Esponenziali

Le potenze con $a \in \mathbb{R}$ ed esponente razionale		
a^x se...	**...è definita per...**	**Esempio**
$x > 0$	$a \geq 0$	$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$; $0^{\frac{1}{2}} = 0$.
$x = 0$	$a \neq 0$	$a^0 = 1$; 0^0 non si definisce.
$x < 0$	$a > 0$	$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad 2^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Notiamo che **la base delle potenze non può essere negativa**.

Potenze con esponente reale

ESEMPIO

Definiamo $3^{\sqrt{2}}$ a partire dalle potenze con esponente razionale.
$\sqrt{2}$, come ogni numero irrazionale, può essere approssimato per eccesso o per difetto da due successioni di numeri decimali finiti.

1,4 1,41 1,414 1,4142 ... per difetto;

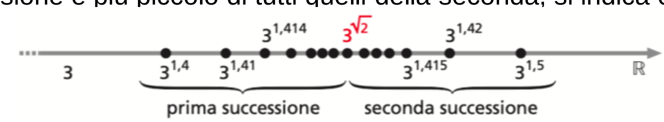
1,5 1,42 1,415 1,4143 ... per eccesso.

Consideriamo ora le seguenti successioni di potenze con base 3.

$3^{1,4}$ $3^{1,41}$ $3^{1,414}$ $3^{1,4142}$ ...

$3^{1,5}$ $3^{1,42}$ $3^{1,415}$ $3^{1,4143}$ ...

Esiste un unico numero reale più grande di tutti gli elementi della prima successione e più piccolo di tutti quelli della seconda, si indica con $3^{\sqrt{2}}$.



Potenze con esponente reale

DEFINIZIONE

La **potenza a^x con esponente reale $x > 0$** di un numero reale a tale che $a > 0$ e $a \neq 1$, è l'*unico* numero reale:

- maggiore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per difetto se $a > 1$ o per eccesso se $0 < a < 1$;
- minore di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per eccesso se $a > 1$ o per difetto se $0 < a < 1$.

$$2^{\sqrt{3}} \times 2^{3\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$$

$$\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{5}} = 7^{\sqrt{10}}$$

Si definiscono poi:

- $\mathbf{1}^x = \mathbf{1}$ per qualunque numero reale x;
- $\mathbf{0}^x = \mathbf{0}$ per qualunque numero reale x positivo;
- $\boldsymbol{a}^0 = \mathbf{1}$ per qualunque numero reale a positivo;
- $a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$ per qualunque coppia di numeri reali positivi a e r.

Non sono definite le potenze con base un numero negativo.

Proprietà delle potenze

TEOREMA

All'aumentare dell'esponente reale x, la potenza a^x:

- aumenta (funzione crescente) se $a > 1$: $\boldsymbol{x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}}$;
- diminuisce (funzione decrescente) se $0 < a < 1$: $\boldsymbol{x_1 < x_2 \leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}}$.

ESEMPIO

$2^5 > 2^\pi$ perché la base 2 è maggiore di 1.

Anche per le potenze con esponente reale valgono le proprietà delle potenze con esponente razionale. Cioè $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$ e $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$:

- prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$;
- potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
- prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$;
- quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$.

Funzione esponenziale

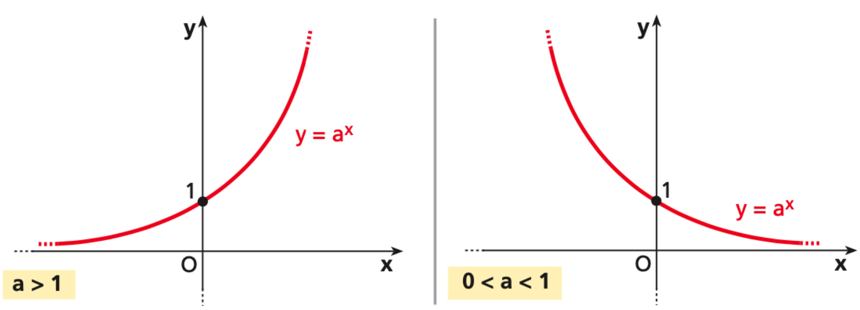
DEFINIZIONE

Si chiama **funzione esponenziale** ogni funzione del tipo:

$y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

Se $a = 1$, otteniamo la funzione costante $y = 1$ perché $1^x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

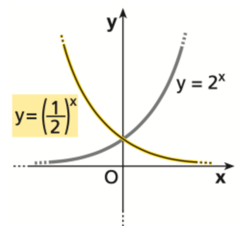
Se $a \neq 1$, distinguiamo i due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.



Funzione esponenziale: proprietà

Proprietà di a^x:
- dominio: $\mathbb{R}$;
- insieme immagine: $\mathbb{R}^+$;
- intersezione con gli assi: (0; 1);
- iniettiva e biunivoca (se il codominio è $\mathbb{R}^+$);
- crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$;
- asintoto orizzontale $y = 0$ (la funzione si avvicina sempre più a 0).

