Prova scritta di Matematica per l'Economia e Matematica Generale - 7 novembre 2012

NUMERI DISPARI

****

1. Data la funzione
$$g(x) = \log(\sqrt{x} - 2),$$
calcolarne:

   a) il dominio D_g;

   b) l'integrale indefinito (si ponga $\sqrt{x} = t$ e quindi si integri per parti);

   c) la primitiva F che in $x_0 = 9$ assume valore 1.

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x - \cos x^5}{x^5 + \arcsin\left(\dfrac{\log x}{x}\right)}.$$

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$$
e tracciarne approssimativamente il grafico. Determinare, inoltre, l'elasticità di f nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

4. Verificare che le seguenti funzioni:
$$g_1(x) = \frac{\log(1 + x^2)}{x}, \quad g_2(x) = |x|^{\operatorname{arctg} x}, \qquad (x \neq 0)$$
sono prolungabili con continuità in $x_0 = 0$. Le funzioni così prolungate risultano anche derivabili in $x_0 = 0$?

5. Data la funzione $h : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definita ponendo
$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ \dfrac{1}{1 + x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$
calcolarne la media integrale m e provare, senza calcolarlo, che esiste un unico punto $c \in [-1, 1]$ tale che $h(c) = m$.

6. Data la funzione
$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y,$$
determinarne il dominio, calcolarne le derivate parziali prime e seconde e dire se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

6_{bis}. **(Riservato agli studenti il cui programma di riferimento non prevede lo studio di funzioni reali di due variabili reali)**
Dare la definizione di limite ed enunciare e dimostrare il teorema della convergenza obbligata (o dei carabinieri).

COGNOME E NOME MATEMATICA PER L'ECONOMIA 7/11/2012 ..... NUMERO DI MATRICOLA DISPARI .....

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di tre ore.

1°) $g(x) = \log(\sqrt{x}-2)$

a) $D_g =]4;+\infty[$

b) g è una funzione continua in quanto composta di funzioni continue e quindi integrabile secondo Riemann. L'integrale indefinito è $\int \log(\sqrt{x}-2)\,dx$. Posto $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, l'integrale diventa $\int 2t \log(t-2)\,dt$, si integri quindi per parti

$$\int 2t \log(t-2)\,dt = t^2\log(t-2) - \int \frac{t^2}{t-2}\,dt = t^2\log(t-2) - \int\left[(t+2)+\frac{4}{t-2}\right]dt =$$

$$= t^2\log(t-2) - \frac{t^2}{2} - 2t - 4\log(t-2) + c$$

$$\begin{array}{l|l} t^2 & t-2 \\ \hline t^2-2t & t+2 \\ \hline // \; 2t & \\ 2t-4 & \\ \hline // \; 4 & \end{array}$$

$$F(x) = x\log(\sqrt{x}-2) - \frac{x}{2} - 2\sqrt{x} - 4\log(\sqrt{x}-2) + c$$

c) $F(9)=1 \iff 9\log(3-2) - \frac{9}{2} - 2\cdot 3 - 4\log(3-2) + c = 1$

$$-\frac{9}{2} - 6 + c = 1 \Rightarrow c = \frac{2+12+9}{2} = \frac{23}{2}$$

La primitiva richiesta è $F(x) = x\log(\sqrt{x}-2) - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} - 4\log(\sqrt{x}-2) + \frac{23}{2}$

2°)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x-\cos x^5}{x^5+\arcsin\left(\frac{\log x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^5} = 0$$

$1+x-\cos x^5 \simeq x$ in quanto $1-\cos x^5 \ll x$ per $x\to+\infty$

$x^5 - \arcsin\left(\frac{\log x}{x}\right) \simeq x^5$ in quanto

$\arcsin\left(\frac{\log x}{x}\right) \simeq \frac{\log x}{x} \to 0$ per $x\to+\infty$ poiché $\log x \ll x$ per $x\to+\infty$

3°) Studiare la seguente funzione:

$x \to f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+1}$

Insieme di definizione $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f(x)>0 $]-\sqrt{2}; -1[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$

f(x)=0 $x = \pm\sqrt{2}$

f(x)<0 $]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]-1; +\sqrt{2}[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]-\sqrt{2}; -1[,]\sqrt{2}; +\infty[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati $(-\sqrt{2}, 0)(\sqrt{2}, 0), (0, -2)$

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]-\infty; -\sqrt{2}[,]-1; +\sqrt{2}$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to(-1)^\pm} f(x) = \mp\infty$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = -1$

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$x = -1$ asint verticale dx e sx ; $y = x - 1$ asintoto obliquo dx e sx

$f'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$ $\forall x \in D_f$

f'(x)>0 $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

f'(x)=0 // //

f'(x)<0 // //

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f // //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $]-\infty; -1[,]-1; +\infty[$

