Compito di Matematica per l'Economia (A –K) - 11 settembre 2013 – Prof. P. Amato - DISPARI

1. Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & x > 1 \end{cases}$$

- determinare la primitiva nulla in x=1,
- calcolare il valor medio v_m in [0, e], precisando se è un valore assunto (giustificare la risposta, enunciando il relativo teorema);

2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x\log(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}\right]^{-\frac{1}{x}}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}[x^2 - \log(x^2-4)^2]$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $h: R \to R$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{e}\frac{e^x - e^2}{x-2} & x < 2 \\ e & x = 2 \\ a - sen\frac{\pi}{4}x & x > 2 \end{cases}$$

- 1) studiarne i punti di discontinuità al variare del parametro a in R;
- 2) determinare a in modo che h risulti continua in R;
- 3) per i valori di a trovati al punto b) h è derivabile in R?
-

5. Calcolare il

$$\min_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\ 7\right]} \sqrt{1-\cos x}$$

citando ed enunciando i teoremi che si applicano. E' applicabile il teorema di Lagrange (enunciare) alla funzione nell'intervallo considerato?

6. Enunciare e dimostrare il teorema della media per gli integrali.

COGNOME	NOME	MATRICOLA	FIRMA

N.B. A) DURANTE LO SVOLGIMENTO TUTTI I CELLULARI DEVONO RIMANERE SPENTI E SUL TAVOLO, PENA L'ANNULLAMENTO DEL COMPITO; B) E' VIETATO L'USO DI CALCOLATRICI.

COMPITO DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA 11/09/2013 ~~COGNOME E NOME~~ ~~NUMERO DI MATRICOLA~~ GRUPPO DISPARI

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di tre ore. **D**

°) D

Integrando per parti abbiamo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x + c$$

quindi $\int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\right] + c_1$, mentre

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c_2$, quindi $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\right] + c_1 & -1 \le x \le 1 \\ 2\sqrt{x} + c_2 & x > 1 \end{cases}$

Per avere la primitiva che in $x=1$ vale 0, occorre usare la prima espressione per cui $c_1 = -\frac{\pi}{2}$. Inoltre

$$v_m = \frac{1}{e-0}\int_0^e g(x)\,dx = \frac{1}{e}\left\{\int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^e g(x)\,dx\right\} = \frac{1}{e}\left\{\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x\right]_0^1 + \right.$$

$$\left.\left[2\sqrt{x}\right]_1^e\right\} = \frac{1}{e}\left\{\frac{\pi}{2} + 2(\sqrt{e}-1)\right\} \in [0,1] = g([0,e]) = g([0,1]) \cup g([1,e])$$

$= [0,1] \cup [\frac{1}{e}, 1[$. Notiamo che non è applicabile il teor. della media integrale perché $g(x)$ è discontinua in $x=1$ (I° specie).

°) D

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\log(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left\{\text{per } x\to 0:\ \log(1+x)\sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}\right)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2}\sqrt{x^2}\right)^{-\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}\log\sqrt{2x^2}} \quad \nexists \text{ perché}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}\log\sqrt{2x^2}} = e^{-(+\infty)(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}\log\sqrt{2x^2}} = e^{-(-\infty)(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

D 3°) Studiare la seguente funzione:

$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}\left[x^2 - \log(x^2-4)^2\right]$

Poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Insieme di definizione $D_f =]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

$f(x)>0$ $]-\infty,-\alpha[$, $]-2,-\alpha[$, $]\alpha,2[$, $]2,+\infty[$

$f(x)=0$ $-\alpha, \alpha$

$f(x)<0$ $]-\alpha,\alpha[$

α per ragione approssimativa

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x

Limiti significativi per f:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $\nexists$ as. obl., $\lim_{x\to\pm 2} f(x) = +\infty$

$x=-2, x=2$ as. verticali

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$x=-2$ e $x=2$ asintoti verticali bilateri

$f'(x) = \frac{x^3-6x}{x^2-4}$

$f'(x)>0$ $]-\sqrt{6},-2[$, $]0,2[$, $]\sqrt{6},+\infty[$

$f'(x)=0$ $x=0$, $x=-\sqrt{6}$, $x=\sqrt{6}$

$f'(x)<0$ $]-\infty,-\sqrt{6}[$, $]-2,0[$, $]2,\sqrt{6}[$

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $]-\sqrt{6},-2[$, $]0,2[$, $]\sqrt{6},+\infty[$

Intervalli in cui f è costante //

Intervalli in cui f è strettamente decrescente $]-\infty,-\sqrt{6}]$, $]-2,0]$, $]2,\sqrt{6}]$

Punti di minimo ~~o di massimo~~ relativo per f $x=-\sqrt{6}$, $x=0$, $x=\sqrt{6}$

Punti di minimo ~~o di massimo~~ assoluto per f $x=0$

$f''(x) = \frac{x^4-6x^2+24}{(x^2-4)^2}$

$f''(x)>0$ $\forall x \in D_f$

$f''(x)=0$ //

$f''(x)<0$ //

Intervalli in cui f è convessa $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$, $]2,+\infty[$

