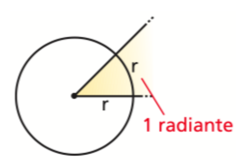
Funzioni goniometriche

Gradi e radianti

Nel sistema sessagesimale, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.
In alternativa, si usano i radianti.

DEFINIZIONE
Data una circonferenza, chiamiamo **radiante** l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio.



L'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad e l'angolo piatto misura π rad.

Date le misure di un angolo α in gradi e in radianti valgono le formule:

$$\boldsymbol{\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi} \quad \rightarrow \quad \alpha° = \alpha_{rad} \cdot \frac{180°}{\pi}, \quad \alpha_{rad} = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}.$$

In generale per passare da un sistema di misura ad un altro, si usa la proporzione

$$y : x = 360° : p$$

Dove

x : misura dell'angolo in radianti

y : misura dell'angolo in gradi

ESEMPI

Troviamo la misura in radianti di un angolo di 32° 15'

$$32°15' = 32{,}25° \quad \rightarrow \quad 32{,}25° : x = 360° : 2p$$

$$x = 32{,}25 \cdot \frac{2p}{360} \approx 0{,}56287$$

Troviamo la misura in gradi di un angolo di $\frac{p}{15}$

$$y : \frac{p}{15} = 360° : 2p \quad \rightarrow \quad y = \frac{360 \cdot \frac{p}{15}}{2p} = 12°$$

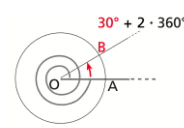
Angoli orientati

DEFINIZIONE

Un **angolo** è **orientato** quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione. Un angolo orientato è:

- **positivo** quando è descritto da una rotazione in senso antiorario;
- **negativo** quando la rotazione è in senso orario.

Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro. La scrittura $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, indica tutti gli angoli equivalenti all'angolo α.



Si chiama **circonferenza goniometrica** la circonferenza di centro l'origine O e raggio di lunghezza 1, cioè di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

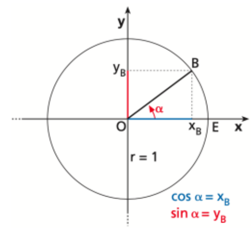
Usando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x.

Funzioni seno e coseno

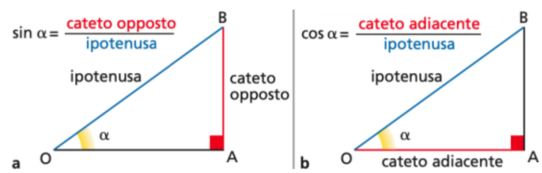
DEFINIZIONE

Consideriamo un angolo orientato α e il punto B della circonferenza goniometrica associato ad α. Definiamo **coseno** e **seno** dell'angolo α, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto B:

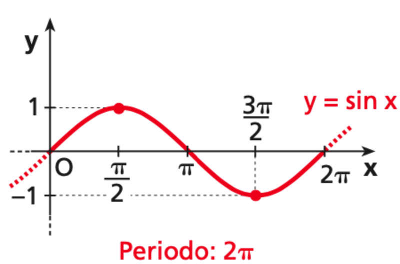
$$\cos\alpha = x_B, \qquad \sin\alpha = y_B.$$

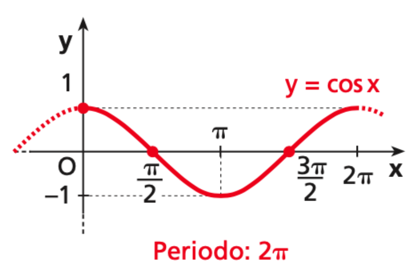


In un triangolo rettangolo, seno e coseno danno i rapporti tra la lunghezza dei cateti e dell'ipotenusa.



Funzioni seno e coseno





$y = \sin x$	$y = \cos x$
Dominio: $\mathbb{R}$.	Dominio: $\mathbb{R}$.
Insieme immagine: [−1; 1].	Insieme immagine: [−1; 1].
Periodo: 2π.	Periodo: 2π.
Funzione dispari.	Funzione pari.

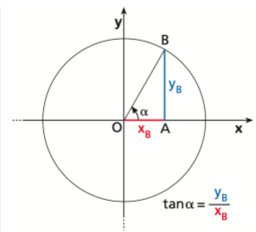
Vale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$ prima relazione fondamentale della goniometria

Tangente di un angolo

DEFINIZIONE

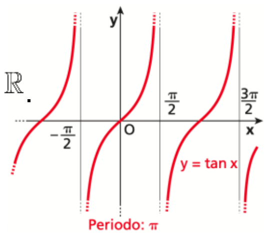
Consideriamo un angolo orientato α e il punto *B* della circonferenza goniometrica associato ad α. Definiamo **tangente** di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa del punto *B*:

$$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$



y = tan *x*

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ Insieme immagine: $\mathbb{R}$.
Periodo: $\boldsymbol{\pi}$. Funzione dispari.