Intervalli in cui f è costante // //

Intervalli in cui f è strettamente decrescente // //

Punti di minimo o di massimo relativo per f // //

Punti di minimo o di massimo assoluto per f // //

$f''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$ $\forall x \in D_f$

f''(x)>0 $]-\infty; -1[$

f''(x)=0 // //

f''(x)<0 $]-1; +\infty[$

Intervalli in cui f è convessa $]-\infty; -1[$

Intervalli in cui f è concava $]-1; +\infty[$

Punti di flesso per f // //

f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $\mathbb{R}$

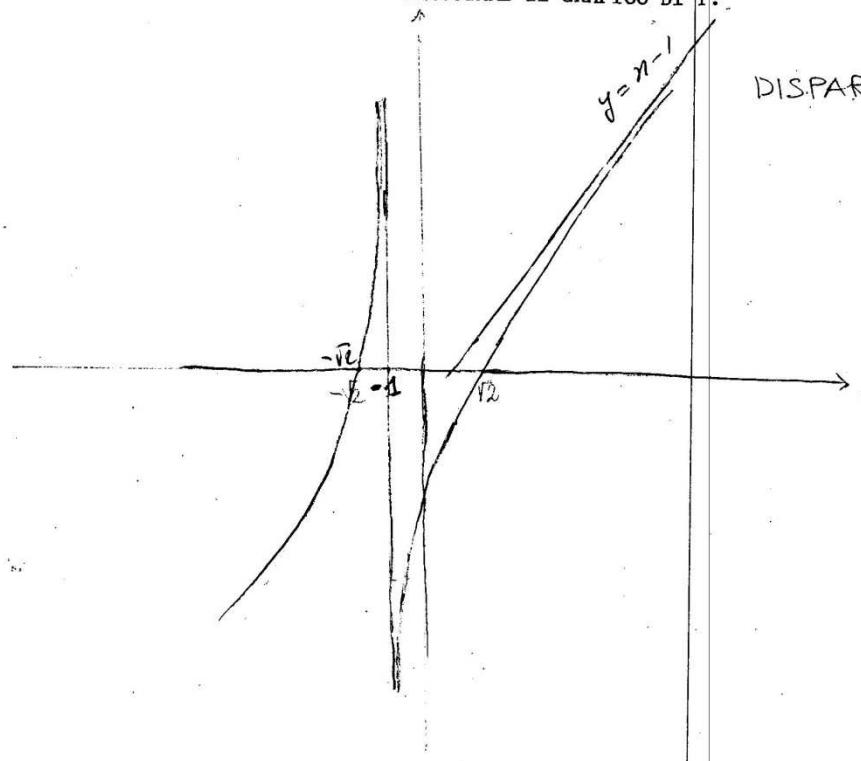
Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

$E_{x_0} = 2 \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{14}{3}$

$f'(2) = \frac{14}{9}$

$f(2) = \frac{2}{3}$

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.



DISPARI

4°)

La funzione g_1 è prolungabile con continuità in $x_0=0$ ponendo $g_1(0)=0$ in quanto $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ poiché $\log(1+x^2) \simeq x^2$ per $x\to 0$

Calcolando il limite del rapporto incrementale per $x\to 0$ otteniamo che g_1 è derivabile in $x_0=0$ con $g_1'(0)=0$ in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{g_1(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x^2)}{x} = 0$$

La funzione g_2 è prolungabile con continuità in $x_0=0$ ponendo $g_2(0)=1$ in quanto

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{arctg} x \log|x|} = e^0 = 1$$ poiché $\operatorname{arctg} x \simeq x$ per $x\to 0$

e $\lim_{x\to 0} x\log|x| = 0$

Calcolando il limite del rapporto incrementale per $x\to 0$ otteniamo che g_2 non è derivabile in $x_0=0$ infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x \log|x|}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\log|x|}{x} = -\infty$$ poiché per $x\to 0$

$e^{\operatorname{arctg} x \cdot \log|x|} - 1 \simeq \operatorname{arctg} x \log|x| \simeq x\log|x|$

5°)

$$m = \frac{\int_{-1}^{0}(x^2+1)\,dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}\,dx}{1-(-1)} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{0} + \left[\log(1+x)\right]_{0}^{1}}{2} = \frac{+\frac{1}{3}+1+\log 2}{2} =$$

$$= \frac{4+3\log 2}{6}$$

La funzione è continua in 0 in quanto $f(0^-) = \lim_{x\to 0} x^2+1 = 1 = f(0^+) = f(0)$, e quindi il teorema della media garantisce che $\exists\, c \in [-1,1]$ tale che $h(c) = m$.

6°)

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0$

Per ogni $(x,y) \in D_f$ si calcola

$f_x(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2}$, $f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} - 1$, $f_{xx}(x,y) = \frac{16}{x^3}$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$, $f_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}$,

inoltre $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nel solo punto $(4,2)$

Poiché

$$\det H_f(4,2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0 \quad e \quad f_{xx}(4,2) > 0,$$

si conclude che il punto $(4,2)$ è un punto di minimo locale.