349525,\ 0.005076103,$

$0.005954 5527,\ 0.005848751,\ 0.005115741)$

$\tilde{i} \to \tilde{\tilde{i}} \qquad i(0,k-1,k) = \frac{[1+i(0,k)]^k}{[1+i(0,k-1)]^{k-1}} - 1$

$i(0,4,5)$

$\tilde{\tilde{i}} = (\overset{0.010}{0.010101010101},\ \overset{0.0102}{0.010204083},\ \overset{0}{-0.000000001},\ \overset{0.0051}{0.005128203},\ \overset{-0.0013}{-0.002252277394},\ \overset{0.0104}{0.010361845},$

$\overset{0.0052}{0.00520818 3},\ \overset{0}{0.000000004})$

$TCF = (500,\ 500,\ 500,\ 10500)$

MF 04/2/2010 Prof Ghiselli

$V(4, TCF, \tilde{v}) = 500\, v(0,2,4) + 500 + 500\, v(0,4,6) + 10500\, v(0,4,8)$

$= 500\left[\frac{v(0,2)}{v(0,4)} + 1 + \frac{v(0,6)}{v(0,4)}\right] + 10500\ \frac{v(0,8)}{v(0,4)}$

$= 500\left[\frac{0.98}{0.975} + 1 + \frac{0.965}{0.975}\right] + 10500\ \frac{0.96}{0.975} = 1497{,}575817 + 10338{,}46154$

$= 11835{,}84744$

$\Pi = V(4, \underline{TCF}, \tilde{v}) = 500\left(\frac{0.98}{0.975} + 1\right) = 1002{,}564103$

APPELLO 05/2/2010 MF

3/6

Es 2 Data la legge di sconto annuo

$$v(t,s) = \frac{1+\log(1+t)}{1+\log(1+s)} \qquad 1 \le t \le s \le 5$$

(I) si dica se è una legge finanziaria di sconto e,
b) dopo avere calcolato la forza d'interesse, se ne
c) studino le proprietà

a) la cond. di sconto è verificata

$$v(t,t) = \frac{1+\log(1+t)}{1+\log(1+t)} = 1 \qquad \forall t \in [1,5]$$

positività

$$v(t,s) > 0 \iff \frac{1+\log(1+t)}{1+\log(1+s)} > 0$$ si perché numerat. e denom. sono >0

$v(t,s) \le 1$ si perché essendo $t \le s$ $\log(1+t) \le \log(1+s)$

b) $$\delta(t,s) = v(t,s)\,\frac{\partial}{\partial s} m(t,s) = v(t,s)\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\log(1+s)}{1+\log(1+t)}\right)$$

$$\frac{1+\log(1+t)}{1+\log(1+s)} \cdot \frac{1}{1+\log(1+t)}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(1+\log(1+s)\right) =$$

$$\frac{1}{1+\log(1+s)} \cdot \frac{1}{1+s}$$ quindi

MF 04/2/2010 Prof. Ametrano

$$\delta(t,s) = \frac{1}{[1+\log(1+s)](1+s)} \qquad 1 \le t \le s \le 5$$

c) Poiché $\delta(t,s)$ non dip. da t, per il t. di scad., la legge è scadenzata. La legge non è uniforme perché non è del tipo $f(s-t)$.

(II) $$v(1,3) = \frac{1+\log 2}{1+\log 4} = \frac{1.693147180 6}{2.386294361} = 0.709529891 9$$

Quindi $\tilde{m} = (-70{,}9529891 9,\ 100)/(1,3)$ e il suo rend. annuo è

$$i = \left[\frac{100}{70{,}9529891 9}\right]^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.12118282 \cong 12{,}1\% \gg 6\%$$

E3

Calcoliamo il TIR dell'op. d'acquisto del titolo x al prezzo di 330 al $t=0.5$

L'operazione finanziaria è

$$\tilde{x} = (-330, 100, 280)/(0,1,2)$$ in scadenzario annuo.

