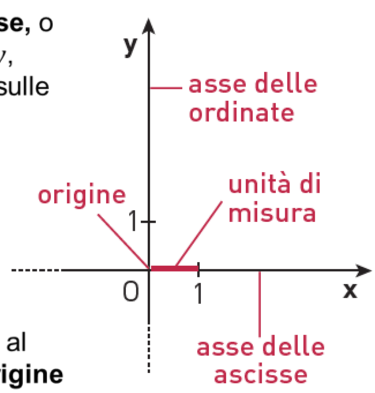
Piano cartesiano

Punti nel piano cartesiano

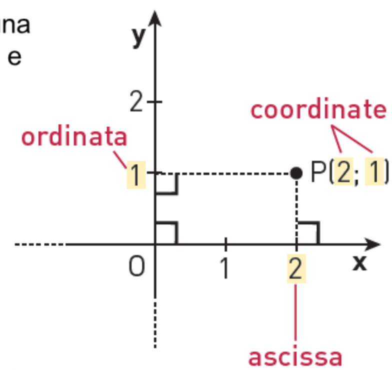
Nel piano cartesiano, l'**asse delle ascisse,** o asse x, e l'**asse delle ordinate**, o asse y, sono due rette orientate perpendicolari, sulle quali è fissata un'unità di misura.



Per entrambi gli assi lo zero corrisponde al loro punto di incontro, che chiamiamo **origine** e indichiamo con *O*.

Punti nel piano cartesiano

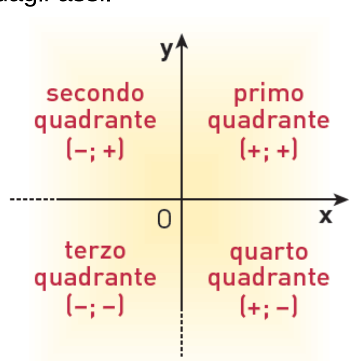
A ogni punto P del piano corrisponde una coppia ordinata di numeri reali $(x_P; y_P)$ e viceversa.



Indichiamo il punto P con $P(x_P; y_P)$; x_P e y_P sono le **coordinate** di P, x_P è l'**ascissa** e y_P è l'**ordinata**.

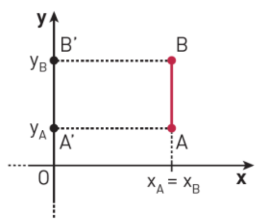
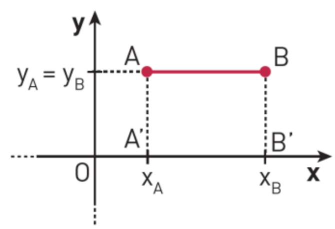
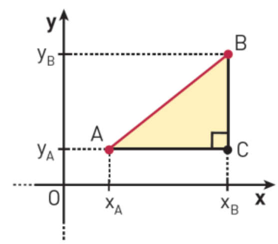
Punti nel piano cartesiano

Chiamiamo **quadranti** i punti interni ai quattro angoli retti in cui il piano cartesiano è diviso dagli assi.



Per ogni quadrante sono indicati i segni delle coordinate dei punti appartenenti al quadrante stesso.

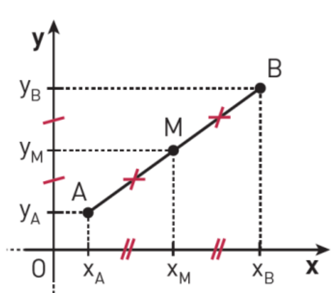
Distanza fra due punti

PUNTI CON LA STESSA ASCISSA	PUNTI CON LA STESSA ORDINATA	PUNTI CON ASCISSE E ORDINATE QUALSIASI
		
$\overline{AB} = \lvert y_B - y_A \rvert$	$\overline{AB} = \lvert x_B - x_A \rvert$	$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Punto medio di un segmento

Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, il punto medio M del segmento AB ha coordinate:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



ESEMPIO
Se $A(-2; 1)$ e $B(3; 5)$, le coordinate del punto medio M sono:

$$x_M = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

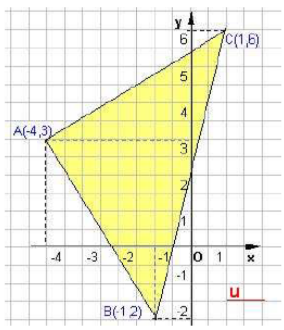
Verificare che il triangolo di vertici A(– 4 ; 3), B(–1 ; –2), C(1 ; 6) è isoscele e determinarne l'area.

