Prova scritta di Matematica per l'Economia e Matematica Generale – 09 Gennaio 2013

NUMERI DISPARI

****

1. Data la funzione

$$g(x) = arctg\sqrt{x}$$

- Determinarne l'insieme di definizione e dire se è integrabile nell'intervallo [0, 3];
- Calcolarne l'integrale indefinito;
- Calcolare il valor medio v_m di $g(x)$ in [0, 4] e dire se è un valore assunto da g in [0, 4]; (giustificare la risposta).

2. Calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6logx+cos5^x}{\sqrt{5^x-1}}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione

$$h(x) = arcsen[log(\,1 + \sqrt{\frac{x+4}{x}}\,)\,]$$

- determinarne il dominio;
- calcolare $h'(x)$.

5. Considerata la funzione così definita in R

$$q(x) = \begin{cases} \log(1+x) & x \geq 0 \\ e^x - k & x < 0 \end{cases}$$

- Determinare k in modo che a $q(x)$ sia applicabile il teorema degli zeri relativamente all'intervallo [-2, 5];
- Dire se per il valore di k trovato al punto precedente, $q(x)$ risulta derivabile in $x = 0$?

6. Data la funzione

$$f(x,y) = yx - \frac{y}{x}$$

- dire se è differenziabile in (1,0);
- determinarne gli eventuali punti di estremo locale.

6bis. Dare la definizione di punto massimo relativo, enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

COGNOME E NOME.....NUMERO DI MATRICOLA.....

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di tre ore. | DISPARI

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA PER ECONOMIA E MATEMATICA GENERALE DEL 09 GENNAIO 2013

1°) $g(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Poiché il dominio di arctg è $\mathbb{R}$, il dominio di g coincide con il dominio di $\sqrt{1+x}$ ovvero con $[-1,+\infty[$.

Integrando per parti con fattore differenziale $1 = Dx$, abbiamo

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}\,d\sqrt{x}$$

$$\overset{\sqrt{x}=t}{=} x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \left(\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \left(\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} -$$

$$\left[t - \operatorname{arctg} t\right]_{t=\sqrt{x}} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$$

$$\text{Im} = \frac{1}{4}\int_0^4 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{4}\left[(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left[(5\operatorname{arctg}2 - 2) - ((0+1)\operatorname{arctg}0 - 0)\right]$$

$$= \frac{5}{4}\operatorname{arctg}2 - \frac{1}{2}$$

Essendo $g(x)$ continua in $[0,4]$ per il teorema di Weierstrass continua vale il teor. della media, per cui Im è un valore assunto da g in $[0,4]$.

2°)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 6\lg n + \cos 5^n}{\sqrt{5^n - 1}}$$

Ricordiamo che $-1 \le \cos 5^n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{R}$, $\lg n$ è un infinito di ordine comunque piccolo per $n \to +\infty$ e n^2 è un infinito di 2° ordine, pertanto per $n \to +\infty$ il numeratore è equivalente a n^2, mentre $\sqrt{5^n - 1} \sim \sqrt{5^n} = 5^{\frac{n}{2}}$ che è un infinito di ordine comunque elevato. Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 6\lg n + \cos 5^n}{\sqrt{5^n - 1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{5^{\frac{n}{2}}} = 0,$$

essendo il denominatore infinito di ordine superiore rispetto al numeratore.

3°) Studiare la seguente funzione:

10

$x \to f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$

Insieme di definizione $D_f =]0,+\infty[$

f(x)>0 $x \in]1,+\infty[$

f(x)=0 $x = 1$

f(x)<0 $x \in]0,1[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]1,+\infty[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati $(1,0)$

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]0,1[$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $x=0$ as. vert. (abbassamento), $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$x = 0$ as. verticale

$f'(x) = \frac{3x^2+1}{2x\sqrt{x}}$

f'(x)>0 $\forall x \in D_f$

f'(x)=0 //

f'(x)<0 //

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $]0,+\infty[$

Intervalli in cui f è costante //

Intervalli in cui f è strettamente decrescente //

Punti di minimo o di massimo relativo per f //

Punti di minimo o di massimo assoluto per f //

$f''(x) = \frac{3(x^2-1)\sqrt{x}}{4x^3}$

f''(x)>0 $\Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$

f''(x)=0 $\Leftrightarrow x = 1$

f''(x)<0 $\Leftrightarrow x \in]0,1[$

Intervalli in cui f è convessa $[1,+\infty[$

Intervalli in cui f è concava $]0,1]$

Punti di flesso per f $x = 1$

f è biunivoca (iniettiva)?