Inoltre, per ogni base $a \neq 1$, il grafico della funzione esponenziale $y = a^x$ è il simmetrico rispetto all'asse y del grafico di $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.



Equazioni esponenziali

DEFINIZIONE
Un'**equazione esponenziale** contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Consideriamo l'equazione esponenziale $\boldsymbol{a^x = b}$, con $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{a \neq 1}$.
- **Se $b \leq 0$**, l'equazione è *impossibile* perché a^x è sempre positivo.
- **Se $b > 0$**, l'equazione è ha sempre *una e una sola soluzione* perché $y = a^x$ è biunivoca.

È possibile risolvere l'equazione in modo immediato, se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base.

ESEMPIO
Risolviamo $25^x = 125$.
$25^x = 125 \rightarrow (5^2)^x = 5^3 \rightarrow 5^{2x} = 5^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$.

$$2^x = 32$$
$$2^x = 2^5$$
$$x = 5$$

$$2^{x+4} = 34 - 2^x$$
$$2^x \times 2^4 = 34 - 2^x$$
$$2^x \times 2^4 + 2^x = 34$$
$$2^x \times (2^4 + 1) = 34$$
$$2^x \times 17 = 34$$
$$2^x = 2$$
$$x = 1$$

Esempi

$6^x = 36 \to 6^x = 6^2 \to x = 2$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \to 3^{-x} = 3^2 \to x = -2$

$(2018)^x = 1 \to x = 0$

$10^x = -10 \to impossibile$

$e^x = 0 \to impossibile$

$4^{2-x} \cdot 2^{x+1} = 16 \to$ *applicando le proprietà delle potenze*
$2^{4-2x+x+1} = 2^4 \to 2^{5-x} = 2^4 \to x = 1$

$2^{1-x} + 2^{x+1} = 4 \to \frac{2}{2^x} + 2^x \cdot 2 = 4$

si pone y=2^x con y variabile ausiliaria e si ottiene

$\frac{2}{y} + 2y - 4 = 0 \to \frac{2 + 2y^2 - 4y}{y} = 0 \to 2y^2 - 4y + 2 = 0 \to 2(y-1)^2 = 0 \to y = 1$

$y \neq 0 \to 2^x \neq 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$

sostituendo si ottiene la soluzione dell'equazione

$2^x = 1 \to x = 0$

Disequazioni esponenziali

DEFINIZIONE
Una **disequazione esponenziale** contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

ESEMPIO
Risolviamo la disequazione $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4} \to \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Poiché le potenze hanno **base minore di 1**, dalla disuguaglianza precedente tra le potenze otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti di verso contrario:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \to 3x < 2 \to x < \frac{2}{3}.$$

Per risolvere la disequazione $a^x > a^k$, $k>0$:

- se **$0 < a < 1$** basta risolvere quella di verso opposto tra gli esponenti: $a^x > a^k \quad \rightarrow \quad x < k$
- se **$a > 1$** basta risolvere quella dello stesso verso tra gli esponenti: $a^x > a^k \quad \rightarrow \quad x > k$

$$2^x > 16 \quad \rightarrow \quad 2^x > 2^4 \quad \rightarrow \quad x > 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \rightarrow \quad x < -2$$

$$3^{x+2} + 3^{x-1} \geq 28$$

$$3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} \geq 28$$

$$3^x \left(9 + \frac{1}{3}\right) \geq 28$$

$$3^x \cdot \frac{28}{3} \geq 28$$

$$3^x \geq 3$$

$$x \geq 1$$

ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione $6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15$.

$$6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15 \underset{\substack{\text{seconda proprietà}\\ \text{delle potenze}\\ a^x : a^y = a^{x-y}}}{\rightarrow} 6 \cdot 3^x - \frac{9}{3^x} = 15 \underset{\text{sostituiamo } z = 3^x}{\rightarrow} \overset{2}{\cancel{6}}\, z - \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{z} = \overset{5}{\cancel{15}} \underset{\substack{\text{riduciamo allo stesso}\\ \text{denominatore}}}{\rightarrow} \frac{2z^2 - 3 - 5z}{z} = 0 \underset{z \neq 0}{\rightarrow}$$

$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = -\frac{1}{2} \vee z_2 = 3$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 3^x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{impossibile}$$

$$z_2 = 3 \quad \rightarrow \quad 3^x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

L'equazione data ha per soluzione $x = 1$.

ESERCIZIO GUIDA Risolviamo le seguenti disequazioni: **a.** $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; **b.** $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$

$5^{\frac{x}{3}} > \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{250}_{\,125}}$ dividiamo entrambi i membri per 250

$5^{\frac{x}{3}} > 5^{-3}$ la base è 5 > 1

$\frac{x}{3} > -3$

$x > -9$

b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$ scriviamo $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ come potenze di $\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^4$ la base è $\frac{1}{3} < 1$

$3x < 4$

$x < \frac{4}{3}$

Logaritmi

Definizione di logaritmo

DEFINIZIONE

Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, chiamiamo **logaritmo in base *a* di *b*** l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b.$$

$\log_5 125 = 3$ **infatti** $5^3 = 125$

$\log_2 1 = 0$ $\quad 5^{\log_5 3} = 3$ $\quad \log_5 5 = 1$

Se $\log_2 b = 4 \Rightarrow b = 2^4$ cioè $b = 16$

Se $\log_a 25 = 2 \Rightarrow a^2 = 25$ cioè $a = 5$

Il numero b viene detto **argomento** del logaritmo.

