Prova scritta di Matematica per l'Economia e Matematica Generale – 18 luglio 2012

NUMERI PARI

****

1. Data la funzione

$$g(x) = x\log\sqrt{x-1}$$

- Determinarne l'insieme di definizione e dire se è integrabile nell'intervallo [3, 5];
- Calcolarne l'integrale indefinito;
- Calcolare il valor medio v_m di $g(x)$ in [3, 5] e dire se è un valore assunto da g in [3, 5]; (giustificare la risposta)
- E' vero che g ha massimo in [3, 5] e che $v_m < \max_{x\in[0,3]} g(x)$? (giustificare la risposta).

2. Calcolare il

$$\lim_{x\to-1} \frac{(x+1)\log\sqrt{x+1}+sen\pi x}{(x^2-1)^2}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{3+2\sqrt[3]{x^2}}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.
Studiare inoltre il comportamento di $f'(x)$ in $x = 0$.

4. Data la funzione

$$h(x) = \log\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)$$

- se ne determini il dominio;
- dire, giustificare la risposta, se è applicabile ad essa il teorema di Lagrange in [1, 4];
- se ne studi la convessità.

5. Considerata la funzione così definita in R

$$q(x) = \frac{e^{-2x}}{x} \widetilde{\oplus} \frac{1}{x} \; per \; x \neq 0 \quad e \quad h(0) = k$$

- Determinare k in modo che a $q(x)$ sia applicabile dei valori intermedi in R;
- Per il valore di k trovato al punto precedente $q \in C^1(R)$?
- $q(x)$ è regolare per $x \to +\infty$?

6. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2e^{y^2} - 1$$

- dire se è differenziabile in (1,0);
- determinarne gli eventuali punti di estremo locale.

6bis. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto e dimostrare il teorema di Fermat.

(Per gli studenti il cui programma non prevede lo studio delle funzioni di 2 variabili).

COGNOME E NOME..MAT. PER ECONOMIA 18 luglio 2012.....NUMERO DI MATRICOLA.....

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di tre ore. | P

1°) $g(x) = x \log\sqrt{x-1}$ è definita per $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} > 0 \end{cases}$ cioè in $]1,+\infty[$ ed è continua nel suo dominio, in quanto $\log\sqrt{x-1}$ è continua perché composta di funzioni continue. In particolare $g(x)$ è continua in $[3,5]$ e quindi è integrabile per il teorema di integrabilità delle funzioni continue. Per l'integrale definito abbiamo, integrando per parti:

$$\int x \log\sqrt{x-1}\, dx = \frac{x^2}{2}\log\sqrt{x-1} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\, dx = \frac{x^2}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\int\frac{x^2}{x-1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\int\left(\frac{x^2+1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\int(x+1)\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\log(x-1) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) - \frac{1}{4}\log(x-1) + C = \frac{1}{4}\left[\log(x-1)\right]\cdot(x^2-1) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) + C$$

Quindi

$$v_m = \frac{1}{5-3}\int_3^5 x\log\sqrt{x-1}\, dx = \frac{1}{8}\left[(x^2-1)\log(x-1) - \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_3^5 = \frac{1}{8}\left[20\log 2 - 10\right] = \frac{1}{4}(2\log 2 - 5)$$

ed è un valore assunto da $g(x)$ in $[3,5]$ per il teor. della media, essendo f continua nell'intervallo. Notiamo che $g(x)$ ha massimo in $[3,5]$, in virtù del teor. di Weierstrass da f è continua e l'intervallo è chiuso e limitato. Inoltre, si ha

$g'(x) = \log\sqrt{x-1} + \frac{x}{2(x-1)} > 0 \quad \forall x\in[3,5]$ quindi $\max_{x\in[3,5]} g(x) = g(5) > v_m = g(\bar{x})$ con $\bar{x}\in\,]3,5[$ opportuno, essendo $g(x)$ strett. crescente nell'intervallo.