L'equazione del TIR è quindi

$$280 v^2 + 100 v - 330 = 0 \qquad \Delta = 379600 \qquad \sqrt{\Delta} = 616,116872$$

Prendendo la radice positiva dell'equazione, otteniamo

$v^* = 0.921637271$ quindi $\underline{v^* \cong 0.921637}$ e

$$i^* = \frac{1}{v^*} - 1 = 0.0850256 \quad (\cong 8,5\ \%\ \text{annuo})$$

Il prezzo del $TCF = (500, 500, 500, 10500)/(1,2,3,4)$ semestrale, che xò in scadenzario annuale è $TCF = (500, 500, 500, 10500)/(0.5, 1, 1.5, 2)$ anni, è dato da

MF 06/12/2010 Rifattibile

$$\underline{P} = 500\left[v^{*0.5} + v^{*1} + v^{*1.5}\right] + 10500\, v^{*2} = 1383,222776 + \qquad \underline{= 10302,0775}$$

Per rispondere alla I° domanda occorrono le durations:

$$\underline{D(0, x, v^*)} = \frac{100 v^* \cdot 1 + 280 v^{*2} \cdot 2}{330} = \frac{567,8359655}{330} = \underline{1,720715057 \text{ anni}}$$

$$\underline{D(0, TCF, v^*)} = \frac{500\left[v^{*0.5} \cdot 0.5 + v^{*1} \cdot 1 + v^{*1.5} \cdot 1.5\right] + 10500\, v^{*2} \cdot 2}{10302,0775} =$$

$$= \frac{1365,415278 + 17837,70996}{10302,07775} = \frac{19202,12523}{10302,07775} = \underline{1,86390801 \text{ anni}}$$

Poiché x ha duration, e quindi volatilità, inferiore a quella del TCF, l'investitore avverso al rischio sceglie il titolo x.

Per rispondere alla 2° domanda, usiamo la I° formula d'approssimazione:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0(i)} \cong -\frac{D(0, x, i)}{1+i} \Delta i$$ dato che il nostro $\Delta i = -5 \cdot 10^{-4}$ è abbastanza piccolo

~~Si~~ si dice quindi che si appresta di più il ~~titolo~~ TCF avendo una volatilità maggiore.

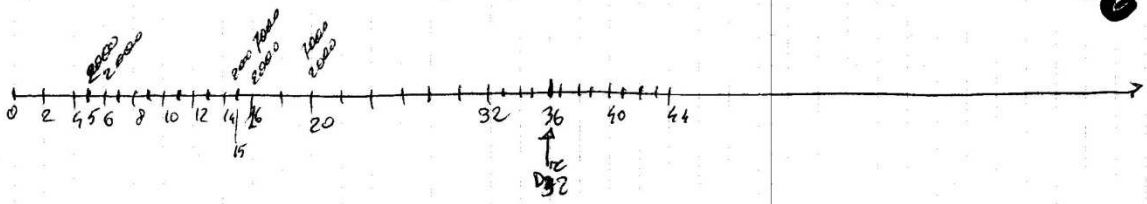
APP. 04/2/2010 MF

1/2

5/6

ES4

Rappresentiamo l'op nell'asse temporale



e scriviamo l'equazione del TIR, non tenendo conto delle spese per calcolare il TAN (= TIR del finanziamento puro):

$$80000 = 2000\,\frac{v^5 - v^{41}}{1-v} + 7000\left(v^{16} + v^{20}\right) = f(v)$$

$$f'(v) = 2000\,\frac{5v^4 - 4v^5 - 45v^{44} + 44v^{45}}{(1-v)^2} + 28000\left(4v^{15} + 5v^{19}\right)$$