Applicando la formula d = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, della distanza tra due punti, si ottiene

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-1+4)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{(3)^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

AC = $\sqrt{(x_c-x_A)^2+(y_c-y_A)^2} = \sqrt{(1+4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{(5)^2+(3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

BC = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(1+1)^2+(6+2)^2} = \sqrt{(2)^2+(8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$



Poichè risulta AB = AC, il triangolo è isoscele sulla base BC.

Inoltre il triangolo ABC è rettangolo: infatti basta verificare il teorema di Pitagora , cioè l'identità

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Si ottiene $68 = 34 + 34$; $68 = 68$.
Dunque il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa BC.
L'area del triangolo è

$$As = \frac{ABxBC}{2} = \frac{\sqrt{34}x\sqrt{34}}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Rette particolari passanti per l'origine

EQUAZIONE DELL'ASSE *X*

$$y = 0$$

Infatti tutti i punti dell'asse delle ascisse hanno ordinata uguale a 0.

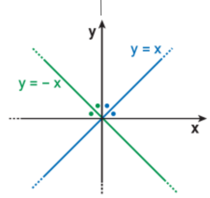
EQUAZIONE DELL'ASSE *Y*

$$x = 0$$

L'asse delle ordinate è l'unica retta passante per l'origine che non ha equazione del tipo $y = mx$.

EQUAZIONE DELLA BISETTRICE DEL PRIMO E TERZO QUADRANTE

$$y = x$$



EQUAZIONE DELLA BISETTRICE DEL SECONDO E QUARTO QUADRANTE

$$y = -x$$

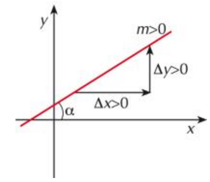
Equazione generale della retta

L'**equazione** di una retta in **forma esplicita** è

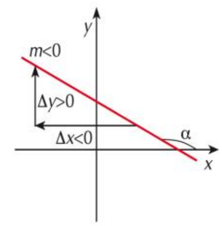
$$\boldsymbol{y = mx + q},$$

dove m è il **coefficiente angolare** e q è l'**ordinata all'origine**.

Al variare di m e q in $\mathbb{R}$, questa equazione rappresenta tutte le rette del piano cartesiano, tranne quelle parallele all'asse y, che hanno equazione del tipo $x = k$.



$m > 0 \rightarrow \alpha$ acuto



$m < 0 \rightarrow \alpha$ ottuso

Equazione generale della retta

L'equazione generale di una retta in **forma implicita** è $ax + by + c = 0$, con a e b non entrambi nulli, e rappresenta *tutte* le rette del piano.

Il **coefficiente angolare** può essere calcolato come $m = -\frac{a}{b}$.

ESEMPIO

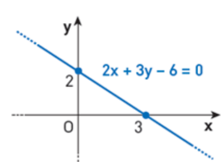
Rappresentiamo la retta di equazione $2x + 3y - 6 = 0$ e troviamo il suo coefficiente angolare. Determiniamo i punti di intersezione con gli assi:

se $x = 0$, $y = 2$; se $y = 0$, $x = 3$.

Il coefficiente angolare è: $-\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$.

Verifichiamolo scrivendo l'equazione della retta in forma esplicita:

$$2x + 3y - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 3y = -2x + 6 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + 2.$$



L'equazione generale della retta può essere espressa:

- in forma esplicita: $y = mx + q$
- in forma implicita: $ax + by + c = 0$

ESEMPI

L'equazione $y = \frac{1}{4}x - 3$ (forma esplicita) può essere scritta in forma implicita:

$$4y = x - 12 \rightarrow x - 4y - 12 = 0$$

Viceversa $2x + 3y - 1 = 0$ (forma implicita) può essere scritta in forma esplicita:

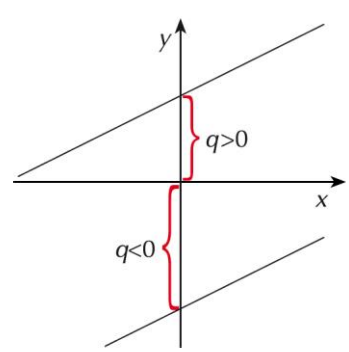
$$3y = -2x + 1 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Significato geometrico di *q*.

