COMPITO DI MATEMATICA FINANZIARIA (C. L. E. C.) – 10 LUGLIO 2014 – PROF. P. AMATO

1. Una rendita semestrale anticipata di 8 rate, differita di un anno, è acquistata oggi al prezzo di 48000 euro, scontando le prime 4 rate al 6% annuo e le rimanenti al 6.8% annuo.
   - Supponendo che il TAEG sia il 7.4%, calcolare le spese iniziali per accedere al prestito nell'ipotesi che non ve ne siano altre;
   - Compilare la VI riga del piano di ammortamento del finanziamento puro;
   - Qual è il TRES dell'operazione se le rate della rendita sono reinvestite fino alla scadenza al 6.5% annuo?

2. Data la legge finanziaria su base semestrale

$$v(t,s) = e^{-\,0.05(s-t)-0.001(s^2-st)} \qquad 0 \le t \le s \le 6$$

   A) Calcolarne la forza d'interesse e studiarne le proprietà;
   B) Determinare il montante del TCF di VN=10000, rimborsato alla pari, scadenza fra 3 anni, cedole annuali il cui prezzo oggi, rispetto alla legge assegnata, è 11600.
   C) Calcolare il tasso cedolare r del titolo. Di quanto dovrà variare r affinchè il montante cresca dell'1%?

3. Un prestito di 20000 euro può essere rimborsato in 3 anni con ammortamento italiano o francese, entrambi semestrali, al 6.4% annuo.
   A) Determinare il rimborso più conveniente per un creditore amante del rischio, in caso di piccole variazioni di tasso;
   B) Calcolare la variazione percentuale assoluta per la rendita, in caso di una variazione di tasso pari !% del tasso dato.

4. Considerata la struttura di prezzi a termine su base semestrale

$$\tilde{\tilde{v}} = (0.9640, 0.9620, 0.9620, 0.9640, 0.9640, 0.9650,).$$

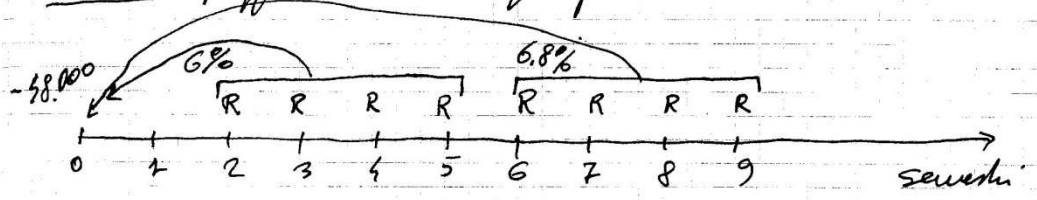
   1 Determinare la struttura dei tassi a pronti, nell'ipotesi di mercato perfetto;
   2 Calcolare l'importo, pattuito in t=0, da pagare alla fine del I° semestre per incassare i pagamenti della rendita semestrale posticipata di 4 rate di 1000 €, differita di 1 anno.

N.B. 1) Spegnere i cellulari e depositarli in cattedra [illegible]

RISOLUZIONE ES. 21 N. 1 e N. 2

MFRIS 10/7/14

Es. 1 Rappresentiamo l'operazione



Calcoliamo i tassi semestrali

$i_2 = 1.06^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.029563014 \rightarrow v = v_2 = 0.971285862$

$i'_2 = 1.068^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.033440855 \rightarrow v' = v'_2 = 0.967641249$

Possiamo considerare la rendita $\ddot{r}_8^{(2)}$ come somma di 2 rendite posticipate di 4 rate, la prima $r_4^{(1)}$ e la seconda $r_4^{(5)}$ e quindi attualizzare come segue

$$V(0, r_8^{(2)}, 0.06, 0.068) = V(0, r_4^{(1)}, i'_2) + V(0, r_4^{(5)}, i'_2)$$

$$= R \frac{1 - v_2^4}{i'_2} v_2 + R \frac{1 - v_2'^4}{i'_2} v_2'^5$$

$$= R\left[3.614141051 + 3.127600168\right] = R\ 6.741742731$$

MFRIS 10/7/14

il valore attuale calcolato corrisponde al prezzo pagato per l'acquisto della rendita: 48000, quindi

$R \cdot 6.741742731 = 48000$ da cui $\underline{R = 7119.820782}$

Calcolata la rata R, possiamo calcolare il TAN del finanziamento puro, ovvero il TIR dell'operazione:

$$f(v) = 7119.820782 \frac{v - v^9}{1 - v} v = 7119, \ldots \frac{v^2 - v^{10}}{1 - v} = 48.000$$

Per calcolare il TIR occorre applicare il metodo di Newton, scegliendo v_0 in modo da tener presenti i tassi applicati, cioè un tasso intermedio fra 6% e 6.8%, ad es. 6.4% con $i_2 = 1.064^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.031503757$

quindi $v_0 = 1.031503757^{-1} = 0.969584179 \simeq$ ~~0.970~~ 0.97.

