COMPITO DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA (A –K) - 03 LUGLIO 2013 – PROF. P. AMATO

1. Data la funzione

$$g(x) = x^2 \log(1-x)$$

- determinare l'insieme delle primitive,
- calcolare il valor medio v_m in [-2, 0], precisando se è un valore assunto dalla funzione nell'intervallo (giustificare la risposta, enunciando il relativo teorema);
- spiegare il legame tra v_m e l'area del rettangoloide di $g(x)$ relativo a [-2, 0].

E' applicabile il teorema di Rolle (enunciare) alla funzione relativamente all'intervallo [-2, 0]?

2. Calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x\log(1+x)}{1-\cos x}\right]^{-\frac{1}{x}}$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x^3 - 3x)$$

e tracciarne approssimativamente il grafico, scrivendo l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa x = 2. (Eventualmente, studiare il segno approssimativamente).

4. Data la funzione $h: R \to R$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \dfrac{b(1-\cos x)}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

- 1) studiarne i punti di discontinuità al variare dei parametri a e b in R;
- 2) determinare a e b in modo che h risulti continua in R;
- 3) per i valori dei parametri di cui al punto b) h è derivabile in R?
-

5. Calcolare il

$$\min_{x\in[-3,\ 4]} \int_0^x (t^2-4)\log(1+t^2)\,dt$$

citando ed enunciando i teoremi che si applicano.

6. Data la funzione

$$f(x,y) = e^{y^2} - x^2 + xy^2$$

- dire se è differenziabile in (1,0);
- determinarne gli eventuali punti di estremo locale.

COGNOME	NOME	MATRICOLA	FIRMA

ES.1 $g(x) = x^2 \log(1-x)$ $\quad D_f =]-\infty, 1[$.

$$\int x^2 \log(1-x)\,dx \overset{\text{per parti}}{=} \frac{x^3}{3}\log(1-x) - \int \frac{x^3}{3}\frac{-1}{1-x}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x-1}\,dx = *$$

(effettuando la divisione di x^3 per $x-1$ otteniamo $x^3 = (x-1)(x^2+x+1)+1$ e quindi $\frac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\frac{1}{x-1}$)

$$* = \frac{x^3}{3}\log(1-x) - \frac{1}{3}\int (x^2+x+1)\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{x^3}{3}\log(1-x) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)$$

$$+\frac{1}{3}\log(1-x) + C = \underline{\frac{1}{3}(x^3-1)\log(1-x) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)+C} = F(x)+C$$

$$\underline{v_m} = \frac{1}{0-(-2)}\int_{-2}^{0} x^2\log(1-x)\,dx = \frac{1}{2}\left[F(x)\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{2}\left(F(0)-F(-2)\right) = \underline{\frac{3}{2}\log 3 - \frac{4}{9}}$$

Poiché la funzione $g(x)$ è continua nell'intervallo $[-2,0]$, per il teorema della media v_m è un valore assunto in un opportuno punto $c \in [-2,0]$.
Notiamo che essendo $g(x) \geq 0$ in $[-2,0]$, $\int_{-2}^{0} g(x)\,dx = \int_{[-2,0]} g(x)\,dx = \text{area}\left(R_{g,[-2,0]}\right)$ quindi $\text{area}\left(R_{g,[-2,0]}\right) = v_m \cdot [0-(-2)]$, quindi v_m rappresenta l'altezza del rettangolo di base $[-2,0]$, che ha area uguale al rettangoloide.

ES2 Calcoliamo il limite della base, utilizzando le equivalenze per infinitesimi dove è possibile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x)}{1-\cos x} = \left\{ 1-\cos x \simeq \frac{1}{2}x^2 \text{ per } x\to 0 \right\} = \lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x)}{\frac{1}{2}x^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 2$$, pertanto, ~~[illegible]~~ limitandoci al limite da destra

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x\log(1+x)}{1-\cos x}\right]^{-\frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = 0$$, mentre da sinistra

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x\log(1+x)}{1-\cos x}\right]^{-\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$ Dunque il limite $\nexists$.

Es 3 $f(x)=\log(x^3-3x)$ $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^3-3x>0\}=]-\sqrt{3},0[\cup]\sqrt{3},+\infty[$.

Poiché non è immediato individuare una soluzione di $f(x)=0$, ovvero di $x^3-3x-1=0$, studiamo il segno approssimativamente, osservando che per il teor. degli zeri (f è continua) fra due punti in cui f assume valori di segno opposto vi è almeno uno zero della funzione. Si può vedere che l'equazione ammette tre radici reali α,β,γ con $-1.6<\alpha<-1.5$, $-0.5<\beta<-0.4$, $1.8<\gamma<1.9$. Pertanto

$f(x)<0$ per $x\in]-\sqrt{3},\alpha[\cup]\beta,0[\cup]\sqrt{3},\gamma[$

$f(x)>0$ per $x\in]\alpha,\beta[\cup]\gamma,+\infty[$

come si ricava dal fatto che

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{3}}\log(x^3-3x)=\lim_{t\to 0}\log t=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 0}\log(x^3-3x)=\lim_{t\to 0}\log t=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log(x^3-3x)=\lim_{t\to+\infty}\log t=+\infty.$$

Notiamo che essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^3-3x)}{x}=0$, non vi è asintoto obliquo, mentre le rette $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ sono asintoti verticali in basso.