Sì

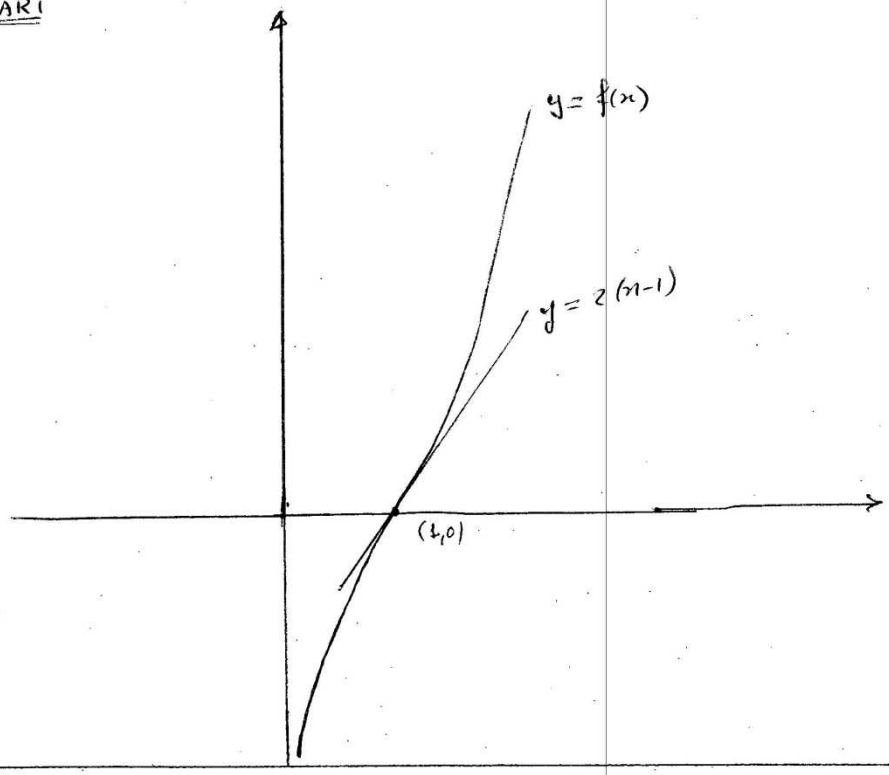
Indicare l'insieme dei valori di f:

$]-\infty,+\infty[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.

NUMERI DISPARI



4°) Essendo arcsen definita in $[-1,1]$, dovrà essere

$$-1 \le \log\left(1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}\right) \le 1 \iff e^{-1} \le 1+\sqrt{\frac{x+4}{x}} \le e \iff \frac{1}{e}-1 \le \sqrt{\frac{x+4}{x}} \le e-1$$

$$\overset{\frac{1}{e}-1<0}{\iff} \sqrt{\frac{x+4}{x}} \le e-1 \iff \frac{x+4}{x} \le (e-1)^2 \iff 1+\frac{4}{x} \le (e-1)^2 \iff \underline{\frac{4}{x} \le (e-1)^2-1}$$

Inoltre per l'esistenza del log dovrà essere $1+\sqrt{\frac{x+4}{x}} > 0$ ovvero l'argomento sia definito $\sqrt{\frac{x+4}{x}}$ ovvero $\frac{x+4}{x} \ge 0$

$\iff \underline{x \le -4 \vee x > 0}$. Pertanto

$$x \in D_h \iff \begin{cases} \frac{4}{x} \le (e-1)^2-1 \\ x \le -4 \vee x > 0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} \frac{4}{x} \le (e-1)^2-1 \\ x \le -4 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{4}{x} \le (e-1)^2-1 \\ x > 0 \end{cases} \right) \iff$$

$$\iff \left(\begin{cases} x \le \frac{4}{(e-1)^2-1} \\ x \le -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge \frac{4}{(e-1)^2-1} \\ x > 0 \end{cases} \right) \iff D_f = \left]-\infty,-4\right] \cup \left[\frac{4}{(e-1)^2-1}, +\infty\right[$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\log\left(1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}\right)\right)^2}} \cdot D\log\left(1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\log\left(1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}\right)\right)}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}} \cdot D\left(1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\log\left(1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}\right)\right)^2}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x+4}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}} \cdot \left(-\frac{4}{x^2}\right) -$$

PARI

5°) Per poter applicare il teor degli zeri a $g(x)$ nell'intervallo $[-2,5]$ è necessario che $g(x)$ sia continua in tale intervallo. In particolare $g(x)$ deve essere continua in $x=0$ per cui si deve avere

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0) \quad \text{ma} \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x-1) = 0$$

quindi deve essere $g(0)=0$ ovvero $\log k = 0$ e quindi $k=1$.

Per $k=1$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(1+x) = 0$, pertanto se $k=1$ $g(x)$ è continua in 0, inoltre è continua anche negli altri punti dell'intervallo perché $\log(1+x)$ è continua in $]0,5]$ e e^x-1 è continua in $[-2,0[$. Inoltre $g(-2)=e^{-2}-1<0$ e $g(5)=\log 6>0$. Dunque il teor. degli zeri vale se $k=1$. Vediamo se $g(x)$ è derivabile in 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{quindi } g'_+(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{quindi } g'_-(0)=1$$

pertanto $g(x)$ è derivabile sia a sinistra che a destra in 0 e la derivata vale uguale. Dunque $g(x)$ è derivabile in 0 e $g'(0)=1$.

6°) $f(x,y) = \frac{y}{x} - yx$ è definita per $x\neq 0$ ovvero $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{asse } y\}$.

$f_x = -\frac{y}{x^2} - y$, $f_y = \frac{1}{x} - x$ $\forall x \in D_f$, quindi f è dotata di derivate parziali continue in D_f e in particolare in $(1,0)\in \mathring{D}_f$, in cui risulta pertanto differenziabile per il teorema del differenziale totale.

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{y}{x^2} + y = 0 \\ \frac{1}{x} = x \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \iff$$ il gradiente si annulla in pti $A(1,0)$ e $B(-1,0)$

Esaminiamo l'hessiana in tali pti.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{x}\left(-\frac{y}{x^2} - y\right) = 2\frac{y}{x^3}, \quad f_{xy} = -\frac{1}{x^2} - 1, \quad f_{yx} = -\frac{1}{x^2} - 1, \quad f_{yy} = 0$$

pertanto

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \\ -\left(\frac{1}{x^2}+1\right) & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^2$$

quindi $H(1,0) = H(-1,0) = -4 < 0$. A e B sono entrambi punti di sella per $f(x,y)$.