**Prova scritta di Matematica per l'Economia e Matematica Generale - 4 luglio 2012**

**NUMERI DISPARI**

***************

1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right),$$
calcolarne

   **a)** l'integrale indefinito (si ponga $\frac{1}{x} = t$ e quindi si integri per parti);

   **b)** l'integrale definito in $[1/\pi, 6/\pi]$;

   **c)** il valore medio $v_m$ nell'intervallo $[1/\pi, 6/\pi]$.

   È possibile affermare che l'equazione $f(x) = v_m$ ammette almeno una soluzione in $[1/\pi, 6/\pi]$?

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\arcsin x - e^{\mathrm{tg}x} + 1}{\log(1+3x) + \sin(x^2+x)}.$$

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = \frac{\log x}{1+\log x}$$
e tracciarne approssimativamente il grafico. Determinare, inoltre, l'elasticità di $f$ nel punto di ascissa $x_0 = e$.

4. Data la funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita ponendo
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 3, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
dire, giustificando esaurientemente la risposta,

   **a)** se $g$ è continua in 0;

   **b)** se $g$ è derivabile in 0 (in caso affermativo calcolare $g'(0)$);

   **c)** se $g$ è regolare per $x \to \pm\infty$ e in caso affermativo indicare i valori dei limiti corrispondenti;

   **d)** se $g$ è dotata di minimo e massimo valore nell'intervallo $[-1, 1]$.

5. Mostrare con opportune argomentazioni che la funzione $F : [0, +\infty[ \to \mathbf{R}$ definita ponendo
$$F(x) := \int_1^x arctg(e^{t^2+t}) \cdot \sqrt{t}\, dt \qquad (x \geq 0)$$
è strettamente convessa.

6. Data la funzione
$$f(x,y) = xye^{y-2x},$$
determinarne il dominio, calcolarne le derivate parziali prime e seconde e dire se $f$ è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

$6_{bis}$. **(Riservato agli studenti il cui programma di riferimento non prevede lo studio di funzioni reali di due variabili reali)**
Dare la definizione di funzione derivabile in un punto e in un intervallo; illustrare, quindi, i casi di non derivabilità (in un punto), definendo il concetto di punto angoloso e punto cuspidale anche tramite opportuni esempi. Enunciare, infine, e dimostrare un teorema a scelta sul calcolo differenziale.

COGNOME E NOME..PROVA.....DEL.....4/07/2012..NUMERO DI MATRICOLA...DISPARI..

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di tre ore.

1°) a) $\int \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Posto $\frac{1}{x}=t$, si ha $x=\frac{1}{t}$ da cui $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Quindi risulta

$$\int t^3\cos t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int t\cos t\,dt=-\int t\,D(\sin t)\,dt=-t\sin t+\int \sin t\,dt=$$

$$-t\sin t-\cos t+c=-\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$$

b) $$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}=\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-$$

$$\pi\sin\pi-\cos\pi=\frac{-\pi-6\sqrt{3}-12}{12}$$

c) $$\mathrm{Vm}=\frac{\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx}{\frac{6}{\pi}-\frac{1}{\pi}}=\frac{-\pi-6\sqrt{3}-12}{\frac{60}{\pi}}=\frac{\pi}{60}\left(-\pi-6\sqrt{3}-12\right)$$

Essendo $f$ continua in $\left[\frac{1}{\pi},\frac{6}{\pi}\right]$, per il teorema della media integrale è possibile affermare che $\exists\, c\in\left[\frac{1}{\pi},\frac{6}{\pi}\right]$ t.c. $f(c)=\mathrm{Vm}$

2°) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\arcsin x-e^{tg x}+1}{\log(1+3x)+\sin(x^2+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$$ poiché

$2\arcsin x\simeq 2x$
$1-e^{tg x}\simeq -tg\,x\simeq -x$ ) Al numeratore $(2-1)x=x$ per $x\to 0^+$

$\log(1+3x)\simeq 3x$
$\sin(x^2+x)\simeq x^2+x\simeq x$ poiché $x^2\ll x$ per $x\to 0^+$ ) Al denominatore $(3+1)x=4x$ per $x\to 0^+$

3°) Studiare la seguente funzione:

$x \to f(x) = \dfrac{\log x}{1+\log x}$

Insieme di definizione $D_f = ]0;+\infty[ \setminus \{e^{-1}\}$

$f(x)>0$ $]0;e^{-1}[ \cup ]1,+\infty[$

$f(x)=0$ $x=1$

$f(x)<0$ $]e^{-1};1[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]0;e^{-1}[, ]1,+\infty[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati $(1,0)$

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]e^{-1},1[$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to(e^{-1})^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(e^{-1})^+} f(x) = -\infty$

Equazioni degli asintoti del grafico di f:

$y=1$ asint. orizzontale dx $\quad x=e^{-1}$ asint. verticale dx e sx

$f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\log x)^2} \quad \forall x \in D_f$

$f'(x)>0$ $]0;+\infty[ \setminus \{e^{-1}\}$

$f'(x)=0$ //

$f'(x)<0$ //

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $]0;+\infty[ \setminus \{e^{-1}\}$ $]0,e^{-1}[, ]e^{-1},+\infty[$

