Numeri PARI

Prova scritta di Matematica Generale e Matematica per l'Economia - 12 settembre 2012

****

(1) Determinare la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} F'(x) = 4^x \cdot \operatorname{arccotg}(4^{-x}) & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \to -\infty} F(x) = 1. \end{cases}$$

(Sugg. Si ponga $4^x = t$ e quindi si integri per parti)

(2) Individuare e classificare le eventuali discontinuità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot 2^{1/x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico. Determinare, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = e^{5/6}$.

(4) Assegnata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, si utilizzi il teorema di Torricelli-Barrow (del quale si chiede di fornire l' enunciato) per mostrare che la funzione $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$H(x) = x \cdot \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t \cdot f(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

è derivabile due volte in $\mathbb{R}$ e verifica la condizione $H''(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È possibile affermare che ogni eventuale zero di f è punto di flesso per H?

(5) Dare la definizione di punto di flesso per una funzione. Verificare quindi che $x_0 = 0$ è punto di flesso proprio (a tangente orizzontale) per la funzione

$$g(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mediante il test della derivata terza.

(6) Data la funzione

$$f(x, y) = y^{2x},$$

determinarne il dominio D_f, calcolarne le derivate parziali prime e seconde e dire quindi se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

(6 bis) **(Riservato agli studenti il cui programma di riferimento non comporta lo studio di funzioni reali di due variabili reali)**
Dare la definizione di punto di estremo locale e globale per una funzione reale di una variabile reale, enunciare i principali teoremi in cui tale concetto è coinvolto e dimostrarne uno a scelta.

COGNOME E NOME.....10/9/12.....NUMERO DI MATRICOLA.....

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di tre ore.

Prova scritta di Matematica per l'Economia e Mat. Generale del 12/09/2012 - PARI

1°)

La funzione F richiesta è una primitiva di $f(x) = 4^x \cdot \operatorname{arccotg}(4^{-x})$ che, in più, tende ad 1 per $x \to -\infty$. Una generica primitiva di f si ottiene valutando $\int f(x)dx$; effettuando la sostituzione $4^x = t$ (da cui $x = \log_4 t$ e dunque $dx = \frac{1}{t \cdot \log 4} dt$) e successivamente integrando per parti si ottiene:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{\log 4} \cdot \int \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{\log 4} \cdot \left[t \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right] + c =$$

$$\frac{1}{\log 4} \cdot \left[4^x \cdot \operatorname{arccotg}(4^{-x}) - \frac{1}{2} \log(1+4^{2x}) \right] + c;$$ poiché

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\log 4} \cdot \left[4^x \operatorname{arccotg}(4^{-x}) - \frac{1}{2} \log(1+4^{2x}) \right] + c = 1 \iff c = 1,$$

la funzione richiesta è la funzione $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \frac{1}{\log 4} \cdot \left[4^x \operatorname{arccotg}(4^{-x}) - \frac{1}{2} \log(1+4^{2x}) \right] + 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

2°)

Occorre analizzare il comportamento della funzione in 0; poiché

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x \cdot e^{1/x} = 0, \qquad (\text{porre } \tfrac{1}{x} = y \to +\infty \text{ se } x \to 0^+)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \cdot \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

si conclude che f è continua in $\mathbb{R} - \{0\}$ e che 0 è pto di discontinuità di 2ª specie.

3°) Studiare la seguente funzione:

$$x \to f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

Insieme di definizione: $D_f =]0, +\infty[$

$f(x)>0 \iff x \in]1, +\infty[$

$f(x)=0 \iff x = 1$

$f(x)<0 \iff x \in]0, 1[$

Intervalli in cui il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x: $]1, +\infty[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati: $(1, 0)$

Intervalli in cui il grafico di f è al di sotto dell'asse delle x: $]0, 1[$

Limiti significativi per f:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0;$$

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$r: x = 0$ asintoto verticale (a dx); $s: y = 0$ asintoto orizzontale (a dx);

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{x^3} \quad \forall x \in D_f;$$

$f'(x)>0 \iff x \in]0, \sqrt{e}[$

$f'(x)=0 \iff x = \sqrt{e}$

$f'(x)<0 \iff x \in]\sqrt{e}, +\infty[$

Punti angolosi o cuspidali per il grafico di f: //

Intervalli in cui f è strettamente crescente: $]0, \sqrt{e}]$

Intervalli in cui f è strettamente decrescente: $[\sqrt{e}, +\infty[$

Punti di minimo o di massimo relativo per f: $x = \sqrt{e}$ pto di max con $f(\sqrt{e}) = 1/2e$