2°)

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\log\sqrt{x+1} + \operatorname{sen}\pi x}{(x^2-1)^2} = \lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{2}(x+1)\log(x+1) + \operatorname{sen}\pi x}{(x+1)^2(x-1)^2} =$$

$$= \{x+1=z\} = \lim_{z\to0}\frac{\frac{1}{2}z\log z + \operatorname{sen}(\pi z - 1)}{(z-2)^2 z^2} =$$

$$= \{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta, \quad \operatorname{sen}(\pi z - \pi) = -\operatorname{sen}\pi z\}$$

$$= \lim_{z\to0}\frac{\frac{1}{2}\log z - \pi\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}}{(z-2)^2 z} = \frac{\frac{1}{2}\cdot-\infty - \pi\cdot1}{4\cdot0} = \frac{-\infty}{0}$$

$$= \{\text{tenendo presente che si tratta di un limite per } x\to0^+\}$$

$$= -\infty.$$

3°) Studiare la seguente funzione:

$x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{3+2\sqrt[3]{x^2}}$

$f(-x) = -f(x)$, f dispari

Insieme di definizione $\mathbb{R}$

$f(x)>0$ $]0,+\infty[$

$f(x)=0$ $x=0$

$f(x)<0$ $]-\infty,0[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]0,+\infty[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati $(0,0)$

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]-\infty,0[$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \nexists$ as. obliqui

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

//

$f'(x) = \dfrac{3+\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}}{(3+2\sqrt[3]{x^2})^2}$

$f'(x)>0$ $\mathbb{R}$

$f'(x)=0$ //

$f'(x)<0$ //

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $]-\infty,+\infty[$

Intervalli in cui f è costante //

Intervalli in cui f è strettamente decrescente //

Punti di minimo o di massimo relativo per f //

Punti di minimo o di massimo assoluto per f //

$f''(x) = -\dfrac{20}{9}\,\dfrac{3+2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\,(3+2\sqrt[3]{x^2})^3}$

$f''(x)>0$ $]-\infty,0[$

$f''(x)=0$ //

$f''(x)<0$ $]0,+\infty[$

Intervalli in cui f è convessa $]-\infty,0[$

Intervalli in cui f è concava $]0,+\infty[$

Punti di flesso per f $x=0$ $f(0)=\frac{1}{3}$

f è biunivoca (iniettiva)?

Sì

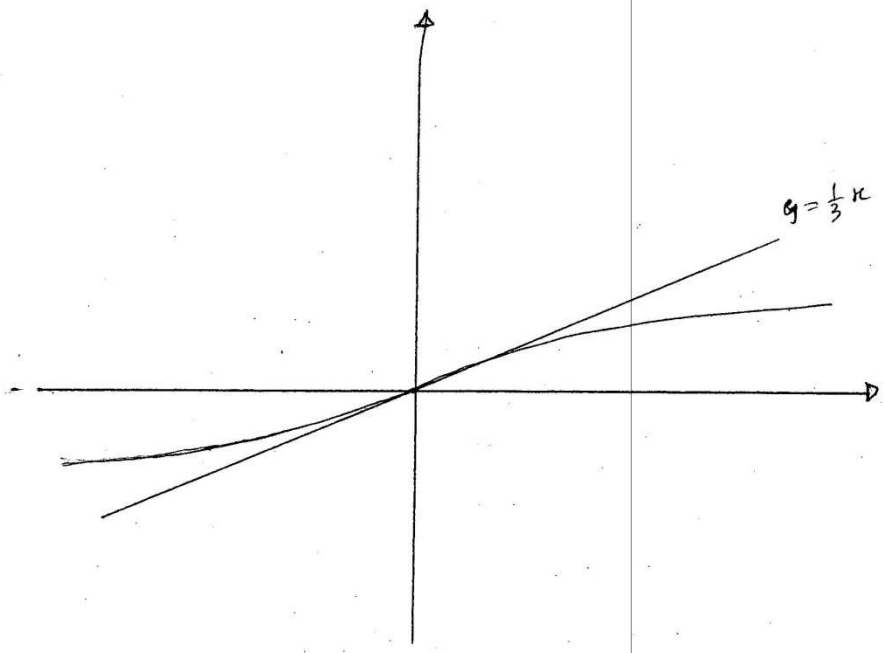
Indicare l'insieme dei valori di f: $]-\infty,+\infty[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

Comportamento di $f'(x)$ in $x=0$: $f'(x)$ è continua in 0, ma

$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = +\infty$ quindi

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.



