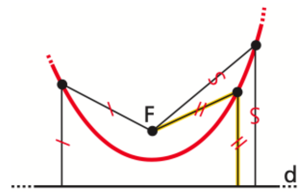
Parabola

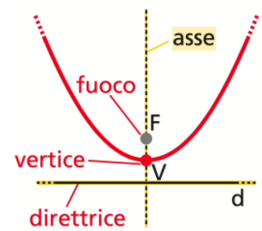
DEFINIZIONE
Dati nel piano un punto *F* e una retta *d*, si chiama **parabola** la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da *F* e da *d*.



Il punto *F* è il **fuoco** e la retta *d* è la **direttrice**.

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse della parabola**.

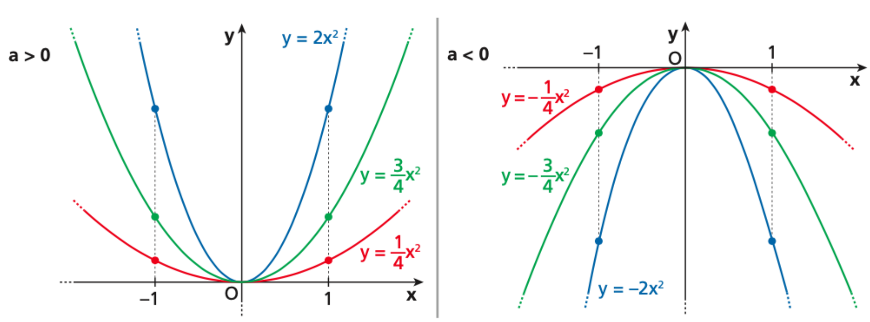
Il punto *V* in cui la parabola interseca il suo asse è il **vertice** della parabola.



L'asse della parabola è anche asse di simmetria della curva.

Concavità

Nella parabola $y = ax^2$, $a > 0 \to y \geq 0$ e $a < 0 \to y \leq 0$.
Se $a > 0$ la parabola volge la **concavità verso l'alto**.
Se $a < 0$ la parabola volge la **concavità verso il basso**.
Se $a = 0$, l'equazione diventa $y = 0$ e la parabola è **degenere**.



Parabola con asse verticale

La parabola di asse parallelo all'asse y e vertice $V(x_V; y_V)$ ha equazione

$$y - y_V = a(x - x_V)^2.$$ — equazione della parabola avente vertice $(x_V; y_V)$ e asse parallelo all'asse y

Ponendo $-2ax_V = b$ e $ax_V^2 + y_V = c$, l'equazione diventa:

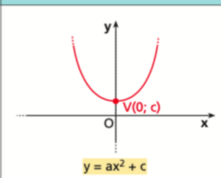
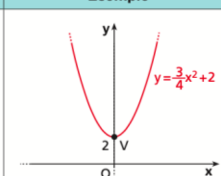
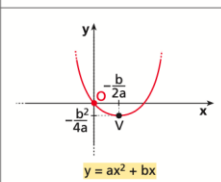
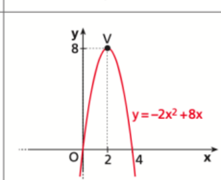
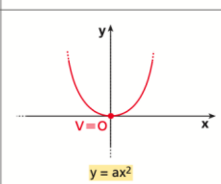
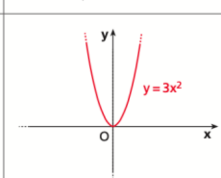
$$y = ax^2 + bx + c.$$ — equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

Dalle sostituzioni effettuate ricaviamo:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$ — ascissa e ordinata del vertice

$$x_F = -\frac{b}{2a} \qquad y_F = \frac{1-\Delta}{4a}.$$ — ascissa e ordinata del fuoco

Casi particolari

Caso esaminato	Grafico	Esempio
$b = 0$ e $c \neq 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + c$. La parabola ha vertice $V(0; c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y.		
$c = 0$ e $b \neq 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + bx$. La parabola ha vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$ e passa sempre per l'origine O. Infatti le coordinate $(0; 0)$ soddisfano l'equazione.		
$b = 0$, $c = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2$. Ritroviamo la parabola già studiata con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine.		

Parabola con asse orizzontale

Ogni parabola con asse parallelo all'asse *x* si può ottenere come corrispondente, nella simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, di una parabola con asse parallelo all'asse *y*.
Nell'equazione si scambia *x* con *y*:

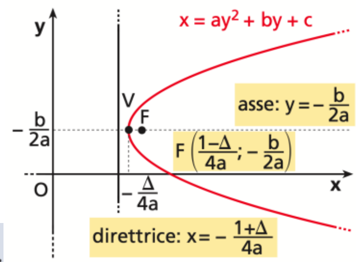
$$x = ay^2 + by + c.$$ equazione della parabola con asse parallelo all'asse *x*

Equazione dell'asse: $y = -\dfrac{b}{2a}$.

Vertice: $V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Fuoco: $F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Equazione della direttrice: $x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.



Per studiare una parabola:

1. Scriviamo la parabola in forma normale.
2. Capiamo se l'asse è verticale od orizzontale.
3. Troviamo il vertice.
4. Troviamo l'intersezione con gli assi cartesiani.
5. Eventualmente troviamo fuoco e direttrice.

$$y = 3x^2 - 5x + 2 \tag{8.1}$$

. La variabile di secondo grado è la x: abbiamo una parabola con asse verticale.
. Possiamo scrivere le coordinate del vertice.

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{-5}{2\cdot 3} = \frac{5}{6} \\ y_v &= -\frac{(-5)^2 - 4(3)(2)}{4\cdot 3} = -\frac{1}{12} \end{aligned} \tag{8.2}$$

. l'intersezione con l'asse y si ottiene facendo sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse.

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad x = 0; y = 2 \tag{8.3}$$

Chiamiamo il punto $A(0;2)$.
l'intersezione con l'asse x si ottiene facendo sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse.

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} \\ x_1 &= \frac{5+1}{6} = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Chiamiamo i punti $B(1;0)$ e $C\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Scriviamo le coordinate del fuoco.

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

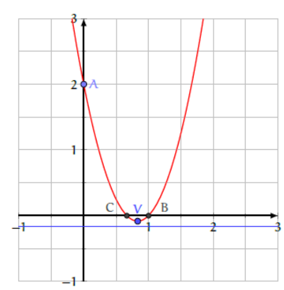
$$\begin{aligned} x_f &= -\frac{-5}{2\cdot 3} = \frac{5}{6} \\ y_f &= \frac{1 - [(-5)^2 - 4(3)(2)]}{4\cdot 3} = \frac{0}{12} = 0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

L'equazione della direttrice è:

$$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$$

$$y = \frac{-1 - [(-5)^2 - 4(3)(2)]}{4\cdot 3} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} \tag{8.7}$$

possiamo rappresentare graficamente quanto studiato.



ESERCIZIO GUIDA Determiniamo vertice, fuoco, asse e direttrice della parabola di equazione $y = x^2 + 6x - 1$.

I coefficienti della parabola sono: $a = 1$; $b = 6$; $c = -1$. Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 36 + 4 = 40.$$

- Vertice V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$$
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{40}{4 \cdot 1} = -10 \rightarrow V(-3; -10).$$

È possibile calcolare l'ordinata y_V del vertice anche sostituendo a x il valore -3 di x_V nell'equazione della parabola:

$$y_V = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 1 = -10.$$

- Fuoco F:

$$x_F = x_V = -3;$$
$$y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-40}{4 \cdot 1} = -\frac{39}{4};$$
$$F\left(-3; -\frac{39}{4}\right).$$

- Asse:
è l'insieme dei punti che hanno la stessa ascissa del vertice, quindi ha equazione:

$$x = -3.$$

- Direttrice:

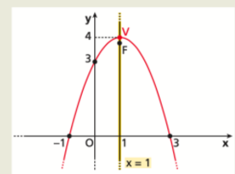
$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+40}{4 \cdot 1} = -\frac{41}{4}.$$

ESERCIZIO GUIDA Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y avente per vertice il punto $V(1; 4)$ e per fuoco il punto $F\left(1; \frac{15}{4}\right)$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

La parabola ha equazione generale $y = ax^2 + bx + c$.

Risolviamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 & \text{ascissa di } V \text{ e } F \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 4 & \text{ordinata di } V \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = \dfrac{15}{4} & \text{ordinata di } F \end{cases}$$



$$\begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ 1 - (b^2 - 4ac) = 15a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ 1 - (-16a) = 15a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 4 + 4c = 16 \\ a = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è $y = -x^2 + 2x + 3$.

Osservazione. La seconda equazione del sistema può essere sostituita con la condizione di appartenenza del vertice alla parabola:

$$4 = a + b + c.$$

o 48 *Trova la parabola con asse orizzontale passante per il punti* $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$ *e* $C(0; 1)$.

I punto A e C condividono la stessa ordinata e quindi stanno sulla stessa retta parallela all'asse y: la parabola non può esistere. Se anche non ce ne fossimo accorti avremmo ottenuto un sistema indeterminato. Infatti, proviamo a sostituire le coordinate dei punti nella generica equazione della parabola $x = ay^2 + by + c$.

$$\begin{cases} -2 = a(1)^2 + b(1) + c \\ 1 = a(3)^2 + b(3) + c \\ 0 = a(1)^2 + b(1) + c \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2 = a + b + c \\ 1 = 9a + 3b + c \\ 0 = a + b + c \end{cases} \qquad (9.1)$$

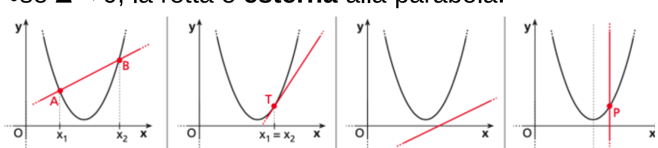
Se eguagliamo il primo membro della prima e terza equazione arriviamo all'assurdo $-2 = 0$: il sistema è impossibile e non esiste parabola che soddisfi le condizioni date.

Le intersezioni di una parabola e una retta sono date dal sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow ax^2 + (b - m)x + c - q = 0.$$

Il numero di soluzioni dipende dal determinante **Δ** dell'equazione:

- se **Δ** > 0, la retta è **secante** la parabola in due punti;
- se **Δ** = 0, la retta è **tangente** alla parabola in un punto;
- se **Δ** < 0, la retta è **esterna** alla parabola.



a. La retta è secante la parabola. I punti di intersezione sono due.

b. La retta è tangente alla parabola. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna alla parabola. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela all'asse della parabola: c'è un unico punto di intersezione.

Trova la posizione reciproca tra la retta $y = 2x + 7$ *e la parabola* $y = x^2 - 3x + 1$ *e gli eventuali punti di intersezione.*

Risolviamo il sistema tra l'equazione della parabola e della retta.

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = x^2 - 3x + 1 \end{cases} ; \quad x^2 - 3x + 1 = 2x + 7 \quad ; \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \qquad (8.8)$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 > 0 \qquad (8.9)$$

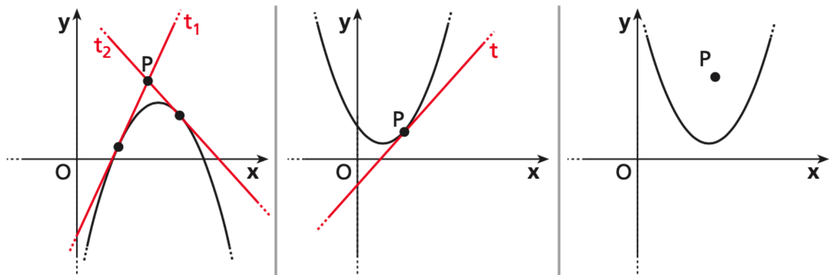
La retta è secante.

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$$
$$x_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \quad ; \quad x_2 = \frac{3-7}{2} = -2 \qquad (8.10)$$
$$y_1 = 2x_1 + 7 = 2 \cdot 5 + 7 = 17 \quad ; \quad y_2 = 2x_2 + 7 = 2(-2) + 7 = 3$$

I punti sono $A(5; 17)$ e $B(-2; 3)$.

Rette tangenti a una parabola

Le rette per un punto tangenti alla parabola sono due, una o nessuna.
Se per un punto *P* è possibile tracciare:
- due rette tangenti, si dice che *P* è **esterno** alla parabola;
- una sola retta, *P* è **sulla** parabola;
- nessuna retta tangente, allora *P* si dice **interno** alla parabola.



a. *P* **esterno** alla parabola: due rette tangenti. **b.** *P* **sulla** parabola: una retta tangente. **c.** *P* **interno** alla parabola: non esistono rette tangenti.

Rette tangenti a una parabola

Per determinare le rette tangenti per $P(x_0; y_0)$ scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \rightarrow ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0.$$

La tangenti si trovano ponendo la condizione **Δ** = 0 e risolvendo per *m*.

Se il punto $P(x_0; y_0)$ appartiene alla parabola, l'equazione della retta tangente all'ellisse in *P* si trova con la **formula di sdoppiamento**:

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c.$$

La formula si ottiene dall'equazione della parabola con le sostituzioni:

$$x \rightarrow \frac{x + x_0}{2}; \quad y \rightarrow \frac{y + y_0}{2}; \quad x^2 \rightarrow x_0x.$$

Trova le tangenti alla parabola di equazione $y = 3x^2 - 4x - 3$ *condotte dal punto* $P(-1;-8)$.

Cominciamo col costruire il fascio di rette passanti per il punto P.

$$\begin{aligned} y-(-8) &= m(x-(-1)) \\ y+8 &= mx+m \\ y &= mx+m-8 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Scriviamo il sistema individuato dalle rette del fascio e dalla parabola.

$$\begin{cases} y = mx+m-8 \\ y = 3x^2-4x-3 \end{cases} \tag{10.2}$$

I valori di m per il quali abbiamo delle tangenti sono quelli per cui il sistema ci da coppie di soluzioni coincidenti, ovvero un'unica soluzione data dal punto di tangenza. Eguagliamo la prima e la seconda y del sistema e imponiamo che l'equazione di secondo grado in x dia soluzioni uniche ovvero che abbia il discriminante uguale a zero.

$$\begin{aligned} 3x^2-4x-3 &= mx+m-8 \\ 3x^2+(-4-m)x-m+5 &= 0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

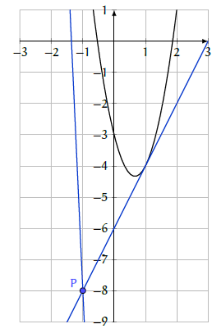
$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ b^2-4ac &= 0 \\ (-4-m)^2-4\cdot 3\cdot(-m+5) &= 0 \\ 16+8m+m^2+12m-60 &= 0 \\ m^2+20m-44 &= 0 \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$m_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2-4(1)(-44)}}{2\cdot 1} = \frac{-20 \pm \sqrt{576}}{2}$$

$$m_1 = \frac{-20+24}{2} = -\frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad m_2 = \frac{-20-24}{2} = -\frac{44}{2} = -22$$

Otteniamo quindi due rette. Sostituiamo i valori trovati nel fascio di rette $y = mx+m-8$.

$$y_1 = 2x+2-8 = 2x-6$$
$$y_2 = -22x-22-8 = -22x-30$$



Trova la retta tangente alla parabola $x = 4y^2 - 5y + 3$ *nel suo punto* $P(9;2)$.