Nell'equazione $y = mx + q$ per $x = 0$ si ottiene $y = q$

Il punto di coordinate $(0; q)$ rappresenta il punto di intersezione tra la retta e l'asse delle y.

q si dice **ordinata all'origine.**



L'equazione generale della retta può essere espressa:

- in forma esplicita: $y = mx + q$
- in forma implicita: $ax + by + c = 0$

ESEMPI

L'equazione $y = \frac{1}{4}x - 3$ (forma esplicita) può essere scritta in forma implicita:

$$4y = x - 12 \rightarrow x - 4y - 12 = 0$$

Viceversa $2x + 3y - 1 = 0$ (forma implicita) può essere scritta in forma esplicita:

$$3y = -2x + 1 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

- Nel caso $b \neq 0$ le relazioni che legano la forma esplicita a quella implicita sono:

$$m = -\frac{a}{b} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{c}{b}$$

ESEMPIO

Data la retta di equazione $2x + 3y - 1 = 0$

Il coefficiente angolare è $m = -\frac{2}{3}$

L'ordinata all'origine è $q = \frac{1}{3}$

Il **grafico** di una retta, così come quello di una qualsiasi curva, è costituito da tutti e soli i punti le cui coordinate ne soddisfano l'equazione.

Sappiamo che per due punti del piano passa una e una sola retta.

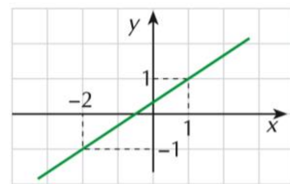
Quindi per disegnare la retta di equazione $2x - 3y + 1 = 0$ si segue la seguente procedura:

- scriviamo l'equazione in forma esplicita $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
- troviamo il primo punto attribuendo il valore 1 alla variabile *x*:

$$y = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{il punto ha coordinate } (1,\ 1)$$

- troviamo il secondo punto attribuendo il valore −2 a *x*:

$$y = \frac{2}{3} \cdot \left(-2\right) + \frac{1}{3} = -1 \quad \rightarrow \quad \text{il punto ha coordinate } (-2,\ -1)$$



x	1	−2
y	1	−1

Rette parallele e rette perpendicolari

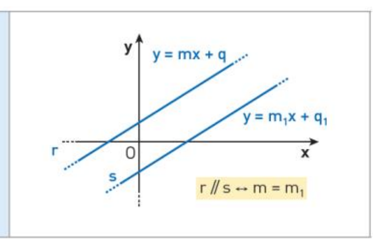
TEOREMA

Due rette r e s, di equazioni

$$y = mx + q \text{ e } y = m_1 x + q_1,$$

sono parallele *se e solo se* hanno lo stesso coefficiente angolare.

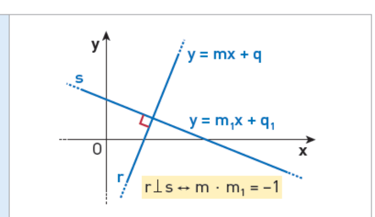
$$r \,/\!/\, s \leftrightarrow m = m_1$$



TEOREMA

Due rette r e s, di equazioni $y = mx + q$ e $y = m_1 x + q_1$, sono perpendicolari *se e solo se* il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1.

$$r \perp s \leftrightarrow m \cdot m_1 = -1$$



Date due rette $r: y = mx + q$ e $s: y = m'x + q'$

- La condizione di parallelismo è $m = m'$
- La condizione di perpendicolarità è $m \cdot m' = -1$ cioè $m' = -\frac{1}{m}$

ESEMPIO

La retta *r* di equazione $3x - 2y + 1 = 0$ è parallela alla retta *s* di equazione $6x - 4y - 5 = 0$

Infatti

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$m_r = m_s$$

La retta *r* è perpendicolare alla retta *t* di equazione $2x + 3y = 0$

Infatti $m_t = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \longrightarrow m_r \cdot m_t = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

Esempio	**Controesempio**
Le due rette di equazioni: $y = -4x$ e $y = \frac{1}{4}x + 4$ hanno coefficienti angolari: $m = -4$ e $m' = \frac{1}{4}$ Poiché $mm' = (-4) \cdot \frac{1}{4} = -1$, le due rette sono perpendicolari.	Le due rette di equazioni: $3x - y - 1 = 0$ e $x - 3y + 3 = 0$ hanno equazioni esplicite: $y = 3x - 1$ e $y = \frac{1}{3}x + 1$ da cui appare che i coefficienti angolari sono: $m = 3$ e $m' = \frac{1}{3}$ Poiché $mm' = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, le due rette **non** sono perpendicolari.