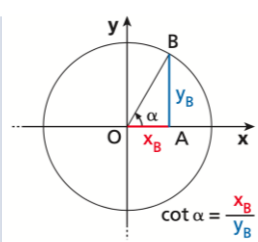
Vale $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$, con $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Cotangente

DEFINIZIONE

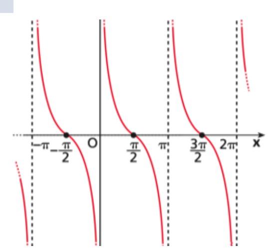
Consideriamo un angolo orientato α e il punto *B* della circonferenza goniometrica associato ad α. Definiamo **cotangente** di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto *B*:

$$\cot\alpha = \frac{x_B}{y_B}.$$



y = cot *x*

Dominio: $\mathbb{R} - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Insieme immagine: $\mathbb{R}$.
Periodo: $\boldsymbol{\pi}$. Funzione dispari.



Vale $\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$, con $\alpha \neq k\pi$.

Periodo delle funzioni.

Calcolare il periodo delle seguenti funzioni:

$$1)\ y = \sin 5x \quad 2)\ y = \cos 5x \quad 3)\ y = \tan 5x$$

Soluzione. le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ hanno un periodo di 2π, cioè si ripetono identiche a se stesse ogni 2π o $(360°)$; la funzione $\tan x$ ha invece un periodo di π. Il periodo delle funzioni seno e coseno è dato da $T = \frac{2\pi}{\omega}1$, mentre per la tangente è $\frac{\pi}{\omega}$, dove ω è il coefficiente a moltiplicare la variabile x. Le funzioni assegnate hanno un argomento pari a $5x$, per cui i rispettivi periodi sono

$$T_1 = \frac{2\pi}{5} \quad T_2 = \frac{2\pi}{5} \quad T_3 = \frac{\pi}{5}$$

Calcolare il periodo della seguente funzione:

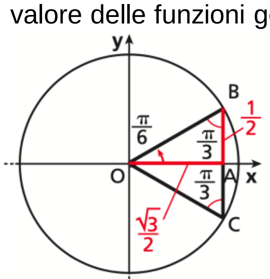
$$y = \sin\frac{3}{5}x + \sin\frac{2}{3}x$$

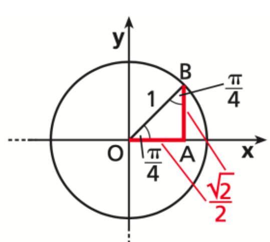
Soluzione. Questa è la somma di due funzioni goniometriche; il periodo comune sarà dato dal minimo comune multiplo tra i due singoli periodi, cioè

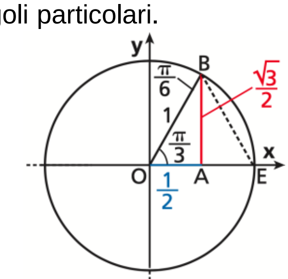
$$mcm\left(\frac{2\pi}{\frac{3}{5}}, \frac{2\pi}{\frac{2}{3}}\right) = mcm\left(\frac{10}{3}\pi, 3\pi\right) = mcm\left(\frac{10}{3}\pi, \frac{9}{3}\pi\right) = \frac{90}{3}\pi = 30\pi$$

Angoli particolari

Mediante le proprietà delle figure geometriche riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.



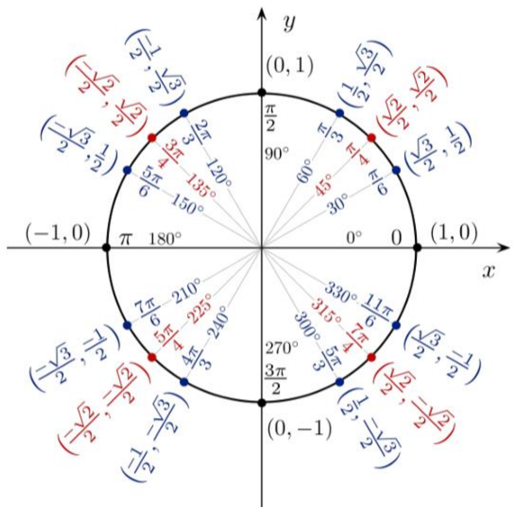




$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

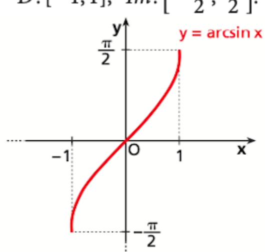
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



Funzioni goniometriche inverse

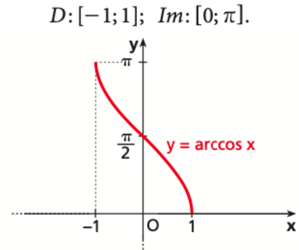
- **Arcoseno**: $y = \arcsin x$.

  $D: [-1; 1]$; $Im: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



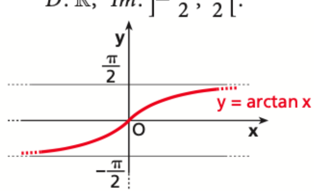
- **Arcocoseno**: $y = \arccos x$.

  $D: [-1; 1]$; $Im: [0; \pi]$.