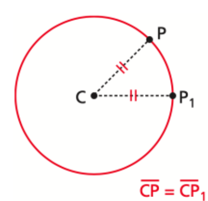
$$\begin{aligned} \frac{x+x_0}{2} &= ay_0y + b\frac{y+y_0}{2} + c \\ \frac{x+9}{2} &= 4(2)y + (-5)\frac{y+2}{2} + 3 \\ \frac{x+9}{2} &= 8y + \frac{-5y-10}{2} + 3 \\ x+9 &= 16y-5y-10+6 \\ x &= 11y-13 \end{aligned}$$

Equazione della circonferenza

DEFINIZIONE

Assegnato nel piano un punto *C*, detto *centro*, si chiama **circonferenza** la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da *C*:

$\overline{PC}$ = **costante**.



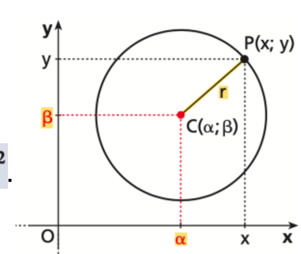
La distanza fra i punti della circonferenze e il centro è il **raggio**.

Un generico punto $P(x; y)$ appartiene alla circonferenza di raggio r e centro $C(\alpha; \beta)$ se e solo se: $\overline{PC} = r \rightarrow \overline{PC}^2 = r^2$.

L'equazione cercata è $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

Svolgendo i calcoli l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$



Data l'equazione di una circonferenza nella forma

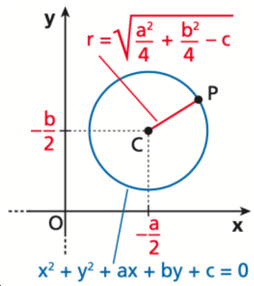
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,

il centro C ha coordinate $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$,

il raggio r è $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza solo se r è un numero reale, cioè è rispettata la **condizione di realtà**: $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$.

Se $r = 0$ la circonferenza è **degenere** e si riduce al solo punto C.



Trova centro e raggio della circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 + 3x - 5y - 11 = 0$

Per poter applicare le opportune formule la circonferenza deve essere in forma normale, ovvero con il coefficiente dei termini di secondo grado uguale ad uno.

Dividiamo per due l'equazione e poi applichiamo le formule.

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y - \frac{11}{2} = 0$$
$$a = \frac{3}{2} \quad ; \quad b = -\frac{5}{2} \quad ; \quad c = -\frac{11}{2} \tag{5.2}$$

$$C = \left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{2}; -\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right) \tag{5.3}$$

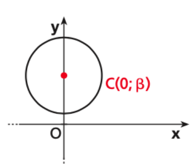
Per trovare il raggio, se sappiamo già le coordinate del centro, è meglio usare direttamente la seconda espressione prima indicata.

$$r = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(-\frac{11}{2}\right)} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{25}{16} + \frac{11}{2}} = \sqrt{\frac{9 + 25 + 88}{16}} = \sqrt{\frac{122}{16}} = \frac{\sqrt{122}}{4} \tag{5.4}$$

Casi particolari

Consideriamo alcuni casi particolari dell'equazione

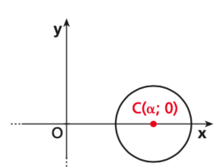
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.



$a = 0$

$x^2 + y^2 + by + c = 0$

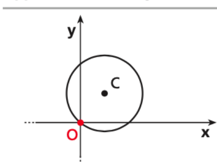
a. Se $a = 0$, allora $\alpha = 0$, quindi $C(0; \beta)$: **il centro appartiene all'asse** y.



$b = 0$

$x^2 + y^2 + ax + c = 0$

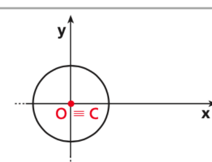
b. Se $b = 0$, allora $\beta = 0$, quindi $C(\alpha; 0)$: **il centro appartiene all'asse** x.



$c = 0$

$x^2 + y^2 + ax + by = 0$

c. Se $c = 0$, le coordinate di $O(0; 0)$ verificano l'equazione, quindi **la circonferenza passa per l'origine degli assi**.



$a = b = 0$

$x^2 + y^2 + c = 0$

$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \sqrt{-c})$

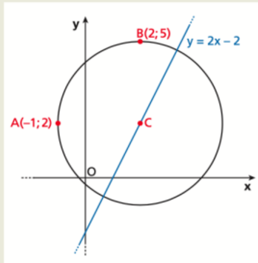
d. Se $a = b = 0$, allora $\alpha = \beta = 0$, quindi $C(0; 0)$.
La circonferenza ha il centro nell'origine.

ESERCIZIO GUIDA Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1; 2)$ e $B(2; 5)$ e avente il centro C sulla retta r di equazione $y = 2x - 2$.

Imponiamo le condizioni date alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

$$\begin{cases} -a + 2b + c = -5 & \text{passaggio per } A \\ 2a + 5b + c = -29 & \text{passaggio per } B \\ \left(-\frac{b}{2}\right) = 2\left(-\frac{a}{2}\right) - 2 & C \text{ appartiene alla retta } r \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a + 2b + c = -5 \\ 2a + 5b + c = -29 \\ 2a - b = -4 \end{cases}$$



Ricaviamo dalla terza equazione $b = 2a + 4$ e sostituiamo nelle prime due equazioni.

$$\begin{cases} -a + 4a + 8 + c = -5 \\ 2a + 10a + 20 + c = -29 \\ b = 2a + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + c = -13 \\ 12a + c = -49 \\ b = 2a + 4 \end{cases}$$

Usiamo il metodo di riduzione sottraendo membro a membro le prime due equazioni.

$$\begin{cases} 9a = -36 \\ c = -3a - 13 \\ b = 2a + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -1 \\ b = -4 \end{cases} \rightarrow$$ La circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

Trova la circonferenza tangente alla retta $x - 5y + 2 = 0$ *e di centro* $C(-2; 4)$.

Il raggio della circonferenza è la distanza del centro dalla retta:

$$r = \frac{|1(-2) - 5(4) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{|-2 - 20 + 2|}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{20}{\sqrt{26}}$$

Quindi la circonferenza ha equazione:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{400}{26} = \frac{200}{13}$$

Trova la circonferenza passante per il punto $P(-2, 5)$ *e con il centro* $C(2; -3)$.

Il raggio della circonferenza è la distanza tra i due punti dati:

$$r = \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \tag{6.5}$$

Possiamo scrivere la circonferenza di centro e raggio dati.

$$(x-2)^2 + (x+3)^2 = (\sqrt{80})^2 = 80 \tag{6.6}$$

Trova la circonferenza passante per i punti $A(-3; 2)$ *e* $B(-1; 7)$*, sapendo che sono gli estremi di un diametro.*

Il centro ha come coordinate:

$$C(\alpha; \beta) = \left(\frac{-3 + (-1)}{2}; \frac{2+7}{2}\right) = \left(-\frac{4}{2}; \frac{9}{2}\right) = \left(-2; \frac{9}{2}\right) \tag{6.9}$$

Il raggio è la metà del diametro:

$$r = \frac{\sqrt{(-1 - (-3))^2 + (7-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(2)^2 + (5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 25}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \tag{6.10}$$

Quindi la circonferenza ha equazione:

$$(x+2)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \tag{6.11}$$

Trova l'equazione della circonferenza passante per il punti $A(1; -3)$, $B(4; 5)$ *e* $C(6; -2)$.