Dalla definizione, supponendo a, $b > 0$ e $a \neq 1$, otteniamo:

- $\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$;
- $\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$;
- $a^{\log_a b} = b$, perché $\log_a b$ è l'esponente a cui elevare a per ottenere b.

TEOREMA

Se due numeri positivi sono uguali, anche i loro logaritmi, rispetto a una stessa base, sono uguali e viceversa:

$$x = y \leftrightarrow \log_a x = \log_a y.$$

TEOREMA

All'aumentare dell'argomento b (reale positivo), il logaritmo $\log_a b$:

- aumenta se $a > 1$: $b_1 < b_2 \leftrightarrow \log_a b_1 < \log_a b_2$;
- diminuisce se $0 < a < 1$: $b_1 < b_2 \leftrightarrow \log_a b_1 > \log_a b_2$.

ESEMPIO

$\log_{10} 5 > \log_{10} 2$, perché la base 10 è maggiore di 1;

$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 2$, perché la base $\frac{1}{2}$ è minore di 1.

TEOREMA

Il **logaritmo del prodotto** di due numeri positivi è uguale alla *somma* dei logaritmi dei due fattori:

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, con $b > 0$, $c > 0$.

Il **logaritmo del quoziente** di due numeri positivi è uguale alla *differenza* fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, con $b > 0, c > 0$.

Il **logaritmo della potenza** di un numero positivo elevato a un esponente reale è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero positivo: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, con $b > 0$, $n \in \mathbb{R}$.

$$\log_a (7 \times 3) = \log_a 7 + \log_a 3$$

$$\log_3 5 + \log_3 8 = \log_3 40$$

$$\log_a \frac{2}{7} = \log_a 2 - \log_a 7$$

$$\log_3 24 - \log_3 6 = \log_3 \frac{24}{6} = \log_3 4$$

$$\log_5 \frac{1}{5} = -\log_5 5 = -1$$

$$\log_2 3^4 = 4 \log_2 3$$

$$4 \log_2 3 = \log_2 81$$

ESERCIZIO GUIDA Applichiamo le proprietà dei logaritmi per trasformare in un unico logaritmo l'espressione

$2\log_5 10 + \log_5 25 - \frac{1}{3}\log_5 64.$

$2\log_5 10 + \log_5 25 - \frac{1}{3} \cdot \log_5 64 =$ logaritmo di una potenza

$\log_5 10^2 + \log_5 25 - \log_5 \sqrt[3]{64} =$ logaritmo di un prodotto

$\log_5 100 \cdot 25 - \log_5 4 =$ logaritmo di un quoziente

$\log_5 \frac{2500}{4} = \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$

Formula del cambiamento di base

Le calcolatrici calcolano i logaritmi in base 10 e in base e = 2,71828....
Per distinguere i logaritmi nelle due basi si usano le seguenti notazioni:

- **log *x*** indica il **logaritmo decimale**, $\log_{10} x$;
- **ln *x*** indica il **logaritmo naturale** o **neperiano**, $\log_e x$.

Per scrivere $\log_a b$ mediante logaritmi in base $c > 0$ si utilizza la **formula del cambiamento di base**.

TEOREMA

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \text{con } a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\log_3 14$ utilizzando i logaritmi

$$x = \log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3} \simeq \frac{1,146128}{0,477121} \simeq 2,402.$$

$$\log_3 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 3} = \frac{4}{\log_2 3}$$

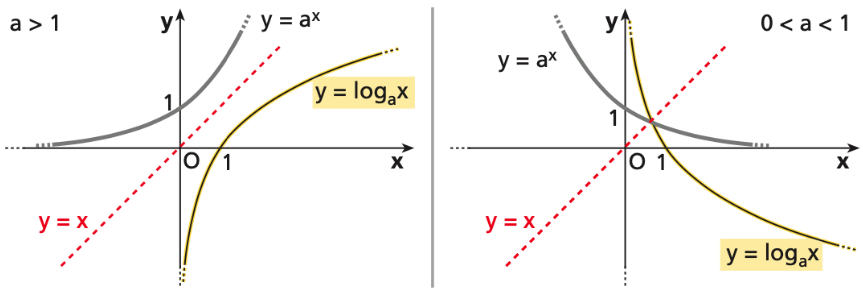
Funzione logaritmica

DEFINIZIONE

Una **funzione logaritmica** è del tipo:

$y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

L'argomento del logaritmo è positivo: il dominio della funzione è $\mathbb{R}^+$.
La funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale.