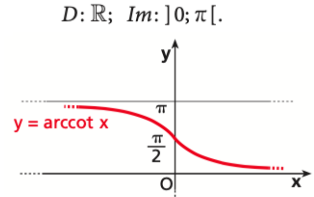
- **Arcotangente**: $y = \arctan x$.

  $D: \mathbb{R}$; $Im: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.



- **Arcocotangente**: $y = \operatorname{arccot} x$.

  $D: \mathbb{R}$; $Im:]0; \pi[$.



ESERCIZIO GUIDA Sapendo che $\sin\alpha = \frac{5}{7}$ e che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcoliamo il valore di $\tan\alpha$.

Utilizziamo $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, per determinare $\cos\alpha$:

$$\frac{25}{49} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{24}{49}.$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e per tali angoli il coseno è positivo, abbiamo $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Sfruttiamo ora $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, per determinare $\tan\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{7}\cdot\frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Formule di addizione e sottrazione

- **$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;**
- **$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;**
- **$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;**
- **$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.**

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \quad \text{con } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}, \quad \text{con } \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

ESEMPIO

Calcoliamo cos 75°.

Usiamo la formula di sottrazione del coseno su 75° = 120° − 45°.

$\cos 75° = \cos(120° - 45°) = \cos 120° \cos 45° + \sin 120° \sin 45° =$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

ESEMPI

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

$$\tan 105° = \tan(60° + 45°) = \frac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Calcoliamo il valore dell'espressione: $\cos(60° + a) - \cos(60° - a)$

$$\cos(60° + a) - \cos(60° - a) = \cos 60° \cos a - \sin 60° \sin a - (\cos 60° \cos a + \sin 60° \sin a)$$

$$= -2 \sin 60° \sin a = -\sqrt{3} \sin a$$

Formule di duplicazione

Funzione	Formula di duplicazione
seno	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
coseno	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$
tangente	$\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, con $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Formule di bisezione

Funzione	Formula di bisezione
seno	$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
coseno	$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
tangente	$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, con $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, con $\alpha\neq\pi+2k\pi$ $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, con $\alpha\neq\pi+k\pi$

Formule parametriche

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \text{con } \alpha\neq\pi+2k\pi.$$

Formule di prostaferesi

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

ESERCIZIO GUIDA Senza determinare il valore di α, calcoliamo $\sin 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$ sapendo che:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

  Determiniamo $\cos\alpha$ per mezzo della prima relazione fondamentale, osservando che $\cos\alpha$ deve essere negativo, poiché $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

  $$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

  Sostituendo i valori di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, otteniamo:

  $$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$

ESERCIZIO GUIDA Senza determinare il valore dell'angolo α, calcoliamo $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$, sapendo che $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Poiché $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $\cos\alpha$ deve essere negativo. Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ricaviamo il valore di $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Inoltre, essendo $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, si ha $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi$, quindi il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$ si trova nel secondo quadrante. Perciò $\sin\frac{\alpha}{2}$ deve essere positivo e $\cos\frac{\alpha}{2}$ negativo. Abbiamo:

- $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$

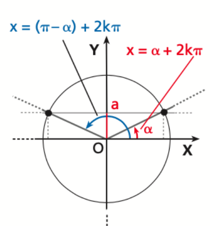
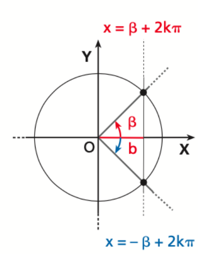
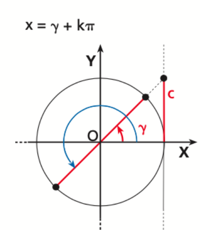
- $\sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{18}^{9}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$

- $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = -\frac{3}{2}$ oppure $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{8}{13}} = -\frac{3}{2}.$

Equazioni goniometriche

DEFINIZIONE

Un'**equazione goniometrica** contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

Equazioni goniometriche elementari		
$\sin x = a$ determinata se $-1 \le a \le 1$; impossibile se $a<-1 \vee a>1$	$\cos x = b$ determinata se $-1 \le b \le 1$; impossibile se $b<-1 \vee b>1$	$\tan x = c$ determinata $\forall c \in \mathbb{R}$
		

Equazioni riconducibili a elementari

Per risolvere equazioni con più funzioni goniometriche si deve:

- esprimere le diverse funzioni mediante una sola di esse, utilizzando eventualmente le formule goniometriche;
- risolvere l'equazione considerando tale funzione come incognita;
- risolvere le equazioni elementari che si ottengono.

ESEMPIO

Risolviamo $2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$.

Scriviamo tutto in funzione di $\cos x$, usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 4 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$.

Risolviamo l'equazione rispetto a $\cos x$:

$$\cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 2.$$

Se $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Se $\cos x = 2$, nessuna soluzione.