MFRis 10/7/14 M

$$f'(v) = 7119,\ldots \cdot D\,\frac{v^2 - v^{10}}{1-v} = 7119,\ldots\ \frac{(2v-10v^9)(1-v) + v^2 - v^{10}}{(1-v)^2}$$

da cui

2/4

$$f'(v) = \frac{2v - v^2 - 10v^9 + 9v^{10}}{(1-v)^2} \cdot 7119,820782$$

Abbiamo

$$f(v_0) = f(0.97) = 7119,\ldots\ \frac{0.97^2 - 0.97^{10}}{1-0.97} = 48290,39167$$

$f(v_0) = 265858,5026$ quindi

$$v_1 = v_0 - \frac{f(v_0) - P}{f'(v_0)} = 0.97 - \frac{f(0.97) - 48000}{f'(0.97)} = 0.968907721$$

$f(v_1) = 48000,86819$ $\qquad f'(v_1) = 264270,3408$

$v_2 = 0.9689044358$ $\qquad f(v_2) = 48000,00002$

MFRis 10/7/14 M

$v^* = 0.9689044358$ $\qquad i_2^* = 0.032093531 = TAN_2$ = tasso semestrale

$TAN = (1 + i_2^*)^2 - 1 = 0.065217056$ TAN tasso annuo nominale del finanziamento

Possiamo ora calcolare le rate iniziali, supponendo che non vi siano altre rate, sono date da

$$S_0 = V(0, \tau_8^{(1)}, TAN_2) - V(0, \tau_8^{(1)}, TAEG_2) \qquad \left(TAEG_2 = 1.065^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.036339713\right)$$

$$S_0 = 48000 - V(0, \tau_8^{(1)}, 0.036339713)$$

$$= 48000 - 7119,820782 \cdot \frac{1 - 1.036339713^{-8}}{0.036339713} \cdot 1.036339713^{-1}$$

$$= 48000 - 46962,24072 = 1037,759283$$

dunque $\quad S_0 = 1037,759283$

MFRIS 10/7/14

Es 2 Essendo già data una legge finanziaria, non occorre verificarla. Inoltre

3/4

A) $v(t,s) = e^{-[0.05(s-t)+0.001\, s(s-t)]}$

quindi non è del tipo $f(s-t)$ e perciò non è uniforme.

$$\delta(t,s) = -\frac{1}{v(t,s)}\frac{\partial}{\partial s} v(t,s) = -e^{0.05(s-t)+0.001\, s(s-t)} \cdot$$

$$e^{-[0.05(s-t)+0.001\, s(s-t)]} \frac{\partial}{\partial s} -[(0.05+0.001\, s)(s-t)]$$

$$= 0.001(s-t) + 0.05 + 0.001\, s$$

Poiché $\delta(t,s)$ dipende dall'istante di stipula la legge non è scindibile.

MFRIS 10/7/14

B) Indicata con I la cedola annuale del TCF, abbiamo

cedole $TCF = (I, I, I+10000)\,|\,(2, 4, 6)$ semestri

Il prezzo è

$$P = V(0, TCF, v(0,s)) = I\left(v(0,2)+v(0,4)+v(0,6)\right) + 10000\, v(0,6)$$

e

$$v(0,s) = e^{-0.05 s - 0.001 s^2}$$ per cui, essendo

$P = 11600$ prezzo d'acquisto, l'equivalenza finanziaria è

$$11600 = I\left(e^{-(0.05\cdot 2+0.001\cdot 4)} + e^{-(0.05\cdot 4+0.001\cdot 16)} + e^{-(0.05\cdot 6+0.001\cdot 36)}\right)$$

$$+ 10000\, e^{-0.336} = I\left(e^{-0.104} + e^{-0.216} + e^{-0.336}\right) + 10000\, e^{-0.336}$$

$$= I\cdot 2.421583705 + 7146,231058$$

quindi

$$\boxed{I =} \frac{11600 - 7146,231058}{2.421583705} = \boxed{1839,196776}$$ cedola annuale

C) Il tasso cedolare $\boxed{r =} I/VN \cong 0,18392 \cong \boxed{18.39\%\ \text{annuo}}$

B) montante $V(6, TCF, v(t,s)) = 1839,198\left(\frac{1}{v(2,6)} + \frac{1}{v(4,6)}\right) + 11839,198$

$$= 1839,198\left(e^{0.224} + e^{0.112}\right) + 11839,198 = \boxed{16197,332}$$ montante alla scadenza

Il montante aumentato dell'1% è

MFRLS 10/7/14

$$M_1 = M \cdot 1.01 = 16197,332 \cdot 2.01 = 16359,305$$

5/4

perciò la nuova cedola I', deve soddisfare

$$I'\left(m(2,6) + m(4,6) + 1\right) + 10000 = 16359,305$$

$$I' = \frac{16359,305 - 10000}{e^{0.224} + e^{0.42} + 1} = \frac{6359,305}{3.369584} = 1887,267$$

Il nuovo tasso cedolare r' sarà allora $r' \cong 0.18873$

$$r' - r = 0.18873 - 0.18392 = 0.00481 \simeq 0.48\%$$

$$\boxed{\Delta r = 0.48\%}$$

variazione tasso cedolare.

La risoluzione degli esercizi n3 e n4 è standard.