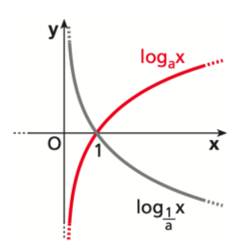
Funzione logaritmica: proprietà

Proprietà di $\log_a x$:
- dominio: $\mathbb{R}^+$
- insieme immagine: $\mathbb{R}$
- intersezione con gli assi: (1; 0);
- biunivoca;
- crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$;
- asintoto verticale $x = 0$ (la funzione si avvicina sempre più a $x = 0$).

Per $a > 0$ e $a \neq 1$ i grafici di $y = \log_a x$ e $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ sono i simmetrici l'uno dell'altro rispetto all'asse x.

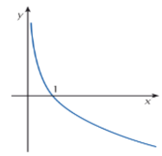
Infatti, per la formula del cambiamento di base, si ha

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x.$$



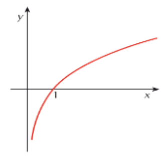
Caratteristiche della funzione logaritmica $y = \log_a x$:

- è definita per $x > 0$ qualunque sia la base $a > 0$ (con $a \neq 1$);
- tutte le curve logaritmiche passano per il punto di coordinate (1; 0);
- quando $0 < a < 1$ la funzione è:
  - decrescente;
  - assume valori positivi se $0 < x < 1$;
  - assume valori negativi se $x > 1$;



0 < a < 1

- quando $a > 1$ la funzione è:
  - crescente;
  - assume valori negativi se $0 < x < 1$;
  - assume valori positivi se $x > 1$.



a > 1

Equazioni logaritmiche

DEFINIZIONE

Un'**equazione logaritmica** ha l'incognita che compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

Consideriamo l'equazione logaritmica del tipo **$\log_a A(x) = \log_a B(x)$**.
Le condizioni di esistenza dei logaritmi richiedono $A(x) > 0$ e $B(x) > 0$.
Dal momento che $A(x) = B(x) \leftrightarrow \log_a A(x) = \log_a B(x)$, si cercano le soluzioni di $A(x) = B(x)$ che soddisfano le condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0$.
Poniamo $\log_3 x = t$: $t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} t_1 = 3, \\ t_2 = -1, \end{cases}$
da cui $\log_3 x = -1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$, $\log_3 x = 3 \rightarrow x_2 = 27$.
Entrambe le soluzioni soddisfano la condizione di esistenza.

Le equazioni logaritmiche

Risolviamo l'equazione: $\log_3(x+4) = 2\log_9 x + \log_3(x+1)$

1. $\begin{cases} x+4>0 \\ x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x>0$

2. $\log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 x}{2} \quad \rightarrow \quad \log_3(x+4) = \log_3 x + \log_3(x+1)$

3. $\log_3(x+4) = \log_3 x(x+1)$

4. $x+4 = x(x+1) \rightarrow x^2 = 4$ — $x = 2$; $x = -2$ non accettabile

ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione:

$\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - 3.$

- Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 8-x>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<8 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow 2<x<8$$

- Risolviamo l'equazione.
Al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a = 1$, possiamo scrivere:

$$3 = 3\cdot 1 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8.$$

Sostituiamo questo risultato nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi.

$\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - \log_2 8$

$\log_2 \dfrac{x-2}{8-x} = \log_2 \dfrac{x}{8}$) uguagliamo gli argomenti

$\dfrac{x-2}{8-x} = \dfrac{x}{8}$) trasformiamo in equazione intera ricordando che $2<x<8$

$8(x-2) = x(8-x)$

$x^2 - 16 = 0$ — $x_1 = 4$; $x_2 = -4$ non accettabile

- La soluzione dell'equazione è: $x = 4$.

Risolviamo l'equazione $\log_2(x+3) + \log_2(x+4) = 1$.

- **Condizioni di esistenza**

C.E.: $\begin{cases} x+3>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Rightarrow x>-3$

- **Risoluzione dell'equazione**

Supposto che siano verificate le C.E., possiamo scrivere la seguente catena di equazioni.

$\log_2(x+3) + \log_2(x+4) = 1$	Equazione data
$\log_2[(x+3)(x+4)] = 1$	Proprietà del logaritmo di un prodotto
$\log_2[(x+3)(x+4)] = \log_2 2$	Riscrivendo 1 sotto forma di logaritmo in base 2
$x^2+4x+3x+12 = 2$	Uguagliando gli argomenti
$x^2+7x+10 = 0$	Riscrivendo l'equazione in forma normale
$(x+5)(x+2) = 0$	Scomponendo il primo membro
$x=-5 \vee x=-2$	Legge di annullamento del prodotto

- **Conclusione**

Tra le due soluzioni trovate, $x=-5$ è da scartare perché **non** soddisfa le C.E., mentre $x=-2$ è accettabile. Quindi la soluzione dell'equazione data è -2.

Risolviamo l'equazione $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$.