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$$

Si dividono entrambi i membri per

$$\cos x \neq 0$$

Otteniamo $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$

Da cui $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Cioè $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$$2\cos^2 x = 3 - 3\sin x$$

Applichiamo la prima relazione fondamentale $2\left(1 - \sin^2 x\right) = 3 - 3\sin x$

Svolgiamo i calcoli $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

Otteniamo un'equazione di secondo grado in $\sin x$ $\quad \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Siamo così ricondotti alla risoluzione di due equazioni elementari: $\sin x = 1 \quad \vee \quad \sin x = \frac{1}{2}$

Dalla prima ricaviamo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Dalla seconda ricaviamo $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

Equazioni lineari
in seno e coseno

DEFINIZIONE

Un'**equazione lineare in sin *x* e cos *x*** si può ricondurre alla forma:

$$a \sin x + b \cos x + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \ , a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Metodo di risoluzione grafico

- Si eseguono le sostituzioni sin *x* = *Y* e cos *x* = *X*.
- Si risolve il sistema

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 & \text{——— equazione di una retta} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{——— equazione della circonferenza con centro l'origine e raggio 1} \end{cases}$$

Le soluzioni sono i punti di intersezione tra retta e circonferenza.

Metodo di risoluzione dell'angolo aggiunto

- Si sostituisce *a* sin *x* + *b* cos *x* tramite la formula

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \alpha), \text{ con } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \tan \alpha = \frac{b}{a}.$$

- Si risolve l'equazione elementare

$$r \sin(x + \alpha) + c = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(x + \alpha) = -\frac{c}{r}$$

Le equazioni lineari

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione lineare $\sin x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0$ con il metodo del sistema

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} \sin x = -\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \\ \left(-\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0 \\ 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo che $\cos x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} =$

$$-1 \quad \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = p + 2kp$$

$$-\frac{1}{2} \quad \begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{4}{3}p + 2kp$$

ESEMPIO

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} = 0$$

$a = 1$ e $b = \sqrt{3}$ quindi $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$

Dividendo entrambi i membri per 2 otteniamo: $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Abbiamo perciò $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cioè $\alpha = \frac{\pi}{3}$

L'equazione è quindi equivalente all'equazione elementare:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Che ha soluzioni $x = 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

DEFINIZIONE

Un'**equazione omogenea di secondo grado in sin *x* e cos *x*** si può scrivere nella forma:

$$\boldsymbol{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0}.$$

Metodo risolutivo

- Se $a = 0$: $b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x(b \sin x + c \cos x) = 0$.
- Se $c = 0$: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0 \rightarrow \sin x(a \sin x + b \cos x) = 0$.
- Se $a \neq 0$ e $c \neq 0$: si divide per $\cos^2 x$ (diverso da 0, poiché $a \neq 0$)

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \rightarrow a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$.

Un'equazione di tipo $\boldsymbol{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d}$, con $d \neq 0$, è **riconducibile a omogenea di secondo grado in seno e coseno**:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

ESEMPIO

$$\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

Raccogliamo: $\cos x\left(\sin x - \cos x\right) = 0 \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$

$$\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{p}{2} + k\,p$$

$$\cos x = \sin x \quad \rightarrow \quad x = \frac{p}{4} + k\,p$$

ESEMPIO

$$\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

Poiché $a \neq 0 \wedge c \neq 0$, dividiamo entrambi i membri dell'equazione per $\cos^2 x = 0$
e otteniamo

$$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$$

Applichiamo la formula risolutiva $\tan x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Dunque $\tan x = 1$ che fornisce le soluzioni $x = 45° + k\,180°$

e $\tan x = 3$ che fornisce le soluzioni $x = 71°33'54'' + k\,180°$

L'equazione $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$

si trasforma in una omogenea moltiplicando *d* per 1,

cioè per $\sin^2 x + \cos^2 x$ (prima identità goniometrica fondamentale)

ESEMPIO

$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$

Moltiplichiamo il secondo membro per l'espressione $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

Raccogliamo $\sqrt{3}\cos x$ $\quad \sqrt{3}\cos x\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0$

Dall'equazione $\cos x = 0$ ricaviamo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

e da $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ ricaviamo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Disequazioni goniometriche

DEFINIZIONE

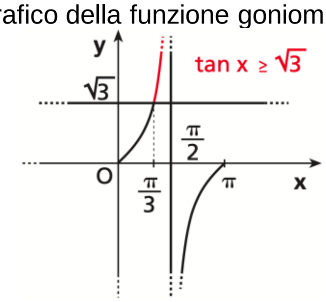
Una **disequazione goniometrica** contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

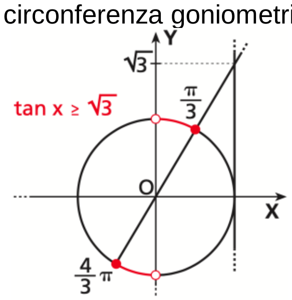
Le disequazioni goniometriche elementari sono del tipo:

sin *x* > ***a***, **cos *x*** > ***b***, **tan *x*** > ***c***, o analoghe con ≥, <, ≤.

Si risolvono con:

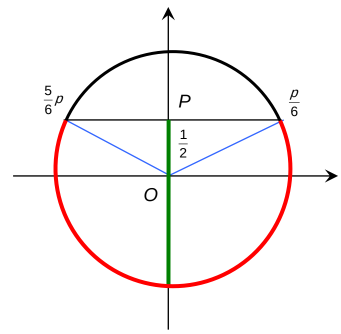
il grafico della funzione goniometrica o la circonferenza goniometrica.