Intervalli in cui f è costante //

Intervalli in cui f è strettamente decrescente //

Punti di minimo o di massimo relativo per f //

Punti di minimo o di massimo assoluto per f //

$f''(x) = -\dfrac{(3+\log x)}{x^2(1+\log x)^3} \quad \forall x \in D_f$

$f''(x)>0$ $]e^{-3},e^{-1}[$

$f''(x)=0$ $x=e^{-3}$

$f''(x)<0$ $]0,e^{-3}[ \cup ]e^{-1},+\infty[$

Intervalli in cui f è convessa $[e^{-3},e^{-1}[$

Intervalli in cui f è concava $]0,e^{-3}], ]e^{-1},+\infty[$

Punti di flesso per f $(e^{-3}, 3/2)$

f è biunivoca (iniettiva)?

sì

Indicare l'insieme dei valori di f:

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$

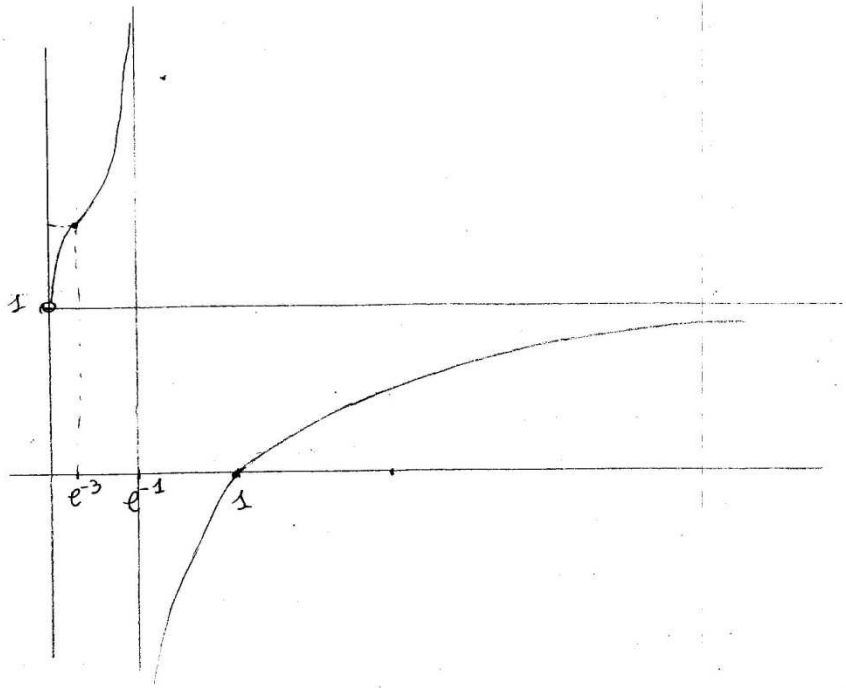
Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

$f(e^{-3}) = -\dfrac{\frac{1}{e^{-3}} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{6}$

$f(e^{-3}) = -\dfrac{1}{e^{-3}} \cdot \dfrac{1}{4}$

$f(e^{-3}) = \dfrac{3}{2}$

TRACCIARE IL GRAFICO DI f. DISPARI




4°)

a) Si ha $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \underset{\substack{\sin(3x)\simeq 3x \\ \text{per } x\to 0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3 = g(0)$ e dunque

g è continua in 0.

b) Poiché $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)-3x}{x^2} \underset{\substack{\sin(3x)-3x \simeq -\frac{1}{6}27x^3 \\ \text{per } x\to 0}}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{9}{2}\frac{x^3}{x^2} = 0,$

g è derivabile in 0 con $g'(0)=0$

c) g è regolare a $\pm\infty$; infatti $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(3x)}{x} = 0$, in quanto $\sin(3x)$ è limitata, mentre $\frac{1}{x} \to 0$ per $x\to\pm\infty$

d) g è continua in $[-1,1]$ chiuso e limitato e dunque per il teorema di Weierstrass g ha minimo e massimo valore in $[-1,1]$

5°)

Poiché la funzione $t \in [0;+\infty[ \mapsto \operatorname{arctg}(e^{t^2+t}) \cdot \sqrt{t}$ è continua, il teorema di Torricelli-Barrow garantisce che $F$ è derivabile e

$$F'(x) = \operatorname{arctg}(e^{x^2+x}) \cdot \sqrt{x} \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

e dunque

$$F''(x) = \frac{(2x+1)\, e^{x^2+x}}{1+e^{2x^2+2x}} \cdot \sqrt{x} + \operatorname{arctg}(e^{x^2+x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{per ogni } x > 0$$

In definitiva $F$ è di classe $C^1$ in $[0,+\infty[$, è derivabile 2 volte in $]0,+\infty[$ ed ovviamente risulta $F''(x) > 0$ per ogni $x \in ]0;+\infty[$; si conclude che $F$ è strettamente convessa, come richiesto.

---

6°) $D_f = \mathbb{R}^2$, in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si calcolano

$f_x(x,y) = e^{y-2x}(y-2xy)$ $\quad f_y(x,y) = e^{y-2x}(x+xy)$

$f_{xx}(x,y) = e^{y-2x}\, 4(xy-y)$ $\quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{y-2x}(1+y-2x-2xy)$ $\quad f_{yy}(x,y) = e^{y-2x}(2x+xy)$;

si ha $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nel ~~solo~~ punto $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ e nel punto $(0,0)$

Risultando $\det H_f(0,0) < 0$, si ha un ~~caso indiscusso~~ punto di sella in $(0,0)$, mentre

$$\det H_f\left(\frac{1}{2};-1\right) = \begin{vmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2}\frac{1}{2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right) = 2e^{-2} > 0 \quad \text{e}$$

si conclude che $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ è un punto di minimo locale.

Inoltre $f$ è differenziabile poiché dotata di derivate parziali continue.