Punti di minimo o di massimo assoluti per f: $x = \sqrt{e}$ pto di max assoluto

$$f''(x) = \frac{6\log x - 5}{x^4} \quad \forall x \in D_f;$$

$f''(x)>0 \iff x \in]e^{5/6}, +\infty[$

$f''(x)=0 \iff x = e^{5/6}$

$f''(x)<0 \iff x \in]0, e^{5/6}[$

Intervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso l'alto: $[e^{5/6}, +\infty[$

Intervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso il basso: $]0, e^{5/6}]$

Punti di flesso per f: $x = e^{5/6}$ con $f(e^{5/6}) = 5/(6e^{5/3})$

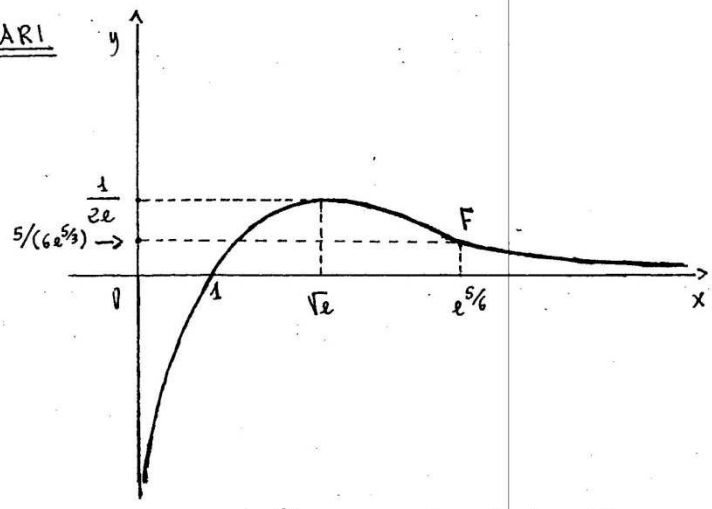
f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $]-\infty, 1/2e]$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico

TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE f:

NUMERI PARI



Risultando $f(e^{5/6}) = \frac{5}{6e^{5/3}}$ ed $f'(e^{5/6}) = \frac{-2}{3e^{5/2}}$, la retta tangente a $\mathcal{G}_f$ nel punto di ascissa $e^{5/6}$ è la retta $r: y = \frac{5}{6e^{5/3}} - \frac{2}{3e^{5/2}} \cdot (x - e^{5/6})$.

4°)

Per definizione si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = x \cdot \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t \cdot f(t)\,dt,$$

e quindi, poiché le funzioni $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ e $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x t \cdot f(t)\,dt$ sono derivabili in $\mathbb{R}$ con derivate date da $f(x)$ ed $x \cdot f(x)$, rispettivamente, H è derivabile con

$$H'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \cancel{x \cdot f(x)} - \cancel{x \cdot f(x)} = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto H' è a sua volta derivabile (cioè, H è due volte derivabile) e

$$H''(x) = D\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

come richiesto. Se in un certo $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta $f(x_0) = 0$, allora, per quanto appena mostrato, $H''(x_0) = 0$, ma ciò <u>non</u> è sufficiente a concludere che x_0 è pto di flesso per H.

co di f.

6°) Poiché $y^{2x} = e^{2x\log y}$, risulta $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$; in ogni $(x,y)\in D_f$ si calcola $f_x(x,y) = y^{2x}\cdot 2\log y$, $f_y(x,y) = y^{2x}\cdot\frac{2x}{y}$ e si deduce che f è differenziabile poiché le derivate parziali continue. Si prova immediatamente che $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nel punto $P=(0,1)$; per determinarne la natura, in ogni $(x,y)\in D_f$ si calcola

$$f_{xx}(x,y) = y^{2x}\cdot 4\log^2 y,\quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = y^{2x}\cdot\left(\frac{4x\log y+2}{y}\right),\quad f_{yy}(x,y) = y^{2x}\cdot\left(\frac{4x^2-2x}{y^2}\right)$$

e risulta

$$\det H_f(P) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0;$$

si conclude che P è un punto di sella e quindi f <u>non</u> ha estremanti locali.

5°)

g è di classe C^∞ in $\mathbb{R}$; si trova

$$g'(x) = x\cdot\operatorname{sen}x,$$
$$g''(x) = \operatorname{sen}x + x\cdot\cos x, \qquad \text{per ogni } x\in\mathbb{R}.$$
$$g'''(x) = 2\cos x - x\cdot\operatorname{sen}x,$$

Essendo $g''(0)=0$, $g'''(0)=2\neq 0$, il test delle derivate terze consente di concludere che 0 è pto di flesso proprio per g, ed è a tangente orizzontale poiché $g'(0)=0$.