ESEMPIO

Ricaviamo la disequazione $\sin x < \frac{1}{2}$



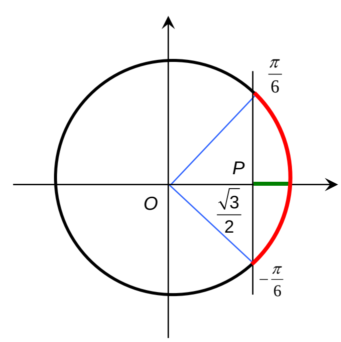
Tracciamo la circonferenza goniometrica, rappresentiamo sull'asse delle *y* il punto *P* di ordinata $\frac{1}{2}$ e individuiamo gli angoli corrispondenti a tale valore del seno.

I punti dell'asse *y* di ordinata minore di $\frac{1}{2}$ sono quelli appartenenti al segmento in colore verde; allora gli angoli il cui seno è minore di $\frac{1}{2}$ sono quelli che appartengono al corrispondente arco evidenziato in rosso.

Tenendo conto del periodo avremo: $2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

ESEMPIO

$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



Ripetiamo le stesse operazioni individuate nell'esercizio prevedente e otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

Le soluzioni della disequazione corrispondono all'intervallo

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

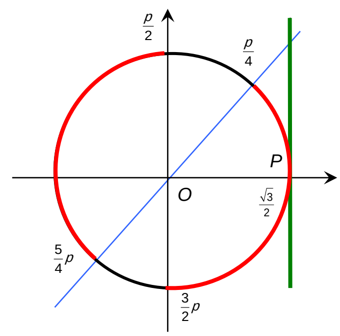
ESEMPIO

$\tan x < 1$

Ripetiamo ancora le stesse operazioni e otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

La disequazione è verificata nel seguente intervallo:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + k\pi$$



Disequazioni riconducibili a quelle elementari

Per risolvere una disequazione goniometrica di tipo più generale, siamo spesso ricondotti a risolvere una o più disequazioni elementari, come accade per le equazioni.

ESEMPIO

$2\sin^2 x - \sin x - 1 \geq 0$

Scriviamo l'equazione di secondo grado in sin *x* associata alla disequazione.

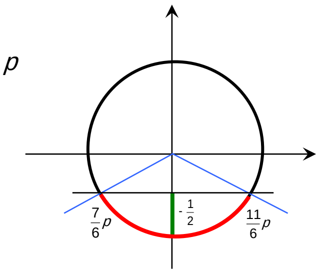
$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

che ammette soluzioni $\sin x = 1 \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2}$

La disequazione è verificata se $\sin x \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x \geq 1$

Dobbiamo a questo punto risolvere due disequazioni elementari.

$\sin x \leq -\frac{1}{2}$ verificata se $\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$



$\sin x \geq 1$ verificata se $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

La disequazione è quindi verificata se $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

Disequazioni lineari

Per risolvere una disequazione lineare si possono usare gli stessi metodi utilizzati per la risoluzione delle analoghe equazioni.

In particolare il metodo grafico risulta spesso il più rapido e immediato.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\sin x - \cos x + 1 > 0$

Il sistema è equivalente a $\begin{cases} \sin x - \cos x + 1 > 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

Operiamo le sostituzioni $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ e otteniamo

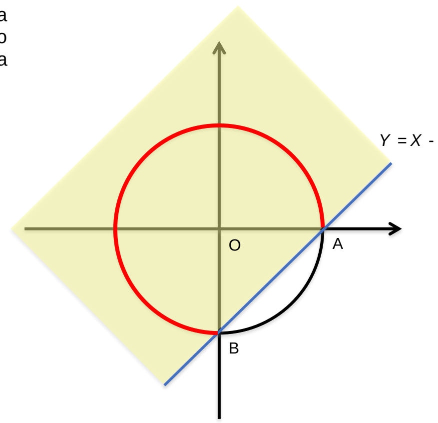
$$\begin{cases} Y - X + 1 > 0 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} Y > X - 1 \\ Y^2 + X^2 = 1 \end{cases}$$

Nel piano cartesiano la seconda relazione rappresenta una circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario; la prima rappresenta invece un semipiano la cui frontiera è la retta di equazione

$$Y = X - 1$$

L'intersezione tra tale semipiano e la circonferenza è rappresentata dall'arco maggiore *AB*; gli angoli con vertice *O* che insistono su tale arco sono tutti, a meno del periodo, soluzioni della disequazione data:

$$2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$



Disequazioni frazionarie e scomponibili

Per risolvere una disequazione goniometrica frazionaria o scomponibile nel prodotto di due o più fattori si usano gli stessi metodi applicati per le analoghe disequazioni algebriche. Per rappresentare graficamente il segno dei fattori è conveniente però usare tabelle circolari, anziché lineari.