Intervalli in cui f è concava //

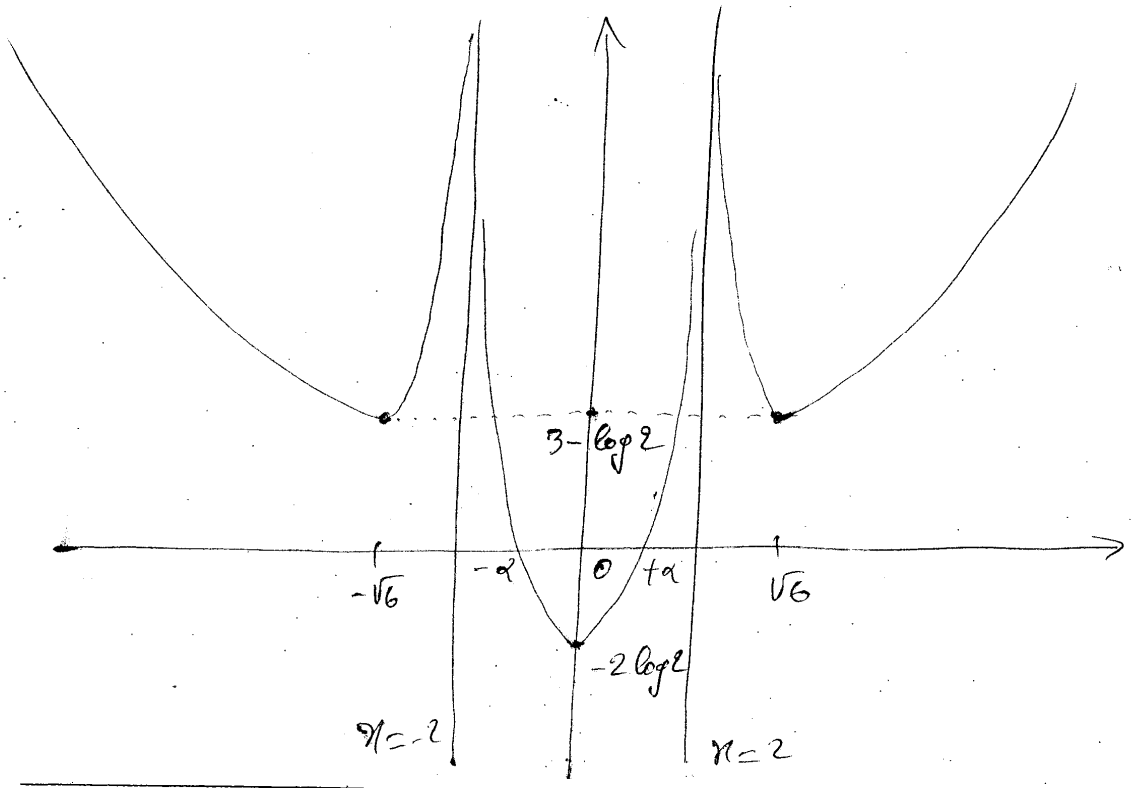
Punti di flesso per f //

f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $[-2\log 2, +\infty[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.



4°) D

Le restrizioni della funzione a $]-\infty,2[$ e $]2,+\infty[$, sono funzioni di classe C^∞, quindi l'unico eventuale punto di discontinuità è $x=2$. Osservato che

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\pi}{e}\,\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{x-2} = \pi e$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(a - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}x\right) = a-1 .$$

il limite esiste se $a-1=\pi e$ ovvero $\underline{a = 1+\pi e}$, ma la funzione non è continua in $x=e$ poiché $h(e)=e$. Pertanto $\nexists\, a\in\mathbb{R}$ tale che $h(x)$ sia continua in $\mathbb{R}$, idem per la derivabilità.

Essendo però le discontinuità di II specie o eliminabili, posto

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x\neq 2 \\ \pi e & x=2 \\ \pi e+1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}x & x>2 \end{cases}$$

, $\bar{h}(x)$ è continua in $\mathbb{R}$.

Si può inoltre vedere che $\bar{h}(x)$ non è derivabile in $x=2$.

5°) essendo $K(x)=\sqrt{1-\cos x}$ continua in $I=[\frac{\pi}{2},7]$ chiuso e limitato, per il teor. di Weierstrass ha minimo e massimo. Il teor. dei punti critici stabilisce che i punti di minimo e di massimo vanno cercati fra i punti critici interni ad I, fra i punti interni ad I in cui $K(x)$ non è derivabile e fra gli estremi di I. essendo

$$K'(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}}$$ definita per $\cos x \neq 1$ ovvero $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

e l'unico punto di questo tipo $\in \mathring{I}$ è 2π, che è quindi un punto stazionario singolare di $K(x)$, inoltre $(K'(x)=0 \ x \in \mathring{I}) \Leftrightarrow (x=k\pi$ e $x \in \mathring{I})$ $\Leftrightarrow x=\pi$, π è quindi l'unico punto critico stazionario di $K(x)$ interno ad I. Allora il punto di minimo va cercato nell'insieme $\{\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, 7\}$ e quindi è 2π perché $K(2\pi)=0$ (ecco si poteva anche stabilire direttamente essendo $\cos x$ minimo per $x=2\pi$).
Non è possibile applicare il teor. di Lagrange alla funzione essendo questa non derivabile in $x=2\pi$, mentre il teor. di Lagrange richiede la continuità in I e la derivabilità in $\mathring{I}$.

6°) D

Vedi appunti per la lezione o libro di testo.

N.B.
LA TRACCIA PARI SI SVOLGE IN MODO DETTAGLIATO ANALOGO.