Calcoliamo la derivata prima:

$$\underline{f'(x)}=\frac{1}{x^3-3x}D(x^3-3x)=\underline{\frac{3x^2-3}{x^3-3x}}\qquad\forall x\in D_f$$

$f'(x)=0 \iff (3x^2-3=0 \wedge x^3-3x>0) \iff x=\pm1 \wedge x\in D_f \iff x=-1$

$(x=1\notin D_f)$.

$f'(x)>0 \iff (x^2-1>0 \wedge x\in D_f) \iff (x<-1 \vee x>1)$ e $(x\in D_f) \iff$

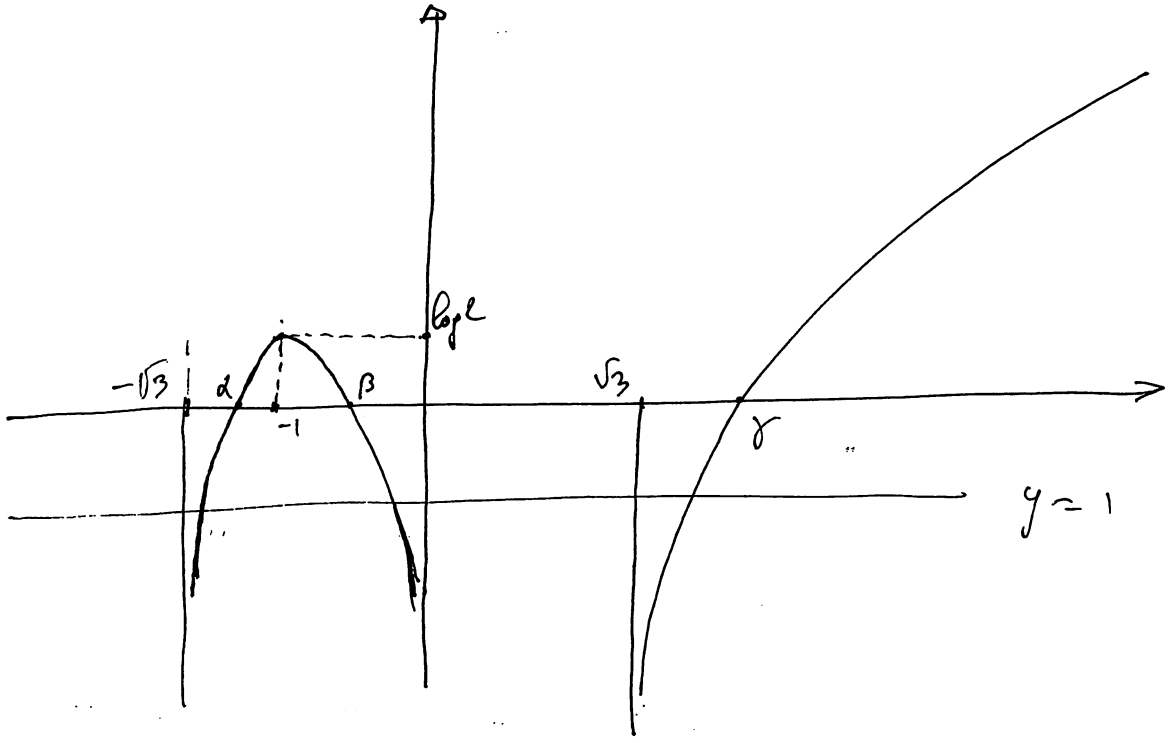
$\iff x\in]-\sqrt{3},-1[\cup]\sqrt{3},+\infty[$

$f'(x)<0 \iff x \in]-1,0[$, pertanto $f(x)$ è strett. crescente in $]-\sqrt{3},-1]$ e in $]\sqrt{3},+\infty[$, strett. decrescente in $[-1,0[$.
Ne segue che -1 è punto di massimo relativo proprio; $f(-1)=\log 2 \simeq 0.69$.

$$f''(x) = 3\,D\left(\frac{x^2-1}{x^3-3x}\right) = 3\,\frac{2x(x^3-3x)-(x^2-1)\,3(x^2-1)}{(x^3-3x)^3} = -3\,\frac{x^4+3}{(x^3-3x)^2}, \text{ quindi}$$

$$f''(x) = -\frac{3(x^4+3)}{(x^3-3x)^2} \quad \forall x \in D_f$$

Poiché $f''(x)<0$ in D_f, abbiamo che $f(x)$ è strett. concava in $]-\sqrt{3},0[$ e in $]\sqrt{3},+\infty[$ e non ci sono punti di flesso.
Il grafico di $f(x)$ è quindi



Come si può osservare dal grafico la funzione non è iniettiva, quindi neanche biiettiva (ad es. la retta $y=-1$ attraversa il grafico in 3 punti). Inoltre l'immagine della funzione è

$$f(D_f) = \mathbb{R}.$$

Quindi $f: D_f \to \mathbb{R}$ è surgettiva.