Imponiamo il passaggio della circonferenza per i punti dati:

$$\begin{cases} 1^2 + (-3)^2 + a - 3b + c = 0 \\ 4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0 \\ 6^2 + (-2)^2 + 6a - 2b + c = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 10 + a - 3b + c = 0 \\ 41 + 4a + 5b + c = 0 \\ 40 + 6a - 2b + c = 0 \end{cases} \tag{6.13}$$

Abbiamo un sistema lineare in tre incognite: risolviamolo col metodo di sostituzione, mettendo in evidenza la c nella prima equazione e sostituendola nella altre due.

$$\begin{cases} c = -10 - a + 3b \\ 41 + 4a + 5b - 10 - a + 3b = 0 \\ 40 + 6a - 2b - 10 - a + 3b = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 31 + 3a + 8b = 0 \\ 30 + 5a + b = 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

Mettiamo in evidenza b nella seconda e sostituiamola nella prima.

$$\begin{cases} b = -30 - 5a \\ 31 + 3a + 8(-30 - 5a) = 0 \end{cases} ; \quad 31 + 3a - 240 - 40a = 0 \quad ; \quad -37a = 209 \quad ; \quad a = -\frac{209}{37} \tag{6.15}$$

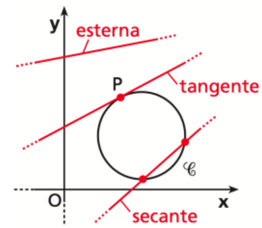
Sostituiamo a ritroso e troviamo:

$$\begin{cases} a = -\frac{209}{37} \\ b = -30 - 5a = -30 + \frac{1045}{37} = \frac{1110 - 1045}{37} = -\frac{65}{37} \\ c = -10 - a + 3b = -10 + \frac{209}{37} + 3 \cdot \frac{65}{37} = \frac{-370 + 209 - 195}{37} = -\frac{356}{37} \end{cases} \tag{6.16}$$

Infine l'equazione della circonferenza è:

$$x^2 + y^2 - \frac{209}{37}x - \frac{65}{37}y - \frac{356}{37} = 0 \tag{6.17}$$

La posizione di una retta rispetto a una circonferenza dipende dalla distanza *d* del centro della circonferenza dalla retta.



La posizione è determinata dal numero di soluzioni del sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della retta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Applicando il metodo di sostituzione, otteniamo un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente** di determinante **Δ**.

Si ha:

- se **Δ** > 0, la retta è **secante**;
- se **Δ** = 0, la retta è **tangente**;
- se **Δ** < 0, la retta è **esterna**.

1 *Trova la posizione reciproca tra la retta* $y = 2x+7$ *e la circonferenza* $x^2+y^2-3x+1=0$ *e gli eventuali punti di intersezione.*

Per stabile la posizione reciproca facciamo sistema tra l'equazione della retta e della circonferenza: a seconda delle soluzioni che troviamo possiamo stabilire immediatamente la posizione reciproca e gli eventuali punti di intersezione.

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x+1=0 \\ y=2x+7 \end{cases} \quad ; \quad x^2+(2x+7)^2-3x+1=0 \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} &x^2+4x^2+28x+49-3x+1=0 \\ &5x^2+25x+50=0 \\ &x^2+5x+10=0 \\ &\Delta = 25-4\cdot 1\cdot 10 = -15 < 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

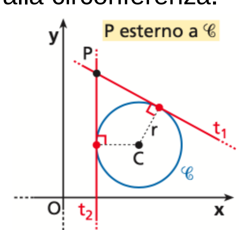
Per cui non esistono soluzioni ovvero punti di intersezione e la retta è esterna alla circonferenza.

Rette tangenti a una circonferenza

Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, determiniamo le equazioni delle rette per *P* tangenti alla circonferenza.

Si pone **Δ** = 0 nell'equazione di secondo grado ottenuta per sostituzione dal sistema tra il fascio di rette per *P* e la circonferenza:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}.$$



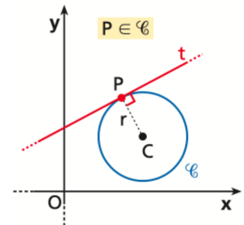
In alternativa, si pone la distanza tra centro *C* e una generica retta passante per *P*, di equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ uguale al raggio *r*.

Con entrambi i metodi si trovano i valori di *m*.

Le rette tangenti si ottengono sostituendo *m* in $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Rette tangenti a una circonferenza

Se il punto $P(x_0; y_0)$ appartiene alla circonferenza, possiamo applicare anche i seguenti metodi.



La tangente è la perpendicolare in *P* alla retta *PC*. Si determina il centro della circonferenza e si calcola il coefficiente angolare *m* di *PC*.

La tangente ha equazione $y - y_0 = m'(x - x_0)$, con $m' = -\dfrac{1}{m}$.

In alternativa, si ottiene l'equazione della tangente con **la formula di sdoppiamento**:

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0.$$

ESERCIZIO GUIDA Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ condotte dal punto $P(-3; -2)$.

Applichiamo il secondo metodo (distanza retta-centro uguale al raggio).

La circonferenza ha centro $C(0; 2)$ e raggio $r = \sqrt{4 - (-5)} = 3$.

Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per $P(-3; -2)$:

$$y + 2 = m(x + 3) \rightarrow mx - y + 3m - 2 = 0.$$

Ricordiamo che in tale fascio non risulta compresa la retta verticale di equazione $x = -3$.
Applichiamo la formula della distanza fra la generica retta passante per *P* e il centro *C*:

$$d = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|m \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|3m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

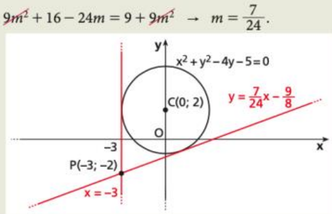
Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a *m*:

$$\frac{|3m - 4|}{\sqrt{1 + m^2}} = 3 \rightarrow (3m - 4)^2 = 9(1 + m^2) \rightarrow \cancel{9m^2} + 16 - 24m = 9 + \cancel{9m^2} \rightarrow m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo **un solo** valore di *m* a cui corrisponde la retta di equazione:

$$y + 2 = \frac{7}{24}(x + 3) \rightarrow y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$

Il punto *P* è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti condotte da *P* devono essere due. L'altra tangente è la retta verticale di equazione $x = -3$, esclusa dal fascio.



Trova le tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ *dal punto* $P(7; -1)$.

Scriviamo il fascio proprio di rette aventi centro sul punto P e di coefficiente angolare m.

$$y - (-1) = m(x - 7)$$
$$y + 1 = mx - 7m \qquad (7.1)$$
$$mx - y - 7m - 1 = 0 \quad ; \quad y = mx - 7m - 1$$

Scriviamo il sistema che unisce circonferenza col fascio di rette.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \\ y = mx - 7m - 1 \end{cases} \qquad (7.7)$$

$$x^2 + (mx - 7m - 1)^2 - 6x - 2(mx - 7m - 1) + 6 = 0$$
$$x^2 + m^2x^2 + 49m^2 + 1 - 14m^2x - 2mx + 14m - 6x - 2mx + 14m + 2 + 6 = 0 \qquad (7.8)$$
$$x^2(1 + m^2) + x(-14m^2 - 4m - 6) + 49m^2 + 28m + 9 = 0$$

Imponiamo che il delta dell'equazione sia uguale a zero.

$$\Delta = (-14m^2 + 4m - 6)^2 - 4(1 + m^2)(49m^2 + 28m + 9) = 0$$
$$\cancel{196m^4} + 16m^2 + \cancel{36} + 168m^2 + \cancel{112m^3} + 48m - 196m^2 - 112m - \cancel{36} - \cancel{196m^4} - \cancel{112m^3} - 36m^2 =$$
$$-48m^2 - 64m = 0$$
$$-16m(3m + 4) = 0$$
$$m = 0 \quad ; \quad m = -\frac{4}{3}$$
(7.9)

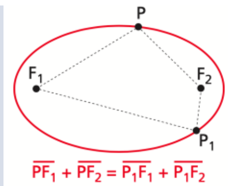
$$y = 0x - 7 \cdot 0 - 1 = -1$$
$$y = -\frac{4}{3}x - 7\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -x\frac{4}{3} + \frac{28 - 3}{3} = -x\frac{4}{3} + \frac{25}{3}$$

Ellisse come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Dati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **ellisse** il luogo geometrico dei punti P del piano tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante.}$$

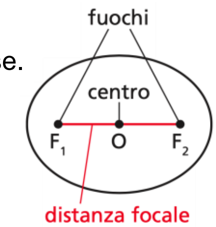


F_1 e F_2 sono i **fuochi** dell'ellisse.