- **Utilizziamo un'incognita ausiliaria**

Poniamo $\log_2 x = t$ e quindi $(\log_2 x)^2 = t^2$.
Con questa sostituzione l'equazione data si può riscrivere nella forma: $t^2+3t-4=0$
$t=-4$ e $t=1$

- **Ritorniamo alla variabile x**

Rimpiazziamo $\log_2 x$ al posto di t. Otteniamo le equazioni:

$\log_2 x = -4$ e $\log_2 x = 1$

Risolviamo queste equazioni:

$\log_2 x = -4 \Rightarrow x = 2^{-4} \Rightarrow x = \dfrac{1}{16}$

$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 \Rightarrow x = 2$

- **Conclusione**

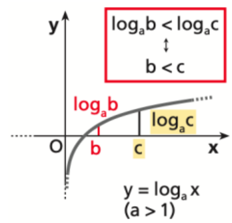
Le soluzioni dell'equazione data sono $x = \dfrac{1}{16}$ e $x = 2$.

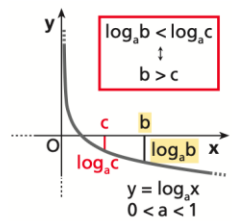
Disequazioni logaritmiche

Si consideri la disequazione logaritmica di forma $\log_a A(x) < \log_a B(x)$.

Per passare a una disequazione tra gli argomenti $A(x)$ e $B(x)$ si ricorda che con $b, c > 0$:

- per $a > 1$, $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b < c$;
- per $0 < a < 1$, $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b > c$.





Le soluzioni della disequazione logaritmica si ottengono risolvendo il sistema formato da:

- le condizioni di esistenza della disequazione;
- la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

Riassumendo:

Per risolvere la disequazione $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ o $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ si deve:

- individuare il dominio: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- scrivere la disequazione di verso opposto fra gli argomenti dei due logaritmi se $0 < a < 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) < g(x)$$

- scrivere la disequazione dello stesso verso fra gli argomenti dei due logaritmi se $a > 1$:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \rightarrow \quad f(x) > g(x)$$

ESEMPI

1. $\log_2 x > 1 \;\rightarrow\; \log_2 x > \log_2 2 \;\rightarrow\; x > 2$

2. $\log_{\frac{1}{2}} x > 2 \;\rightarrow\; \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \;\rightarrow\; 0 < x < \frac{1}{4}$

3. $\log_2(x+1) > \log_2(2x-1)$

Individuiamo il dominio $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x > \frac{1}{2}$

Risolviamo la disequazione $x+1 > 2x-1 \;\rightarrow\; x < 2$

Confrontiamo con il dominio: $\frac{1}{2} < x < 2$

ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $7^x > 4 \cdot 3^{5x}$.

Applichiamo a entrambi i membri il logaritmo in base 10. Poiché la base è maggiore di 1, manteniamo il segno $>$ nella disequazione fra logaritmi.

$\log 7^x > \log(4 \cdot 3^{5x})$ logaritmo di un prodotto

$\log 7^x > \log 4 + \log 3^{5x}$ logaritmo di una potenza

$x \log 7 > 2\log 2 + 5x \log 3$

$x \log 7 - 5x \log 3 > 2 \log 2 \;\rightarrow$

ESEMPI : • $2^x > 8 \Leftrightarrow x > 3$; • $e^x \le 15 \Leftrightarrow x \le \log 15$;

• $2^{2(x+1)} - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 1/4 < 2^x < 8 \Leftrightarrow -2 < x < 3$;

• $e^{5x+7} \ge 1 \Leftrightarrow 5x + 7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -7/5$;

• $e^{2x} - e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x < -1$ opp, $e^x > 2 \Leftrightarrow$ [la prima non è mai verificata] $x > \log 2$.

Dato che $\log 7 - 5\log 3 \simeq -1,54 <$

invertiamo il verso della disequazi

Le soluzioni sono pertanto: $x < \frac{\quad}{\log 7 - 5 \log 3}$.

ESEMPI : • $2^x > 8 \Leftrightarrow x > 3$; • $e^x \le 15 \Leftrightarrow x \le \log 15$;

• $2^{2(x+1)} - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 1/4 < 2^x < 8 \Leftrightarrow -2 < x < 3$;

• $e^{5x+7} \ge 1 \Leftrightarrow 5x + 7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -7/5$;

• $e^{2x} - e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x < -1$ opp, $e^x > 2 \Leftrightarrow$ [la prima non è mai verificata] $x > \log 2$.

Risolviamo l'equazione $e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$.

Ponendo $e^x = t$, siamo ricondotti all'equazione $t^2 - 5t - 6 = 0$, che ha per soluzioni $t = -1$ e $t = 6$.
Le soluzioni dell'equazione data sono dunque le soluzioni delle equazioni $e^x = -1$ ed $e^x = 6$. La prima equazione è impossibile; per quanto riguarda la seconda abbiamo:

$$e^x = 6 \Rightarrow x = \ln 6$$

In definitiva l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \{\ln 6\}$.