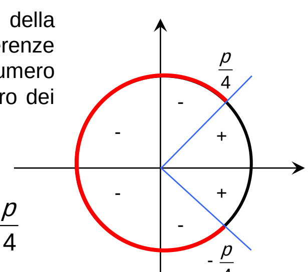
ESEMPIO

$$\frac{2\cos x - \sqrt{2}}{\sin x} \geq 0$$

Studiamo il segno di ogni termine della frazione riportando su due circonferenze concentriche i risultati ottenuti. Il numero delle circonferenze è pari al numero dei fattori.

$$2\cos x - \sqrt{2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

a meno del periodo



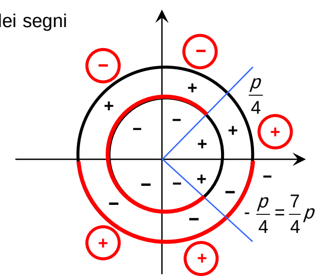
$\sin x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 \leq x \leq p$

a meno del periodo

Dominio: dominatore ≠ 0

Calcoliamo, al variare di *x*, il segno della frazione con la regola dei segni (indicato in figura in rosso) e diamo la soluzione:

$$2k\,p < x £ \frac{p}{4} \quad Ú \quad p + 2k\,p < x £ \frac{7}{4}p + 2k\,p$$



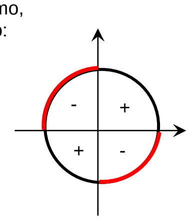
ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\tan^2 x - \tan x < 0$

Scomponiamo l'espressione a primo membro e studiamo, nel primo angolo giro, il segno di ogni fattore così ottenuto:

$$\tan x\,(\tan x - 1) < 0$$

$$\tan x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \frac{p}{2} \quad \vee \quad p < x < \frac{3}{2}p$$

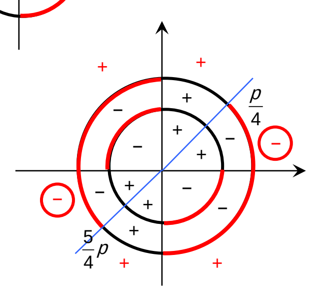


$$\tan x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \tan x > 1 \quad \rightarrow$$

$$\frac{p}{4} < x < \frac{p}{2} \quad \vee \quad \frac{5}{4}p < x < \frac{3}{2}p$$

Tenendo conto del periodo della tangente avremo per soluzione:

$$k\,p < x < \frac{p}{4} + k\,p$$



I sistemi di disequazioni

Anche per risolvere un sistema di disequazioni utilizziamo lo stesso metodo e riportiamo le soluzioni di tutte le disequazione su una serie di circonferenze concentriche (una per ciascuna disequazione).

ESEMPIO

$$\begin{cases} \sin x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) > 0 \\ 2\cos^2 x < 1 \end{cases}$$

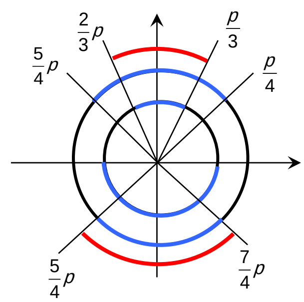
Nell'intervallo $[0,\ 2\pi]$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \sin x < 0 \quad \vee \quad \sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Dalla sua osservazione possiamo dedurre che il sistema è verificato se

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi \quad \vee \quad \frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$



ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 \leq 0$.

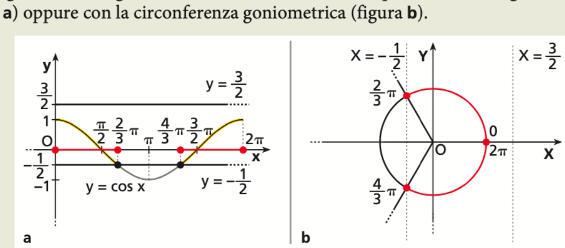
Consideriamo $\cos x$ come incognita e risolviamo dapprima l'equazione associata.

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La disequazione è soddisfatta per i valori interni all'intervallo delle soluzioni, cioè:

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{3}{2}.$$

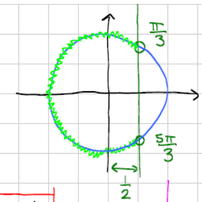
Rappresentiamo graficamente gli intervalli soluzione della disequazione con il grafico della funzione $y = \cos x$ (figura **a**) oppure con la circonferenza goniometrica (figura **b**).



Le soluzioni della disequazione sono:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi.$$

$\boxed{\cos x \leq \frac{1}{2}}$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

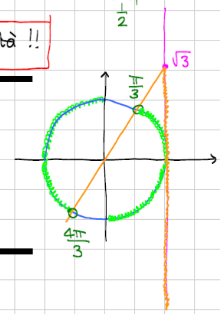


Cerco i p.ti della circ. trigon. con ASCISSA $\leq \frac{1}{2}$

Soluzione: $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

Occhio!! $\left[\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$ è un'assurdità!!