Il punto medio del segmento F_1F_2 è il **centro** dell'ellisse.

Indichiamo con:

- $2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;
- $2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi → $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.



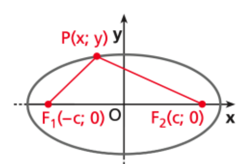
Si ha $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2} \rightarrow 2a > 2c \rightarrow \boldsymbol{a > c}$.

Ellisse con i fuochi sull'asse *x*

Consideriamo un'ellisse con centro in $O(0; 0)$ e fuochi sull'asse x, $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$.

Sia $P(x; y)$ un generico punto del piano, allora

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad \overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$



P appartiene all'ellisse se e solo se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, con $a > 0$.

Sostituendo $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ otteniamo: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

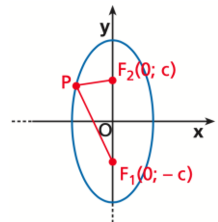
Ponendo $\boldsymbol{a^2 - c^2 = b^2}$, si ottiene l'**equazione canonica** dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ — equazione canonica o normale dell'ellisse}$$

Avendo posto $a^2 - c^2 = b^2$, risulta $a^2 > b^2$ → $\boldsymbol{a > b}$.

Ellisse con i fuochi sull'asse *y*

Consideriamo un'ellisse con centro in $O(0; 0)$ e fuochi sull'asse y, $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.



Indichiamo con $2b$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi → $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b.$

Con calcoli analoghi a quelli del caso precedente ma ponendo $\boldsymbol{b^2 - c^2 = a^2}$, si ottiene la stessa equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ equazione canonica o normale dell'ellisse

In questo caso, poiché $b^2 - c^2 = a^2$, risulta $b^2 > a^2$ → $\boldsymbol{b > a}.$

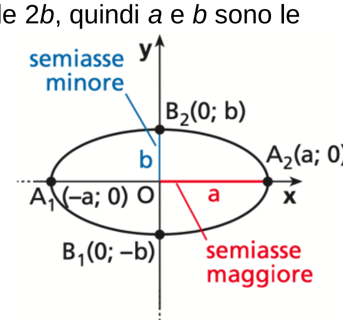
Vertici e assi

I punti di intersezione dell'ellisse con gli assi cartesiani sono:

- $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ per l'asse x;
- $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ per l'asse y.

I punti A_1, A_2, B_1 e B_2 si chiamano **vertici** dell'ellisse.
I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 sono detti **assi** dell'ellisse.
La distanza $\overline{A_1A_2}$ vale $2a$, mentre $\overline{B_1B_2}$ vale $2b$, quindi a e b sono le misure dei semiassi.

Se l'ellisse ha i fuochi sull'asse x, $a > b$ quindi A_1A_2 è detto **asse maggiore** e B_1B_2 è detto **asse minore**.
Viceversa se l'ellisse ha i fuochi sull'asse y, B_1B_2 è l'**asse maggiore** mentre A_1A_2 è l'**asse minore**.



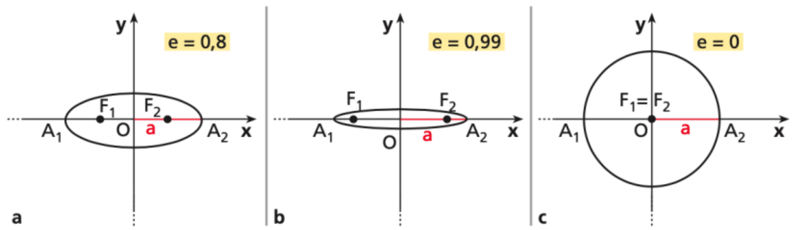
Eccentricità

Il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore di un'ellisse è detto **eccentricità**. Si indica con *e*. Vale $0 \le e < 1$.

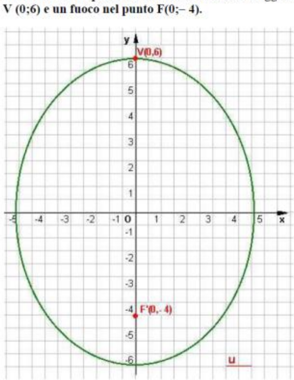
Se i fuochi sono sull'asse *x*, $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \rightarrow \boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$.

Se i fuochi sono sull'asse *y*, $e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b} \rightarrow \boldsymbol{e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}}$.

L'eccentricità *e* indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.



Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse y, avente un vertice nel punto V (0;6) e un fuoco nel punto F(0;– 4).



Essendo b = 6 si ottiene $b^2 = 36$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$,

poichè $c^2 = 16$,

si ottiene $a^2 = 36 - 16 = 20$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Determinare le coordinate dei vertici e dei fuochi e l'eccentricità della seguente ellisse :

1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ In questo primo esercizio si nota che $a^2 - c^2 = b^2$

L'ellissi è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $e = \frac{c}{a}$

Quindi

$a = \sqrt{36} = 6$

$b = \sqrt{9} = 3$

$c^2 = 36 - 9 = 27$

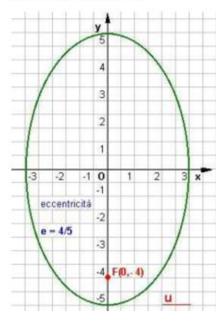
$c = \sqrt{27}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{27}}{6} = 0{,}6 < 1$

$F_1(-c\,;0) \Rightarrow F_1(-\sqrt{27}\,;0)$
$A_1(-a\,;0) \Rightarrow A_1(-6\,;0)$
$B_1(0\,;-b) \Rightarrow B_1(0\,;-3)$

$F_2(c\,;0) \Rightarrow F_2(\sqrt{27}\,;0)$
$A_2(a\,;0) \Rightarrow A_2(6\,;0)$
$B_2(0\,;b) \Rightarrow B_2(0\,;3)$

Determinare l'equazione dell'ellisse avente asse maggiore sull'asse y, eccentricità e = 4/5 e un fuoco nel punto F(0 ;– 4).



Essendo e = c/b , poichè $c^2 = 16$, si ottiene 16/n = 16 /25,
da cui si ricava $n = b^2 = 25$.

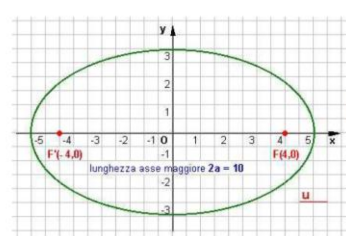
Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$

si ottiene $a^2 = 25 - 16 = 9$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x, avente asse maggiore di lunghezza 2a = 10 e fuochi nei punti F'(– 4 ; 0) ed F(4 ; 0).



Essendo 2a = 10 si ottiene a = 5 e quindi $a^2 = 25$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, poichè $c^2 = 16$, si ottiene $b^2 = 25 - 16 = 9$.