Risolviamo l'equazione $2^x = 3 \cdot 5^x$.

1° modo

$2^x = 3 \cdot 5^x$	Equazione data
$\ln 2^x = \ln(3 \cdot 5^x)$	Considerando i logaritmi naturali dei due membri
$\ln 2^x = \ln 3 + \ln 5^x$	Proprietà del logaritmo di un prodotto
$x \ln 2 = \ln 3 + x \ln 5$	Proprietà del logaritmo di una potenza
$x(\ln 2 - \ln 5) = \ln 3$	Portando i termini con la x al primo membro e raccogliendo x
$x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2 - \ln 5}$	

2° modo

$\dfrac{2^x}{5^x} = 3$	Dividendo entrambi i membri per 5^x
$\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 3$	Proprietà delle potenze
$x = \log_{\frac{2}{5}} 3$	Definizione di logaritmo

La soluzione trovata può essere scritta in termini di logaritmi naturali cambiando la base del logaritmo, ritrovando così la soluzione ottenuta con il primo metodo.

$x = \log_{\frac{2}{5}} 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2 - \ln 5}$	Cambiamento di base e proprietà del logaritmo di un quoziente

Esercizio 12.3.1. *Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:*

1. $2^{x+1} + 2^x = 48$.
2. $\frac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$.
3. $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$.
4. $2^{3-\sqrt{x}} + 2^{1+\sqrt{x}} = 10$.
5. $\left(3^{x+1}\right)^{x-1} - 3^{2x^2-1} \cdot 3^{2-x^2} + 216 = 0$.

Soluzione 12.3.1. *Procediamo con la risoluzione.*

1. *Si ha*
$$2^x \cdot 2 + 2^x = 48.$$
e quindi
$$3 \cdot 2^x = 48$$
da cui $2^x = 16$ *che equivale a* $2^x = 2^4$ *e quindi* $x = 4$.

2. *Si ha*
$$3^{(3x-2)-(x+3)} = 3^4.$$
da cui
$$3^{2x-5} = 3^4$$
Ne segue che $2x - 5 = 4$ *e quindi* $x = \frac{9}{2}$.

3. *Si ha che*
$$2^{2x} + 2 = 3 \cdot 2^x.$$
da cui
$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$
Se poniamo $y = 2^x$ *si ha* $y^2 = 2^{2x}$ *e quindi*
$$y^2 - 3y + 2 = 0.$$
che risolta ci fornisce $y_1 = 1$ *e* $y_2 = 2$. *Nel primo caso abbiamo* $2^x = 1$ *e quindi* $x_1 = 0$. *Nel secondo caso abbiamo* $2^x = 2$ *e quindi* $x = 1$.

4. *Osserviamo innanzitutto che deve essere* $x \geq 0$ *a causa della presenza di* $\sqrt{x}$. *Successivamente abbiamo*
$$2^3 \cdot 2^{-\sqrt{x}} + 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 10.$$
da cui
$$4 \cdot 2^{-\sqrt{x}} + 2^{\sqrt{x}} = 5.$$
e quindi
$$\frac{4}{2^{\sqrt{x}}} + 2^{\sqrt{x}} = 5.$$
Poniamo
$$y = 2^{\sqrt{x}}.$$
Otteniamo
$$\frac{4}{y} + y = 5$$
che equivale a
$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$
Questa equazione ha come soluzioni $y_1 = 1$ *e* $y_2 = 4$. *Nel **primo caso** abbiamo* $2^{\sqrt{x}} = 1$ *e questo ci dice che deve essere* $\sqrt{x} = 0$ *e dunque* $x = 0$ *che è accettabile. Nel **secondo caso** otteniamo* $2^{\sqrt{x}} = 4 = 2^2$ *e quindi* $\sqrt{x} = 2$ *da cui* $x = 4$.

5. *Si ha*

$$3^{x^2-1} - 3^{x^2+1} + 216 = 0.$$

da cui

$$\frac{3^{x^2}}{3} - 3 \cdot 3^{x^2} + 216 = 0.$$

e quindi

$$-8 \cdot 3^{x^2} + 3 \cdot 216 = 0.$$

da cui

$$3^{x^2} - 81 = 0.$$

da cui

$$3^{x^2} = 3^4.$$

e dunque $x = \pm 2$.

$2^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = \log_2 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_2 3}$

$3^{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = \log_3 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_3 2}$

$4 \cdot 2^{x^2} = 8^x$ scrivo tutto come potenze di 2:

$2^2 \cdot 2^{x^2} = (2^3)^x \;;\; 2^{2+x^2} = 2^{3x}$ (proprietà delle potenze)

Osservazione generale: se ho

$\boxed{2^{A(x)} = 2^{B(x)} \iff A(x) = B(x)}$ SI PUÒ FARE

$2^{2+x^2} = 2^{3x} \iff 2 + x^2 = 3x \iff x^2 - 3x + 2 = 0$

$P = 2,\ S = 3 \Rightarrow$ soluzioni $x = 1$ e $x = 2$

$3 \cdot 2^{x^2} = 1 \;;\; 2^{x^2} = \frac{1}{3} \;;\; x^2 = \log_2 \frac{1}{3}$

$\cancel{x = \pm\sqrt{\log_2 \frac{1}{3}}}$ NO!!!! $\log_2 \frac{1}{3} < 0$,

$4^x - 2^{x+2} + 3 = 0 \,,\quad 2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$

