**COMPITO DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA (A –K) - 03 LUGLIO 2013 – PROF. P. AMATO**

1. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\log(x+4)}{9\sqrt{x}}$$

   a) determinare dominio e segno,
   b) calcolare l'area A del rettangoloide di *g(x)* relativamente all'intervallo [1, 4],
   c) dire se il numero $\frac{1}{3}A$ se è un valore assunto dalla funzione nell'intervallo (giustificare la risposta, enunciando il relativo teorema).
   d) La funzione integrale $F_1(x) = \int_1^x g(t)dt$ è monotona?

2. Calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{sen^2 x\, log(2+x) + x arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-cos\sqrt{x})+3x^2}\right]^{-\frac{x+2}{x+1}}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{9(x+1)}$$

   e tracciarne approssimativamente il grafico, scrivendo l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa x = 0.

4. Data la funzione $h: R \to R$

$$h(x) = \begin{cases} arctg(1 - log|x|) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

   1) studiarne i punti di discontinuità al variare del parametro a in R;
   2) determinare a in modo che *h* risulti continua in R;
   3) per il valore di a trovato 2) h è derivabile in R?
   4) Illustrare la relazione che intercorre fra derivabilità e continuità.

5. Calcolare il

$$\min_{x\in[-3,\ 4]} (1 - |x^2 - 1|)^2$$

   enunciando i teoremi che si applicano. Enunciare il teorema di Rolle e dire se è applicabile alla funzione in ~~[-2,0]~~ [1,4].

6. Data la funzione $f(x,y) = (x^2-1)(y^2-4)$, a) dire se è differenziabile in (1,0), b) determinarne gli eventuali punti di estremo locale.

| COGNOME | NOME | MATRICOLA | FIRMA |
|---|---|---|---|
| | | | |

Es1 $g(x) = \frac{\log(x+4)}{\sqrt{x}}$. a) $D_g = ]0,+\infty[$, $g(x) > 0 \quad \forall x \in ]0,+\infty[$.

b) Essendo $g(x)$ continua (rapporto di funz. cont.) e positiva in $D[1,4]$, è integrabile secondo Riemann (teor. d'integrabilità delle funzioni continue) e inoltre

$$\text{area}(R_{g,[1,4]}) = \int_{[1,4]} g(x)\,dx = \int_1^4 g(x)\,dx = G(4) - G(1)$$

per la formula fondamentale del calcolo integrale, essendo $G(x)$ una primitiva di $g(x)$ da calcolare. Integrando per parti abbiamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log(x+4)\,dx = 2\sqrt{x}\log(x+4) - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,dx = \left\{ \int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,dx \overset{t=\sqrt{x}}{=} 2\int \frac{t^2}{4+t^2}\,dt = \right.$$

$$2\int\left(1 - \frac{4}{4+t^2}\right)dt = 2t - 4\int \frac{1}{4+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = 2t - 4\,\text{arctg}\,\frac{t}{2} + c \overset{t=\sqrt{x}}{=}$$

$$\left. = 2\sqrt{x} - 4\,\text{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) + c \right\} = 2\sqrt{x}\log(x+4) - 4\sqrt{x} + 8\,\text{arctg}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) + c = G(x) + c$$

pertanto

$$A = \text{area}(R_{g,[1,4]}) = G(4) - G(1) = \left(4\log 8 - 4 + 8\tfrac{\pi}{4}\right) - \left(2\log 5 - 4 + 8\,\text{arctg}\,\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 2\log\frac{64}{5} - 4 + 2\pi - 8\,\text{arctg}\,0.5 \simeq 3.67$$

c) L'ampiezza di $[1,4]$ è 3, quindi $\frac{1}{3}A$ non è altro che il valor medio di $g(x)$ in $[1,4]$, assunto per il teor. della media, essendo $g$ continua in $[1,4]$.

d) La funzione integrale $F_1(x) = \int_1^x g(t)\,dt$, per il teor. di Torricelli-Barrow ha derivata $F_1'(x) = g(x) > 0 \quad \forall x \in ]0,+\infty[ = D_g = D_{F_1}$, pertanto è strett. crescente.

Es2 Osserviamo che per $x \to 0$, si ha

$\text{sen}^2 x \cdot \log(2+x) \sim x^2 \log 2$, $x\,\text{arctg}\sqrt{x} \sim x^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{x}(1-\cos\sqrt{x}) \sim \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

pertanto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore

abbiamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x \cdot \log(2+x) + x\,\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\cos\sqrt{x}) + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}} = 2$$

e poiché l'esponente tende a 2, abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\text{sen}^2 x \cdot \log(2+x) + x\,\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\cos\sqrt{x}) + 3x^2}\right]^{\frac{x+2}{x+1}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Es 3 Studio di $f(x)=\frac{1}{9}\frac{(x-1)^3}{x+1}$ . $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

$f(x)=0$ per $x=1$, $f(x)<0$ per $x\in]-1,1[$,

$f(x)>0$ per $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Inoltre si ha

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ quindi $\nexists$ asintoti obliqui.