Es 4 Sia per $x>0$ che per $x<0$ $h(x)$ è continua essendo rapporto di funzioni continue, quindi l'unico eventuale punto di discontinuità è $x=0$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{(limite notevole)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} b\cdot\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{b}{2} \quad (\ \text{"}\ )$$

quindi essendo $h(0)=a$ per avere la continuità in $x=0$ dovrà risultare $a=1$ e $\frac{b}{2}=1$ da cui $a=1$ e $b=2$.
Quindi per $a=1$ e $b=2$ la funzione risulta continua in 0 mentre per gli altri valori dei parametri a e b la funzione presenta una discontinuità di I^a specie (essendo limite destro e sinistro, finiti e distinti).
Certamente $h(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, vediamo se lo è in 0 calcolando il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x - 2x}{3x^2} = 0$$

quindi $\exists\, h'(0)=0$. Dunque h è derivabile in $\mathbb{R}$.

Es 5
La funzione $K(x)=\int_0^x (t^2-4)\log(1+t^2)\,dt$ è una funzione integrale del tipo $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ con f continua. Il teor. di Torricelli-Barrow afferma che $F'(x)=f(x)$. Pertanto abbiamo $K'(x)=(x^2-4)\log(1+x^2)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Essendo K derivabile è anche continua e in particolare lo è in $[-3,4]$, che è chiuso e limitato, pertanto per il teor. di Weierstrass $K(x)$ ha minimo assoluto in $[-3,4]$. Il teor. dei punti critici afferma che i punti di minimo (o di massimo) assoluti vanno cercati fra i punti critici, i punti singolari interni e gli estremi dell'intervallo.

ora

$$K'(x)=0 \iff (x^2-4)\log(1+x^2)=0 \iff (x=\pm 2 \vee x=0)$$

e non vi sono punti singolari poiché K è derivabile in $]-3,4[$.
Pertanto l'insieme in cui cercare i punti di minimo è costituito da tutti e soli i punti: $-3,-2,0,2,4$. Basta calcolare i valori in questi punti per stabilire quale di essi è punto di minimo e quel'è il valore minimo, cioè

$$\min_{x\in[-3,4]} \int_0^x (t^2-4)\log(1+t^2)\,dt = \min\{K(-3),K(-2),K(2),K(0),K(4)\}$$

Ora, integrando per parti si ha

$$\int (x^2-4)\log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{3}(x^3-12x)\log(1+x^2)-\frac{2}{9}(x^3-39x)-\frac{26}{3}\operatorname{arctg} x + c$$
$$= \mathbb{K}(x)+c$$

quindi $K(x)=\left[\mathbb{K}(t)\right]_0^x = \cancel{\text{essendo}}\ \mathbb{K}(x)$, essendo $\mathbb{K}(0)=0$ e pertanto il minimo cercato è il

$$\min\{\mathbb{K}(-3),\mathbb{K}(-2),\mathbb{K}(2),\mathbb{K}(0),\mathbb{K}(4)\} =$$

$$=\min\Big\{3\log 10-20+\frac{26}{3}\operatorname{arctg}3,\ \frac{16}{3}\log 5-\frac{140}{9}+\frac{26}{3}\operatorname{arctg}2,\ -\frac{16}{3}\log 5+\frac{140}{9}-\frac{26}{3}\operatorname{arctg}2,\ 0,$$
$$\frac{16}{3}\log 17+\frac{154}{9}-\frac{26}{3}\operatorname{arctg}4\Big\} = -\frac{16}{3}\log 5+\frac{140}{9}-\frac{26}{3}\operatorname{arctg}2 = K(2).$$

Dunque

$$\min\int_0^x (t^2-4)\log(1+t^2)\,dt = -\frac{16}{3}\log 5+\frac{140}{9}-\frac{26}{3}\operatorname{arctg}2$$
$$= K(2).$$

ES. 6 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, certamente è differenziabile in $(1,0)$.

$f_x = -2x + y^2$, $f_y = e^{y^2} 2y + 2yx$, risolviamo $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ 2y(e^{y^2} + x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 2x \\ 2y\left(e^{y^2} + \frac{y^2}{2}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 2x \\ 2y = 0 \end{cases} \quad O(0,0)$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ e^{y^2} + \frac{y^2}{2} = 0 \end{cases} \text{ mai xché } > 0.$$

Unico punto stazionario l'origine. Calcoliamo l'hessiano

$f_{xx} = -2$, $f_{xy} = 2y = f_{yx}$, $f_{yy} = 2e^{y^2}(2y^2+1) + 2x$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

dal test dell'hessiano segue che l'origine è punto di sella.