$2^{2x} = [2^x]^2 \;;\; 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$

Pongo $2^x = y$. L'equazione era $[2^x]^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$

e diventa quindi $y^2 - 4y + 3 = 0$. Risolvo in y: $y = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$y = 1 \leadsto 2^x = 1 \leadsto x = 0$

$y = 3 \leadsto 2^x = 3 \leadsto x = \log_2 3$

$2^x = 3^x$ <u>1° modo</u>: divido per 3^x: $\frac{2^x}{3^x} = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \iff x = 0$

<u>2° modo</u>: faccio a dx e sx il log in base 7: $\log_7 2^x = \log_7 3^x$

$x \log_7 2 = x \log_7 3 \,,\quad \underbrace{(\log_7 2 - \log_7 3)}_{\neq 0}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$

Risolvere

1. $2^{x-1} \cdot 3^{x+1} < 9$.
2. $3^{1+x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} < 36$.
3. $3^x + \frac{1}{3 \cdot 3^x} > \frac{28}{9}$.

Procediamo con la risoluzione.

1. *Si ha che la disequazione data equivale a*
$$\frac{2^x}{2} \cdot 3 \cdot 3^x < 9.$$
da cui
$$\frac{2^x}{2} \cdot 3^x < 3.$$
da cui
$$6^x < 6.$$
e quindi $x < 1$.

2. *Si ha che la disequazione data equivale a*
$$3 \cdot 3^x + \left(3^{-1}\right)^{-x} < 36.$$
da cui
$$4 \cdot 3^x < 36.$$
e quindi
$$3^x < 3^2.$$
da cui $x < 2$.

3. *La disequazione data equivale a*
$$9 \cdot 3^{2x} + 3 > 28 \cdot 3^x$$
e quindi
$$9 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 3 > 0$$
Ponendo $y = 3^x$ *abbiamo*
$$9y^2 - 28y + 3 > 0.$$
Questa disequazione ha come soluzioni $y < \frac{1}{9} \vee y > 3$. *Otteniamo allora* $3^x < 3^{-2} \vee 3^x > 3$ *e quindi* $x < -2 \vee y > 1$.

Risolvere

1. $\log(2x-8) - \frac{1}{2}\log(x-3) = \frac{1}{2}\log 2$.
2. $\log x + 2\log(x+3) = \log(x^3+15)$.
3. $\log\left(\sqrt{2x-2} + \sqrt{x-2}\right) = \frac{1}{2}\log(2x+3) - \log\left(\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2}\right)$.

. *Procediamo con la risoluzione.*

1. *Osserviamo che per l'esistenza dei singoli logaritmi deve essere*
$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ x-3>0 \end{cases}$$
che risolto fornisce $x > 4$. *Successivamente si ha*
$$2\log(2x-8) = \log(x-3) + \log 2.$$
da cui
$$\log(2x-8)^2 = \log 2(x-3).$$
e quindi
$$(2x-8)^2 = 2(x-3).$$
che equivale a
$$2x^2 - 17x + 35 = 0.$$
Questa equazione fornisce $x_1 = 5$ *che è* ***accettabile*** *e* $x = \frac{7}{2}$ *che* ***non è accettabile.***

2. *Le condizioni per l'esistenza dei singoli logaritmi sono*
$$\begin{cases} x>0 \\ x+3>0 \\ x^3+15>0 \end{cases}$$
che risolto fornisce $x > 0$. *Successivamente abbiamo che l'equazione equivale a*
$$\log x + \log(x+3)^2 = \log(x^3+15).$$
da cui
$$\log x(x+3)^2 = \log(x^3+15).$$
e quindi
$$x(x+3)^2 = (x^3+15).$$
che equivale a
$$2x^2 + 3x - 5 = 0.$$
Le soluzioni di questa equazione sono $x = 1$ *che è* ***accettabile*** *e* $x = -\frac{5}{2}$ *che* ***non è accettabile.***

3. *Le condizioni di esistenza dei singoli logaritmi danno luogo al sistema*

$$\begin{cases} \sqrt{2x-2}+\sqrt{x-2}>0 \\ 2x+3>0 \\ \sqrt{2x-2}-\sqrt{x-2}>0 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema

- *La disequazione*

$$\sqrt{2x-2}+\sqrt{x-2}>0$$

è verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$$

in quanto queste sono le condizioni di esistenza dei radicali. Quest'ultimo sistema è risolto dagli $x \geq 2$.