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ $x=-1$ asintoto verticale in alto a sinistra

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ $x=-1$ asintoto verticale in basso a destra.

Calcoliamo la derivata prima per lo studio degli estremi relativi e della monotonia. Si ha facilmente

$f'(x)=\frac{2}{9}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+1)^2}$ $\forall x\in D_f$, pertanto

$f'(x)=0$ per $x=1$ e $x=-2$,

$f'(x)<0$ per $x<-2$ per cui $f(x)$ è strett. decrescente in $]-\infty,-2]$

$f'(x)>0$ per $x\in]-2,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ e quindi $f(x)$ è strett. crescente in $[-2,-1[$ e in $]-1,+\infty[$.

Ne segue dunque che $x=-2$ è punto di minimo relativo per il test della derivata prima, mentre $x=1$ pur essendo punto critico non è d'estremo relativo. Il punto del grafico corrispondente al punto di minimo è $A(-2,f(-2))=A(-2,\frac{27}{9})=A(-2,3)$.

Calcoliamo $f''(x)=\frac{2}{9}\frac{[2(x-1)(x+2)+(x-1)^2](x+1)^2-(x-1)^2(x+2)\,2(x+1)}{(x+1)^4}=$

$=\frac{2}{9}\frac{(x-1)\{[3(x+1)](x+1)-2(x-1)(x+2)\}}{(x+1)^3}=\frac{2}{9}\frac{(x-1)}{(x+1)^3}[3x^2+6x+3-2x^2-2x+4]$

dunque

$$f''(x)=\frac{2}{9}\frac{(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$$

Abbiamo

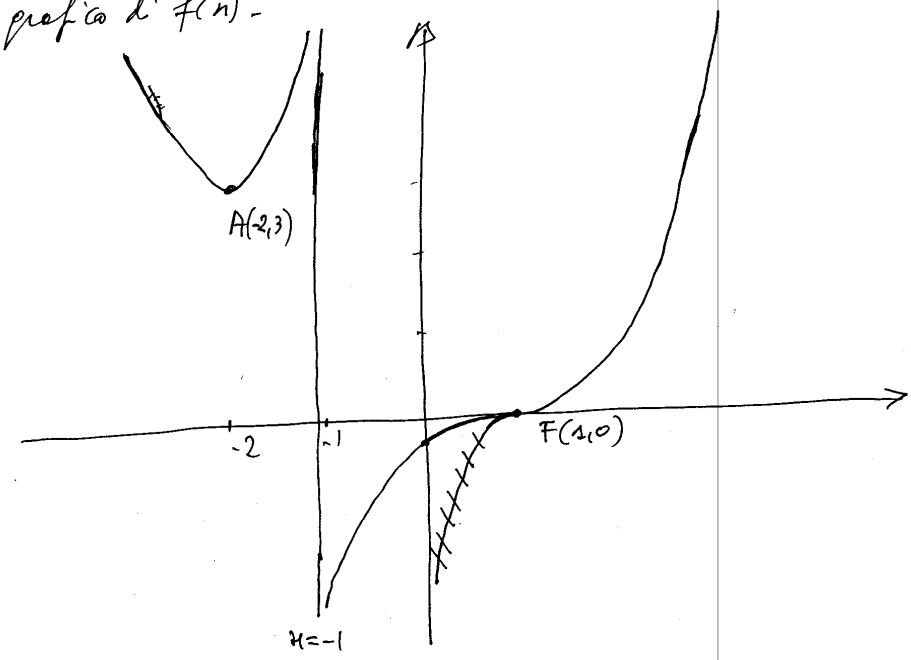
$f''(x)=0 \iff (x-1)=0 \vee (x^2+4x+7)=0 \iff x=1$, essendo $x^2+4x+7>0$ sempre poiché $\Delta=16-28<0$ e $a=1>0$. $x=1$ è un possibile punto di flesso. Il segno di $f''(x)$ coincide con il segno di $\frac{x-1}{(x+1)^3}$ ovvero con il segno di $\frac{x-1}{x+1}$ e quindi

$f''(x)>0$ per $x\in]-\infty,-1[$ per cui $f$ è strett. convessa in $]-\infty,-1[$

$f''(x)<0$ per $x\in]-1,1[$ " " concava in $]-1,1[$

$f''(x)>0$ per $x\in]1,+\infty[$ " " convessa in $[1,+\infty[$

e dunque $x=1$ è punto di flesso con tangente orizzontale essendo $f'(1)=0$, $F(1,f(1))=F(1,0)$. Possiamo ora disegnare il grafico di $f(x)$.




$f$ non è iniettiva (la parallela all'asse $x$, $y=k$ con $k>3$ interseca 3 volte la curva) quindi non è biunivoca. Inoltre $f(D_f)=\mathbb{R}$, quindi $f$ è suriettiva. Notiamo che $f|_{]-1,+\infty[}$ è una bigezione di $]-1,+\infty[$ su $\mathbb{R}$.