$\tan x < \sqrt{3}$ $\quad$ in $[0, 2\pi]$



soluzione: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup$

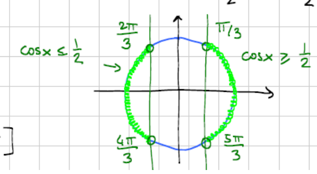
$\cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$4\cos^2 x \geq 1$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

$\cos^2 x \geq \frac{1}{4}$ $\qquad t^2 \geq \frac{1}{4}$ $\quad$ VALORI ESTERNI $\quad t \leq -\frac{1}{2}$ e $t \geq \frac{1}{2}$

$\cos x \geq \frac{1}{2}$

$\cos x \leq -\frac{1}{2}$



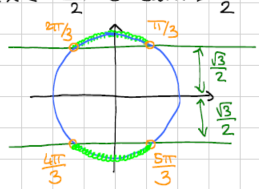
$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

$4\sin^2 x > 3$ $\qquad x \in [0, 2\pi]$

$\sin^2 x > \frac{3}{4}$ $\qquad$ VALORI ESTERNI

$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Guardo il cerchio e cerco i p.ti con coord. y maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure minore di $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



In $[0, 2\pi]$ la sol. è $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

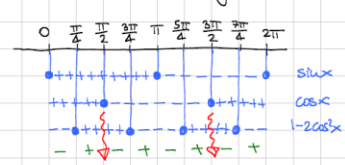
$\tan x \geq \sin(2x)$ $\qquad$ Uso formule:

$\frac{\sin x}{\cos x} \geq 2\sin x \cos x$ $\qquad$ VIETATO MOLTIPLICARE PER $\cos x$

Porto tutto a sx: $\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x \geq 0$

$\frac{\sin x - 2\sin x \cos^2 x}{\cos x} \geq 0 \qquad \frac{\sin x\,(1 - 2\cos^2 x)}{\cos x} \geq 0$

Risolvo come prodotto / quoziente, studiando il segno dei 3 termini in $[0, 2\pi]$



$1 - 2\cos^2 x > 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x < 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x < \frac{1}{2}$.

Valori interni

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Guardo il cerchio!

A noi interessava ≥ 0:

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup$

$\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

. Risolvere la seguente equazione

$$2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=0$$

Soluzione. Osservando i coefficienti dei quattro termini, si può notare che è possibile effettuare un raccoglimento parziale

$$2\sin x\,(\cos x-\sin x)-\sqrt{3}\,(\cos x-\sin x)=0$$

da cui

$$(\cos x-\sin x)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$$

Applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto e consideriamo il primo fattore

$$\cos x-\sin x=0\quad \sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=0\quad \sqrt{2}\sin(45°-x)=0$$

pertanto

$$\sin(45°-x)=0\quad 45°-x=k\pi\quad x=45°+k\pi$$

consideriamo ora il secondo fattore

$$\sin x=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\quad x=60°+k360°\quad x=120°+k360°$$

Risolvere la seguente equazione

$$\cos(30°+x)+\cos(30°-x)=\frac{3}{2}$$

Soluzione. Applichiamo le formule di addizione e sottrazione

$$\cos 30°\cos x\cancel{-\sin 30°\sin x}+\cos 30°\cos x\cancel{+\sin 30°\sin x}=\frac{3}{2}$$

da cui

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\cos x=\frac{3}{2}$$

pertanto

$$\cos x=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\quad x=30°+k360°\quad x=-30°\ (o\ 330°)+k360°$$

Risolvere la seguente equazione

$$\cos 2x+\sin^2 x=0$$

Soluzione. Riscriviamo applicando la formula di duplicazione per avere argomenti uguali

$$1-2\sin^2 x+\sin^2 x=0$$

da cui

$$\sin^2 x=1\qquad \sin x=\pm 1$$

pertanto

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Risolvere la seguente equazione

$$2\cos^2\frac{x}{2}+\cos x=1$$

Soluzione. Applichiamo la formula di bisezione

$$2\frac{\cos x+1}{2}+\cos x=1$$

cioè

$$2\cos x=0$$

risolvendo

$$\cos x=0\quad x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

. Risolvi la seguente disequazione fratta

$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} \geq 0$$

Soluzione. Lo studio del segno di una frazione richiede lo studio del numeratore e del denominatore per poi ottenere il segno della frazione stessa.

Numeratore

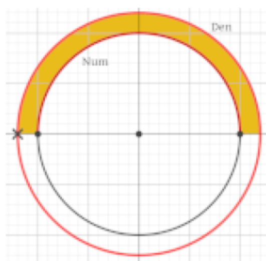
$$\sin x \geq 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) + 2k\pi$$

Denominatore

$$\cos x > -1 \quad 0 < x < 2k\pi \quad x \neq \pi + 2k\pi$$

Il segno della frazione sarà

$$0 \leq x < \pi$$



Risolvi la seguente disequazione fratta

$$\frac{3}{2\cos x} - 2\cos x \geq 0$$

con $0 < x < 2\pi$.