- *La disequazione $2x+3>0$ è verificata per $x>-\frac{3}{2}$*

- *La disequazione*

$$\sqrt{2x-2}-\sqrt{x-2}>0.$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \sqrt{2x-2}-\sqrt{x-2}>0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \sqrt{2x-2}>\sqrt{x-2} \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ 2x-2>x-2 \end{cases}$$

e quindi a

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x>0 \end{cases}$$

Quindi la disequazione è risolta da $x \geq 2$.

Il sistema iniziale equivale dunque a

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

e dunque i tre logaritmi esistono se e solo se $x \geq 2$. Riscriviamo allora l'equazione data come

$$\log\left(\sqrt{2x-2}+\sqrt{x-2}\right)+\log\left(\sqrt{2x-2}-\sqrt{x-2}\right)=\frac{1}{2}\log(2x+3).$$

che diventa

$$\log\left[\left(\sqrt{2x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\log(2x+3).$$

da cui

$$\log x=\frac{1}{2}\log(2x+3).$$

e dunque

$$2\log x=\log(2x+3).$$

da cui

$$\log x^2=\log(2x+3).$$

e quindi

$$x^2-2x-3=0.$$

Questa equazione ha come soluzioni $x=3$ che è accettabile e $x=-1$ che ***non*** *è* ***accettabile.***

Risolvere

1. $\log_3\left(x^2-2x+1\right)-\log_3\left(2x^2+3x-5\right)>0$
2. $\log_2(x+2)+\log_2(x+1)<\log_2(5x+2)$

1. *La disequazione equivale a*

$$\log_3\left(x^2-2x+1\right)>\log_3\left(2x^2+3x-5\right)$$

la quale equivale a

$$\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ 2x^2+3x-5>0 \\ \left(x^2-2x+1\right)>\left(2x^2+3x-5\right) \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x<-\frac{5}{2} \qquad x \vee x>1 \\ -6<x<1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $-6<x<-\frac{5}{2}$.

2. *Le condizioni di esistenza dei singoli logaritmi sono*

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x+1>0 \\ 5x+2>0 \end{cases}$$

che significa $x>-\frac{2}{5}$. La disequazione data equivale allora a

$$\begin{cases} x>-\frac{2}{5} \\ \log_2(x+2)(x+1)<\log_2(5x+2) \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x>-\frac{2}{5} \\ (x+2)(x+1)<(5x+2) \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x>-\frac{2}{5} \\ x^2-2x<0 \end{cases}$$

che risolto ci fornisce $0<x<2$.

$\log_2(2x-4) \leq 0$; $\log_2(2x-4) \leq \log_2 1$

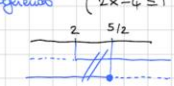
$\Leftrightarrow \quad 0 < 2x-4 \leq 1$ $\qquad \begin{cases} 2x-4>0 & ① \\ 2x-4 \leq 1 & ② \end{cases}$

cond. esistenza

ottenuto togliendo i log

① $2x>4$, $x>2$

② $2x-4 \leq 1$, $2x \leq 5$, $x \leq \frac{5}{2}$



zona comune: $(2, 5/2]$ $\qquad 2 < x \leq \frac{5}{2}$

$\log_2(2x+3) < 2$; $\log_2(2x+3) < \log_2 4$

$0 < 2x+3 < 4$

$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3<4 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x>-3 \\ 2x<1 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-3/2 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$

Soluzione: $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\qquad \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Risolviamo la disequazione $\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x - 1} \geq 0.$

Si tratta di una disequazione logaritmica *frazionaria*.

- **Poniamo le condizioni di esistenza**
  Dobbiamo imporre che gli argomenti dei logaritmi siano positivi e il denominatore sia diverso da zero.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x>0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>0 \\ x \neq e \end{cases} \Rightarrow x>1, \text{ con } x \neq e$$

- **Studiamo il segno del numeratore e del denominatore**
  Numeratore
  $\ln(x-1)>0 \Rightarrow \ln(x-1)>\ln 1 \Rightarrow x-1>1 \Rightarrow x>2$
  Denominatore
  $\ln x - 1 > 0 \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln e \Rightarrow x > e$

- **Costruiamo la tabella dei segni**
  Nel costruire la tabella dei segni di una disequazione logaritmica frazionaria occorre tener conto delle condizioni di esistenza. A tale scopo «cancelliamo» con un tratteggio l'intervallo «vietato» dalle condizioni di esistenza, cioè quello dove l'espressione non è definita.

		1		2		e		x
segno di $\ln(x-1)$		∄	−	0	+		+	
segno di $\ln x - 1$			−		−	0	+	
segno di $\frac{\ln(x-1)}{\ln x - 1}$		∄	+	0	−	∄	+	

La disequazione originaria è verificata quando l'espressione al primo membro è maggiore o uguale a zero; come puoi vedere dalla tabella, ciò accade per: $1 < x \leq 2 \vee x > e$.

BIBLIOGRAFIA - SITOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi, Trifone *La matematica del triennio* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas
- Massimiliano Virdis *Equazioni e disequazioni esponenziali*
- Massimiliano Virdis *Equazioni e disequazioni logaritmiche*
- http://eurekamat.weebly.com/