MF 04/2/2010 foglio 6

$v_0 = 0.994 \qquad f(v_0) = 69199{,}64056 + 12563{,}609 = 81763{,}25956$

$f'(0.994) = 1649852{,}105 + 227205{,}7764 = 1877057{,}881$

$$v_1 = 0.994 - \frac{f(v_0) - 80000}{f'(v_0)} = 0.993060626$$

$f(v_1) = 67670{,}33971 + 12351{,}90333 = 80022{,}24304$

$f'(v_1) = 1606360{,}598 + 223541{,}467 = 1829902{,}065$

$$v_2 = 0.993060626 - \frac{22{,}24304}{1829902{,}065} = 0.993048707$$

$f(v_2) = 67650{,}81727 + 12349{,}18641 = 80000{,}00367$

$$v_3 = 0.993048707 - \frac{0{,}00367}{1828020{,}573} = 0.993048687$$

$f(v_3) = 67650{,}81407 + \qquad = 80000{,}00003$

$v_4^* = 0.993048687 \qquad i_4^* = \frac{1}{v_4^*} - 1 = 0{,}007000193 \simeq 0{,}7\%$ trimestrale

$TAN = 1.007000193^4 - 1 = 0{,}028286162 \simeq 2{,}83\%$ annuo.

6/6

ES4 2ª parte della domanda a)

Per compilare la 4ª riga del piano d'ammortamento, occorre calcolare D_3^r, il debito residuo appena pagata la 3ª rata.

Basta osservare che

$$D_3^r = \overbrace{80000 \cdot 1.007000193^7}^{84003,39985} - \overbrace{\left(2000 \cdot 1.007000193^2 + 2000 \cdot 1.007000193 + 2000\right)}^{6042,099163}$$

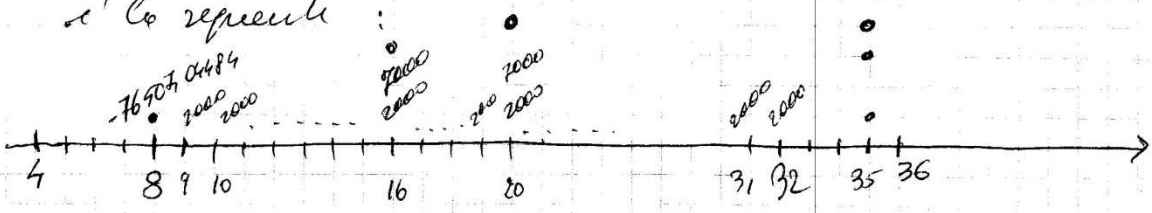
montante delle rate pagate fino a 3 incluso

$$\underline{D_3^r = 77961,30069} \checkmark$$

MF 04/2/2010 riformulato.

$I_4 = D_3^r \cdot i_4^* = 555,7441513$ $\quad C_4 = 1444,255849$ $\quad \underline{D_4^r = 76507,04484} \checkmark$

Allora in $t=8$ trimestri, appena pagata la 4 rata la situazione è la seguente:



Dato il differimento di 4 trimestri la 32a riga corrisponde alla rata pagata alla fine del 36esimo semestre, per compilare la quale occorre calcolare D_{31}^r ovvero il debito residuo corrispondente al 35esimo trimestre, quindi facendo riferimento a D_4^r, abbiamo

$$\underline{D_{31}^r} = 76507,04484 \cdot 1.007000193^{35-8} - 2000 \frac{1.007000193^{27} - 1}{0.007000193} +$$

$$- 7000\left(1.007000193^{19} + 1.007000193^{15}\right) = 92363,28689 - 59213,23946 = \underline{33150,047443}$$

Quindi

$I_{32} = D_{31}^r \cdot i = 232,05673$, $C_{32} = 1767,94327$, $D_{32}^r = 34917,9407$

Equazione del TAEG $\quad 80000 - 800 = 79200$

$$79200 = 2000 \frac{v^5 - v^{45}}{1 - v} + 7000 v^{16} + 7000 v^{20} = f(v)$$

Sono trimestrali equivalenti all'8% annuo dato: $i_4' = 0.019426547$

$v_4 = 0.980943652 1$ fattore di sconto trimestrale

$f(v_4) = \cancel{51171,53021 + 5145,208167 + 1764,082377 = 61080,82155} = 60105,67895 <$

79200 quindi per il tasso del valore effettivo $v_{TAEG_4}^* > v_4$ e quindi $i_{TAEG_4}^* < i_4$ e dunque TAEG < 8% annuo.