Soluzione. Lo studio del segno di una frazione richiede lo studio del numeratore e del denominatore per poi ottenere il segno della frazione stessa. Svolgiamo prima il calcolo per ottenere un'unica frazione

$$\frac{3 - 4\cos^2 x}{2\cos x} \geq 0$$

Numeratore

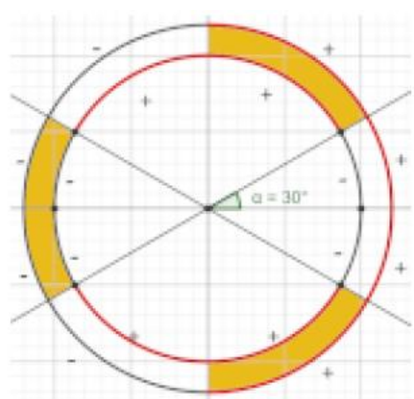
$$\cos^2 x \leq \frac{3}{4} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Denominatore

$$\cos x > 0 \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

Il segno della frazione sarà

$$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \frac{5}{6}\pi \quad \leq x < \frac{7}{6}\pi \quad \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{11}{6}\pi$$



Risolvi la seguente disequazione fratta

$$5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x > \frac{5}{2}$$

con $0 < x < 2\pi$.

Soluzione. La disequazione è di secondo grado rispetto a $\sin x$. Applicando la proprietà fondamentale si può riscrivere

$$5\sin^2 x + \sin x + 1 - \sin^2 x - \frac{5}{2} > 0$$

ossia sommando i termini simili e moltiplicando tutto per 2

$$8\sin^2 x + 2\sin x - 3 > 0$$

Applichiamo la formula risolutiva ridotta dell'equazione associata

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{8} = \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

le soluzioni in $\sin x$ saranno contenute negli intervalli esterni a queste radici

$$\sin x < -\ \frac{3}{4} \qquad \sin x > \frac{1}{2}$$

i valori di x saranno

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \quad \pi + \arcsin\frac{3}{4} < x < 2\pi - \arcsin\frac{3}{4}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Le funzioni **arcocoseno**, $\boxed{\arccos x}$, **arcoseno**, $\boxed{\arcsin x}$, e **arcotangente**, $\boxed{\arctan x}$, sono definite rispettivamente come le inverse delle funzioni $\cos x$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$, $\sin x$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\tan x$ ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Osservato che $\cos([0,\pi]) = \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ e $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, si ha

- $x \in [-1, 1], \quad \arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in [0, \pi], \quad \cos y = x$
- $x \in [-1, 1], \quad \arcsin x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \sin y = x$
- $x \in \mathbb{R}, \quad \arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \tan y = x$

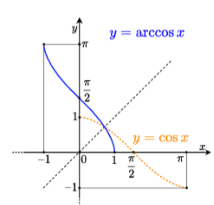
Ad esempio

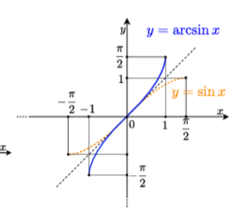
- Abbiamo che $\boxed{\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}}$ dato che $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ e $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- Si ha $\boxed{\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}}$ essendo $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Risulta $\boxed{\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}}$ dato che $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

Abbiamo

- $\mathrm{Dom}(\arccos) = \cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$;
- $\mathrm{Dom}(\arcsin) = \sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ e $\mathrm{Im}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- $\mathrm{Dom}(\arctan) = \tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

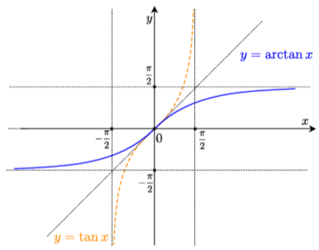
Il grafico delle funzioni $\arccos x$ e $\arcsin x$ risulta rispettivamente il simmetrico rispetto alla bisettrice $y = x$ delle funzioni $\cos x$, ristretta a $[0, \pi]$, e $\sin x$, ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



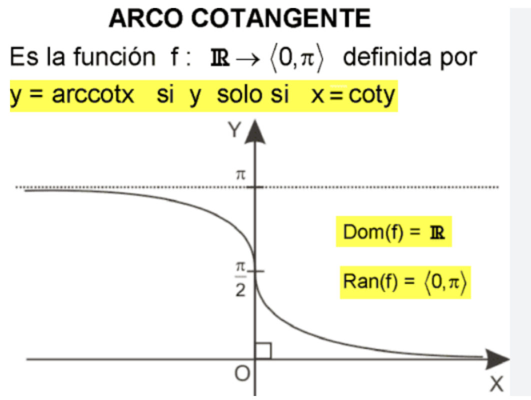


NOTA: la funzione $\arcsin x$ è dispari e, dall'identità degli angoli complementari, si ha $\boxed{\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}}$ per ogni $x \in [-1, 1]$.

Il grafico della funzione arcontangente risulta invece il simmetrico alla bisettrice $y = x$ del grafico della funzione $\tan x$ ristretta a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



NOTA: la funzione $\arctan x$ è dispari, strettamente crescente e assume valori strettamente compresi tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.



BIBLIOGRAFIA - SITOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi, Trifone *La matematica del triennio* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- *Contenuti digitali Casa editrice* Atlas
- Massimiliano Virdis *Equazioni e disequazioni goniometriche*
- http://eurekamat.weebly.com/