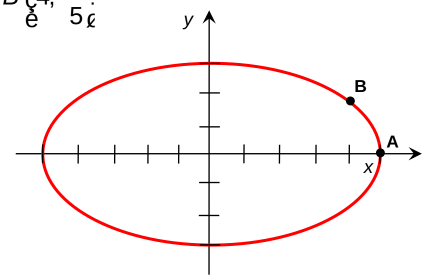
Dunque l'equazione dell'ellisse è :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Prendiamo l'equazione dell'ellisse con assi di simmetria gli assi cartesiani e passante per i punti:

$$A(5,\ 0) \quad B\left(4,\ \frac{9}{5}\right)$$

Imponiamo il passaggio per i due punti



$$\begin{cases} \dfrac{25}{a^2} = 1 & \text{Passaggio per } A \\ \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{\frac{81}{25}}{b^2} = 1 & \text{Passaggio per } B \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ \dfrac{16}{25} + \dfrac{81}{25b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases}$$

L'ellisse ha equazione $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

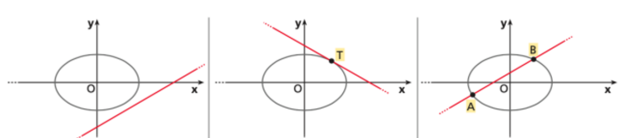
e ha i fuochi sull'asse delle ascisse.

Posizione di una retta e un'ellisse

La posizione di una retta rispetto a un'ellisse è determinata dal numero di soluzioni del sistema formato dalle equazioni dell'ellisse e della retta:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Applicando il metodo di sostituzione, otteniamo un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente** di determinante **Δ.**



a. Δ < 0 La retta è **esterna** all'ellisse. Non ci sono punti di intersezione.

b. Δ = 0 La retta è **tangente** all'ellisse. L'unico punto di intersezione è il punto di tangenza.

c. Δ > 0 La retta è **secante** l'ellisse. I punti di intersezione sono due.

Trovare le intersezioni della retta $y = x + 4$ con la parabola $y = -x^2 + 6x$.

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

elaboriamo la seconda dopo la sostituzione :

$x + 4 = -x^2 + 6x$

$$x^2 - 6x + x + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

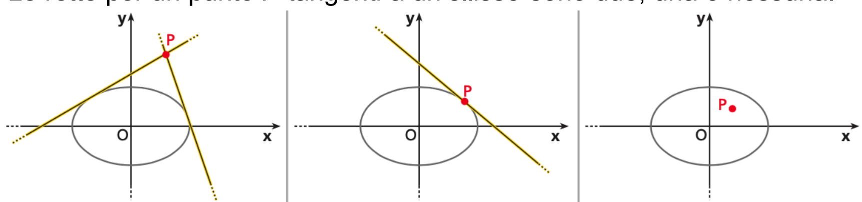
$$x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} =$$

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = x_1 + 4 = 1 + 4 = 5$ **A (1,5)**

$x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = x_2 + 4 = 4 + 4 = 8$ **B (4,8)**

Rette tangenti a un’ellisse

Le rette per un punto *P* tangenti a un’ellisse sono due, una o nessuna.



a. *P* è esterno all’ellisse: esistono due rette tangenti per *P*. **b.** *P* appartiene all’ellisse: esiste una sola retta tangente per *P*. **c.** *P* è interno all’ellisse: non esistono rette tangenti per *P*.

La tangenti si trovano ponendo $\boxed{\Delta = 0}$ nell’equazione risolvente.

Se il punto $P(x_0; y_0)$ appartiene all’ellisse, si può determinare l’equazione della retta tangente all’ellisse in *P* utilizzando:

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.}$$ — **formula di sdoppiamento**

ESERCIZIO GUIDA Rappresentiamo le equazioni delle rette tangenti all’ellisse di equazione $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{5} = 1$, condotte dal punto $A(0; -7)$.

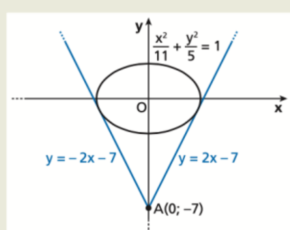
L’equazione della retta generica passante per *A* è:

$$y + 7 = m(x - 0) \quad \to \quad y = mx - 7.$$

Scriviamo il sistema formato dalle equazioni della retta e dell’ellisse e imponiamo la condizione di tangenza.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ y = mx - 7 \end{cases} \quad \to \quad \frac{x^2}{11} + \frac{(mx - 7)^2}{5} = 1 \quad \to$$

$$(5 + 11m^2)x^2 - 154mx + 484 = 0$$



$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \to \quad (-77m)^2 - 484 \cdot (5 + 11m^2) = 0 \quad \to \quad 605m^2 = 2420 \quad \to \quad m^2 = 4 \quad \to \quad m = \pm 2$$

Le tangenti hanno equazioni: $y = 2x - 7$, $y = -2x - 7$.

Trovare per quali valori di m la retta y = mx è tangente alla parabola $y = x^2 - 6x + 8$.

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

$mx = x^2 - 6x + 8$
$x^2 - x(6 + m) + 8 = 0$

la condizione di tangenza è
$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$

$(6 + m)^2 - 32 = 0$
$36 + 12m + m^2 - 32 = 0$
$m^2 + 12m + 4 = 0$
$m_{12} = -6 \pm \sqrt{36 - 4} = -6 \pm \sqrt{32} = -6 \pm 4\sqrt{2}$

da cui le equazioni delle tangenti

$y = \left(-6 - 4\sqrt{2}\right)x$ e $y = \left(-6 + 4\sqrt{2}\right)x$

Trovare le intersezioni dell'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ con la circonferenza $9x^2+9y^2=145$.

Mettendo a sistema le due equazioni abbiamo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \\ 9x^2+9y^2=145 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2=145-9y^2 \\ 9x^2+25y^2=225 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda

$145-9y^2+25y^2=225$

$16y^2=225-145$

$16y^2=80$

$y=\pm\sqrt{\frac{80}{16}}=\pm\sqrt{\frac{10}{2}}=\pm\sqrt{5}$

Conseguentemente

$x^2=\frac{145-9\bullet 5}{9}=\frac{100}{9}$

$x=\pm\sqrt{\frac{100}{9}}=\pm\frac{10}{3}$

In conclusione i punti d'intersezione cercati sono:

$A(\frac{10}{3};\sqrt{5})$ $B(-\frac{10}{3};-\sqrt{5})$ $C(-\frac{10}{3};\sqrt{5})$ $D(\frac{10}{3};-\sqrt{5})$

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della tangente per $P(4, 1)$ all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

Sostituiamo le coordinate di P nell'equazione dell'ellisse:

$\frac{16}{20}+\frac{1}{5}=\frac{20}{20}=1$ P è un punto dell'ellisse.