ES4 In $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $h(x)$ è continua e derivabile quali composte di funzioni continue e derivabili, quindi occorre studiare il comportamento solo in $x=0$, in cui si ha

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \left\{ \lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty,\ t=\log|x| \right\} = \lim_{t\to -\infty} \operatorname{arctg}(1-t) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi per $a=\frac{\pi}{2}$ $h$ risulta continua in $0$ (e in $\mathbb{R}$), mentre per $a\neq\frac{\pi}{2}$ $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Abbiamo così risposto ai punti 1) e 2). 3) Vediamo se $h$ è derivabile in $x=0$ per $a=\frac{\pi}{2}$; il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1-\log|x|)-\frac{\pi}{2}}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+(1-\log|x|)^2}\cdot -\frac{1}{x}$$

se quest'ultimo limite esiste, per il teorema di de l'Hospital. Ora

$$\lim_{x\to 0} x\left[1+(1-\log|x|)^2\right] = \lim_{x\to 0} x\left[2-2\log|x|+\log^2|x|\right] = 0,$$

in virtù del fatto che risulta il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log^\beta x = 0 \qquad \forall \alpha,\beta>0.$$

Osservato poi che il segno di $\frac{1}{1+(1-\log|x|)^2}\cdot -\frac{1}{x}$ coincide con il segno di $x$, ne segue che il limite del rapporto incrementale di $h(x)$ non esiste e perciò $h$ non è derivabile in $x=0$ per $a=\frac{\pi}{2}$.

Poiché la derivabilità implica la continuità (4), segue che $h(x)$ non è derivabile in $x=0$ neanche per gli altri valori di $a$, e quindi $\forall a\in\mathbb{R}$, $h(x)$ non è derivabile in $\mathbb{R}$.

ES5 Essendo la funzione $k(x)=(1-|x^2-1|)^2$ continua in $[-3,4]$ per il teor. di Weierstrass (una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è dotata di minimo e di massimo assoluti), il minimo esiste. Per trovarlo occorre applicare il teor. dei punti critici (I punti di minimo e di massimo assoluti di una funzione continua in $[a,b]$ vanno cercati nell'insieme

$$A=\{a,b\}\cup\{x\in]a,b[\ /\ f'(x)=0\}\cup\{x\in]a,b[\ /\ f \text{ non è derivabile in } x\})$$

A tal fine osserviamo che, essendo $|x|$ non derivabile in $x=0$, avremo

$|x^2-1|$ non è derivabile in $x=\pm 1$ e quindi $K(x)$ non è derivabile in $-1$ e $1 \in [-3,4]$. Inoltre essendo

$$K'(x) = 2\left(1-|x^2-1|\right)\cdot -\frac{|x^2-1|}{x^2-1}\cdot 2x, \qquad x \neq \pm 1$$

abbiamo che $K'(x)=0 \iff (1-|x^2-1|=0 \ \vee \ x=0) \iff (x^2-1=\pm 1 \ \vee x=0) \iff$

$\iff (x^2=2 \ \vee \ x=0) \iff x=-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

Ne segue che ~~gli punti~~ i punti di minimo assoluto vanno cercati in

$$A=\{-3, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 4\}.$$

Calcolando $K(x)$ nei punti di $A$ otteniamo nell'ordine

$$K(A)=\{49, 0, 1, 0, 1, 0, 196\}$$

Dunque

$$\min_{x\in[-3,4]} \left(1-|x^2-1|\right)^2 = 0 = K(-\sqrt{2}) = K(0) = K(\sqrt{2})$$

per cui $K(x)$ ha in $[-3,4]$ i tre punti di minimo assoluto $x=-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.

<u>Es 6</u> La funzione $f(x,y)$ è un polinomio quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e perciò è differenziabile in $(1,0)$ per il teor. del differenziale totale. Abbiamo

$$f_x = 2x(y^2-4), \quad f_y=(x^2-1)2y, \quad f_{xx}=2(y^2-4), \quad f_{xy}=4xy=f_{yx}, \quad f_{yy}=2(x^2-1).$$

Annulliamo il gradiente:

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(y^2-4)=0 \\ 2y(x^2-1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y(x^2-1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad O(0,0)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} y^2-4=0 \\ y(x^2-1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm 2 \\ y=0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} y=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{cases} \quad A(-1,-2) \quad A'(-1,+2) \quad B(1,-2) \quad B'(1,2)$$

È $H(x,y)=\begin{vmatrix} 2(y^2-4) & 4xy \\ 4xy & 2(x^2-1) \end{vmatrix} = 4(x^2-1)(y^2-4)-16x^2y^2$, applichiamo il test dell'Hessiano.

$H(0,0)=16>0$, $f_{xx}(0,0)=-8<0$ quindi $O(0,0)$ è punto di massimo locale, mentre essendo

$H(A)=H(B)=H(A')=H(B')=-64<0$, questi punti sono punti di sella.