4°) Essendo $\mathrm{dom}(\log) =]0,+\infty[$, deve essere $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt > 0$ e poiché $e^{t^2} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ si ricava $F(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, pertanto $\mathrm{dom}(h) =]0,+\infty[$. Poiché e^{t^2} è continua in $\mathbb{R}$, per il teorema di Torricelli-Barrow $F(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e in $]0,+\infty[$ $F'(x) = e^{x^2}$, anzi $F \in C^\infty(\mathbb{R})$; lo stesso vale per $h(x) = \log F(x)$, essendo composte di funzioni C^∞. Derivando abbiamo:

$$h'(x) = \frac{e^{x^2}}{F(x)}, \quad h''(x) = \frac{e^{x^2}}{(F(x))^2}\left[2xF(x) - e^{x^2}\right], \quad \forall x \in]0,+\infty[.$$

Per studiare il segno di $h''(x)$ occorre studiare il segno della funzione $\varphi(x) = 2xF(x) - e^{x^2}$, essendo il primo fattore sempre > 0.

Notiamo che $\varphi(x)$ è definita e continua anche in 0 e $\varphi(0) = -1$; inoltre si può vedere (con qualche calcolo) che $\varphi(1) > 0$, quindi per il teorema degli zeri $\varphi(x) = 0$ ha una soluzione $\bar{x} \in]0,1[$, che è unica dato la stretta crescenza della funzione $\varphi(x)$. Il segno di $h''(x) = 0$ ha come unica soluzione $\bar{x} \in]0,1[$ e ha lo stesso segno di $\varphi(x)$, per cui $h''(x) < 0$ in $]0,\bar{x}[$, $h''(x) > 0$ in $]\bar{x},+\infty[$ e perciò h è concava in $]0,\bar{x}]$, convessa in $[\bar{x},+\infty[$.

5°) Per poter applicare il teorema dei valori intermedi la funzione deve essere continua in $\mathbb{R}$, in particolare in $x=0$ si deve avere $\lim_{x\to 0} q(x) = q(0) = K$, ma $\lim_{x\to 0} q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} -2 \cdot \frac{e^{-2x}-1}{-2x} = -2$, quindi deve essere $K=-2$.

Per $q(0)=-2$, vediamo se $q(x)$ è derivabile in 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{q(x)-q(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-2x}-1}{x}+2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1+2x}{x^2} = \{H\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{-2x}+2}{2x} = \{H\} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{-2x}}{2} = 2$$

quindi $q(x)$ è derivabile in $x=0$ e $q'(0)=2$, e poiché è derivabile negli altri punti di $\mathbb{R}$, $q(x)$ risulta derivabile in $\mathbb{R}$. Affinché $q \in C^1(\mathbb{R})$, q' deve essere continua in $\mathbb{R}$ e in particolare in 0.

$$\lim_{x\to 0} q'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{-2x}-e^{-2x}+1}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4xe^{-2x}}{2x} = 2 \quad \cancel{\text{(per Hopital)}}$$

quindi q' è continua anche in $x=0$ e perciò $q \in C^1(\mathbb{R})$. Per $x \to +\infty$ $q(x) \to 0$ quindi q è regolare in $x=0$

6°) Abbiamo

$f_x = 2x e^{y^2}$, $f_y = 2x^2 y e^{y^2}$, $f_{xx} = 2e^{y^2}$, $f_{yy} = 2x^2(e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2})$

$= 2x^2 e^{y^2}(1+2y^2)$, $f_{xy} = f_{yx} = 4xy e^{y^2}$.

Poiché f_x, f_y sono continue in $(1,0)$, f è differenziabile in tal punto per il teor. del diff. totale. Troviamo i punti stazionari

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x^2 y = 0 \end{cases} \iff (x=0 \text{ e } y \in \mathbb{R}) \iff ((0,y), y \in \mathbb{R}).$$

Calcoliamo l'hessiano nei punti $(0,y)$:

$$H(0,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,y) & f_{xy}(0,y) \\ f_{yx}(0,y) & f_{yy}(0,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{y^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

siamo nel caso dubbio. Osserviamo però che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $x^2 e^{y^2} \geq 0 = 0^2 e^{y^2}$ e quindi

$$f(x,y) = x^2 e^{y^2} - 1 \geq -1 = f(0,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

per cui i punti $(0,y)$ sono tutti punti di minimo assoluto per $f(x,y)$.