Possiamo applicare le formule di sdoppiamento: nell'equazione dell'ellisse nella forma $x^2+4y^2=20$

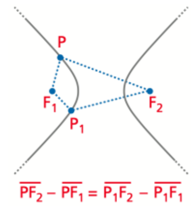
operiamo le seguenti sostituzioni:

$x_0x=4x$ al posto di x^2 $y_0y=y$ al posto di y^2

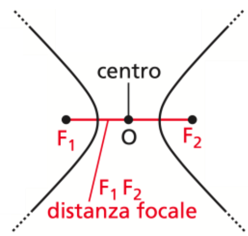
L'equazione della tangente per P è quindi $4x+4y=20 \longrightarrow x+y=5$

Iperbole come luogo geometrico

DEFINIZIONE
Dati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **iperbole** il luogo geometrico dei punti P del piano tali che sia costante la differenza delle distanze di P da F_1 e da F_2: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \text{costante}.$



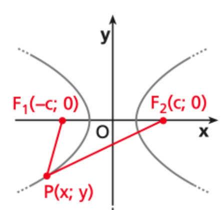
F_1 e F_2 sono i **fuochi** dell'iperbole.
Il punto medio del segmento F_1F_2 è il **centro**.
Indichiamo con:
- $2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;
- $2a$ la differenza costante delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi → $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a.$



Si ha $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| < \overline{F_1F_2} \rightarrow 2a < 2c \rightarrow \boldsymbol{a < c}.$

Iperbole con i fuochi sull'asse *x*

Consideriamo un'iperbole con centro in $O(0;\,0)$ e fuochi sull'asse x, $F_1(-c;\,0)$ e $F_2(c;\,0)$.
Sia $P(x;\,y)$ un generico punto del piano, allora
$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad \overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$



P appartiene all'iperbole se e solo se $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a.$
Sostituendo $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ si ha: $\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$

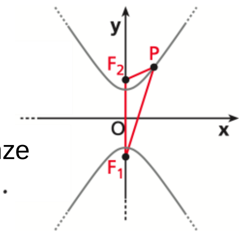
Poiché $0 < a < c$, allora $a^2 < c^2 \rightarrow c^2 - a^2 > 0$.
Ponendo $\boldsymbol{c^2 - a^2 = b^2}$, si ottiene l'**equazione canonica** dell'iperbole con i fuochi sull'asse x:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse *x*

Iperbole con i fuochi sull'asse *y*

Consideriamo un'iperbole con centro in $O(0; 0)$ e fuochi sull'asse y, $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.



Indichiamo con $2b$ la differenza costante delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi → $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2b.$

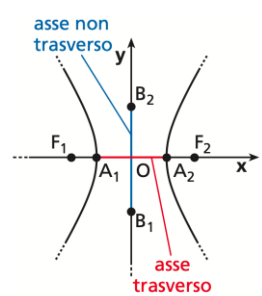
Con calcoli analoghi a quelli del caso precedente ma ponendo $\boldsymbol{c^2 - b^2 = a^2}$, si ottiene l'**equazione canonica** dell'iperbole con i fuochi sull'asse y:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse *y*

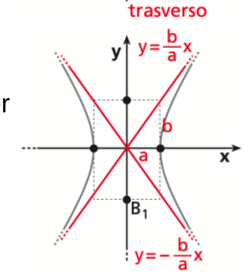
Vertici, assi e asintoti

Consideriamo un'iperbole con i fuochi sull'asse x. $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ sono le intersezioni dell'iperbole con l'asse x e si dicono **vertici reali**. Il segmento A_1A_2 si chiama **asse trasverso**.



L'iperbole non ha intersezioni con l'asse y, ma è comunque utile considerare i punti $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$, detti **vertici non reali**. Il segmento B_1B_2 si chiama **asse non trasverso**.

Il rettangolo dai lati paralleli agli assi e passanti per A_1, A_2, B_1 e B_2 permette di disegnare gli asintoti:



$$y = \frac{b}{a}x \text{ e } y = -\frac{b}{a}x.$$

equazione degli asintoti

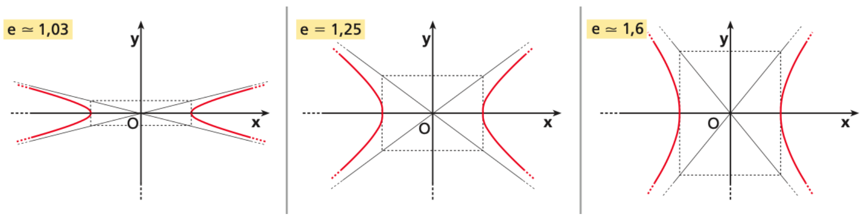
Eccentricità

Il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse trasverso di un'iperbole è detto **eccentricità**. Si indica con *e*. Vale $e > 1$.

Se i fuochi sono sull'asse *x*, $\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}$.

Se i fuochi sono sull'asse *y*, $\boldsymbol{e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}}$.

L'eccentricità *e* regola l'apertura dei rami dell'iperbole.



	Iperbole con i fuochi sull'asse x	Iperbole con i fuochi sull'asse y
Equazione	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
Semiasse trasverso	a (in corrispondenza del denominatore di x^2)	b (in corrispondenza del denominatore di y^2)
Semiasse non trasverso	b	a
Vertici	$A_1(-a, 0)$ $A_2(a, 0)$	$B_1(0, -b)$ $B_2(0, b)$
Relazione tra i coefficienti	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
Fuochi	$F_1\left(-\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$ $F_2\left(\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$	$F_1\left(0, -\sqrt{a^2+b^2}\right)$ $F_2\left(0, \sqrt{a^2+b^2}\right)$
Asintoti	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{b}{a}x$

ESEMPIO Determiniamo l'equazione dell'iperbole che passa per due punti assegnati:

$$P\left(\frac{1}{2},-1\right) \qquad Q\left(1,\sqrt{7}\right)$$

Se consideriamo l'equazione del tipo $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

imponendo il passaggio per i due punti P e Q e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1 \\ \dfrac{1}{a^2}-\dfrac{7}{b^2}=1 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{1}{8} \\ b^2=1 \end{cases}$$

L'iperbole ha quindi equazione $8x^2-y^2=1$

ESEMPIO

Considerando ora l'equazione $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ e scriviamo il sistema associato:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=-1 \\ \dfrac{1}{a^2}-\dfrac{7}{b^2}=-1 \end{cases}$$

tale sistema ammette la soluzione $\begin{cases} a^2=-\dfrac{1}{8} \\ b^2=-1 \end{cases}$, algebricamente non accettabile.

L'IPERBOLE EQUILATERA

Un'iperbole si dice equilatera se ha i semiassi uguali, cioè se $a = b$

Equazione riferita al centro e agli assi:

- $x^2 - y^2 = a^2$ se i fuochi sono sull'asse x e si ha che:
  - i vertici hanno coordinate $(\pm a, 0)$
  - i fuochi hanno coordinate $(\pm a\sqrt{2}, 0)$
- $x^2 - y^2 = -a^2$ se i fuochi sono sull'asse y e si ha che:
  - i vertici hanno coordinate $(0, \pm a)$
  - i fuochi hanno coordinate $(0, \pm a\sqrt{2})$

Gli asintoti, in entrambi i casi, hanno equazioni $y = \pm x$

Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione $7x^2 - 6y^2 = -1$.

Questa è l'equazione di un iperbole centrata nell'origine e con i fuochi sull'asse y, ma già in forma normale. Di conseguenza, per trovare i coefficienti caratteristici possiamo scrivere:

$$a^2 = \frac{1}{7} \quad ; \quad b^2 = \frac{1}{6} \tag{11.12}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{11.13}$$

I vertici hanno coordinate:

$$V_r\left(0; \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad ; \quad V_i\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}}; 0\right) \tag{11.14}$$

I fuochi sono:

$$F\left(0; \pm\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{6}}\right) = \left(0; \pm\sqrt{\frac{13}{42}}\right) \tag{11.15}$$

Gli asintoti hanno equazione:

$$y = \pm\frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{\sqrt{7}}}x = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}x = \pm\sqrt{\frac{7}{6}}x \tag{11.16}$$

Determinare l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria , e aventi vertici V in (±1;0) e passante per il punto P(4; $\sqrt{5}$).

L'equazione della generica iperbole riferita ai suoi assi ha espressione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Imponiamo il passaggio nel vertice e nel punto:

$$\begin{matrix} V \\ P \end{matrix}\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 \\ \frac{16}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ -\frac{5}{b^2} = 1 - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ -5 = b^2 - 16b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 5 = 15b^2 \end{cases}$$

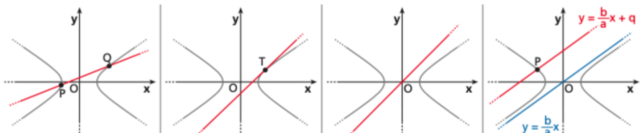
$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b_{12} = \pm\sqrt{\frac{5}{15}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ne consegue che l'equazione cercata è: $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$ cioè

$x^2 - 3y^2 = 1$

La posizione di una retta rispetto a un'iperbole dipende dal numero di soluzioni del sistema formato dalle equazioni dell'iperbole e della retta. Applicando il metodo di sostituzione, si ottiene l'**equazione risolvente**:

- se $\Delta > 0$, la retta è **secante** l'iperbole in due punti;
- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente** all'iperbole in un punto;
- se $\Delta < 0$, la retta è **esterna** all'iperbole;
- se è di primo grado, la retta è **secante** l'iperbole in un solo punto.



a. La retta è secante l'iperbole. I punti di intersezione sono due.

b. La retta, non parallela agli asintoti, è tangente all'iperbole. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna all'iperbole. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela a un asintoto: la retta è secante, ma il punto di intersezione è unico.

Trova la posizione reciproca tra la retta $y = \sqrt{3}x + 4$ e l'iperbole $3x^2 - y^2 = 4$ e gli eventuali punti di intersezione.

Risolviamo il sistema tra l'equazione dell'iperbole e della retta.

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 4 \\ 3x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \quad ; \quad 3x^2 - (\sqrt{3}x + 4)^2 = 4 \quad ; \quad 3x^2 - 3x^2 - 8\sqrt{3}x - 16 = 4 \tag{11.25}$$

$$-8\sqrt{3}x - 16 = 4 \quad ; \quad x = -\frac{20}{8\sqrt{3}} = -\frac{5}{2\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{6} \tag{11.26}$$

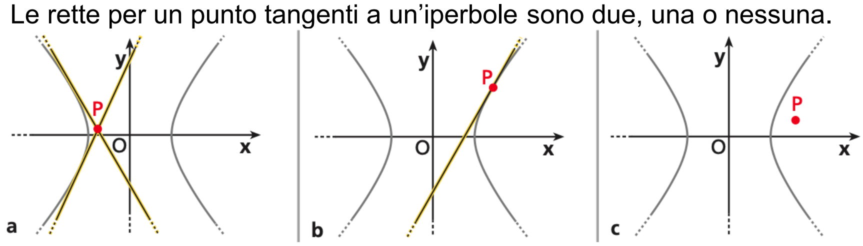
$$y = \sqrt{3}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{6}\right) + 4 = -\frac{15}{6} + 4 = \frac{-15+24}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \tag{11.27}$$

La retta è secante. Il sistema formato dell'equazione dell'iperbole e della retta ci porta ad una equazione di primo grado, così che il punto di intersezione é solo uno.

Le coordinate del punto di intersezione sono $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{6}; \frac{3}{2}\right)$.

Rette tangenti a un'iperbole

Le rette per un punto tangenti a un'iperbole sono due, una o nessuna.



La tangenti si trovano ponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente.

Se il punto $P(x_0; y_0)$ appartiene all'iperbole, si può determinare l'equazione della retta tangente in P con la **formula di sdoppiamento**:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1; \quad \text{per l'iperbole } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1. \quad \text{per l'iperbole } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Iperbole equilatera

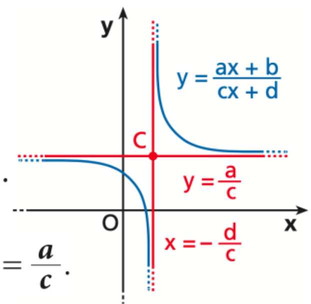
L'equazione di un'**iperbole equilatera** riferita ai propri asintoti è:

$xy = k$, con k costante positiva o negativa.

Gli assi di simmetria dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti sono le bisettrici dei quadranti, quindi fuochi e vertici appartengono a tali rette.

In generale, si può dimostrare che un'iperbole equilatera che ha gli asintoti paralleli agli assi cartesiani, ha un'equazione del tipo:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0.$$



Le equazioni degli asintoti sono: $x = -\dfrac{d}{c}$ e $y = \dfrac{a}{c}$.

Le coordinate del centro di simmetria sono: $C\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione $xy = -3$.

Questa è l'equazione di un iperbole equilatera centrata nell'origine e riferita agli assi cartesiani. Di conseguenza, per trovare i coefficienti caratteristici possiamo scrivere:

$$k = -3 \tag{11.18}$$

I vertici hanno coordinate:

$$V_r(\pm\sqrt{3}; \mp\sqrt{3}) \tag{11.19}$$

I fuochi sono:

$$F(\pm\sqrt{6}; \mp\sqrt{6}) \tag{11.20}$$

Gli asintoti sono gli assi cartesiani.

Trova gli elementi fondamentali dell'iperbole di equazione $y = \frac{2x-3}{4x+5}$.

Questa è l'equazione di un iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani e traslata rispetto all'origine. Di conseguenza, per trovare i coefficienti caratteristici possiamo scrivere:

$$a = 2 \quad ; \quad b = -3 \quad ; \quad c = 4 \quad ; \quad d = 5 \tag{11.22}$$

Il centro di simmetria ha coordinate:

$$C\left(-\frac{5}{4}; \frac{2}{4}\right) = \left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right) \tag{11.23}$$

Gli asintoti hanno equazione:

$$x = -\frac{5}{4} \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \tag{11.24}$$

ESERCIZIO GUIDA Determiniamo l'equazione dell'iperbole avente un fuoco nel punto $F\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$ e un asintoto di equazione $y = \frac{4}{3}x$.

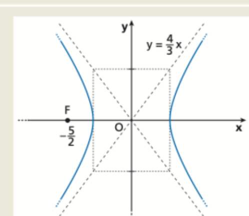
L'equazione dell'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, poiché il fuoco è sull'asse x.

Dalle coordinate di F deduciamo che $c = \frac{5}{2}$, quindi:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{4}.$$

Dall'equazione dell'asintoto ricaviamo:

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{9} \rightarrow b^2 = \frac{16}{9}a^2.$$



Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 36a^2 + 64a^2 = 225 \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{225}{100} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{9}{4} \\ b^2 = 4 \end{cases},$$

da cui, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione canonica:

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

ESERCIZIO GUIDA Disegniamo il grafico della funzione omografica di equazione $y=\frac{6x+1}{2x-4}$.

L'equazione $y=\frac{6x+1}{2x-4}$ rappresenta un'iperbole equilatera traslata.

Gli asintoti hanno equazioni

$$x=-\frac{d}{c} \rightarrow x=-\frac{-4}{2} \rightarrow x=2,$$

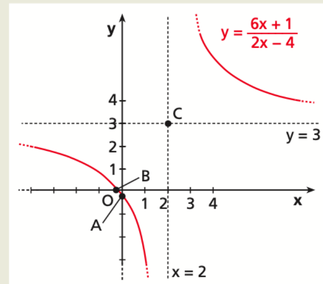
$$y=\frac{a}{c} \rightarrow y=\frac{6}{2} \rightarrow y=3.$$

Il centro di simmetria è $C(2;3)$.

Per disegnare il grafico determiniamo le intersezioni con gli assi:

$$\text{asse } y: \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{6x+1}{2x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow A\left(0;-\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{asse } x: \begin{cases} y=0 \\ y=\frac{6x+1}{2x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 6x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow B\left(-\frac{1}{6};0\right).$$



BIBLIOGRAFIA - SITOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi, Trifone *La matematica del triennio* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas
- Valter Gentile *Esercizi svolti di geometria analitica*
- Massimiliano Virdis *Esercizi di geometria analitica*
- http://eurekamat.weebly.com/