Verificare che le rette *r* e *s* di equazioni

$$r: 2x + 3y - 5 = 0 \quad \text{e} \quad s: 4x + 6y + 3 = 0$$

sono parallele.

- Le equazioni di *r* e *s* sono nella forma implicita $ax + by + c = 0$; ricordando che $m = -\frac{a}{b}$, troviamo

$$\left.\begin{array}{l} m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \\ m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \longrightarrow m_r = m_s \longrightarrow r // s$$

- In alternativa, avremmo potuto dedurre il parallelismo di *r* e *s* scrivendo in forma esplicita le corrispondenti equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} r: 3y = -2x + 5 \longrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ s: 6y = -4x - 3 \longrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \longrightarrow m_r = m_s \longrightarrow r // s$$

Dopo aver verificato che le rette *r* e *s* di equazioni

$$r: 2x + y - 3 = 0 \qquad s: x - y + 1 = 0$$

sono incidenti, determinare il loro punto *P* di intersezione.

Per verificare quanto richiesto, possiamo ad esempio calcolare i coefficienti angolari di *r* e *s*. Otteniamo:

$$m_r = -2 \qquad m_s = 1$$

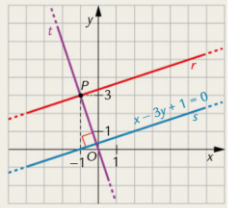
Poiché i coefficienti angolari sono diversi, *r* e *s* sono incidenti. Il loro punto *P* di intersezione si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow P\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Dati il punto $P(-1, 3)$ e la retta s: $x - 3y + 1 = 0$, determiniamo l'equazione della retta:

a. **r passante per P e parallela a s;**

b. **t passante per P e perpendicolare a s.**



Scriviamo l'equazione di s in forma esplicita in modo da ricavare il coefficiente angolare m_s:

$$s: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad m_s = \frac{1}{3}$$

In entrambi i casi a e b, applichiamo la formula $y - y_P = m(x - x_P)$ con $x_P = -1$ e $y_P = 3$.

a. r e s devono essere parallele, quindi $m_r = m_s = \frac{1}{3}$.

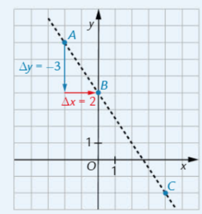
Determiniamo l'equazione di r: $y - 3 = \frac{1}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

b. t e s devono essere perpendicolari, quindi $m_t = -\frac{1}{m_s} = -3$.

Determiniamo l'equazione di t: $y - 3 = -3(x - (-1)) \Rightarrow y - 3 = -3x - 3 \Rightarrow y = -3x$

Stabilisci se i punti $A(-2, 7)$, $B(0, 4)$ e $C(4, -2)$ sono allineati.

Per stabilire se i tre punti sono allineati basta calcolare i coefficienti angolari delle due rette AB e BC: se sono uguali, allora i punti sono allineati, altrimenti non lo sono (sai giustificare perché?). Abbiamo:



$$m_{AB} = \frac{\overbrace{4-7}^{\Delta y}}{\underbrace{0-(-2)}_{\Delta x}} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

quindi puoi concludere che...

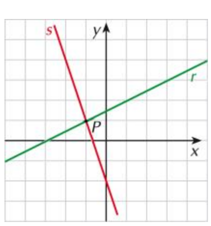
Per studiare la posizione reciproca di due rette:

$$y = m_1 x + q_1$$
$$y = m_2 x + q_2$$

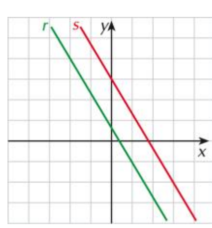
si considera il sistema lineare formato dalle loro equazioni

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$$

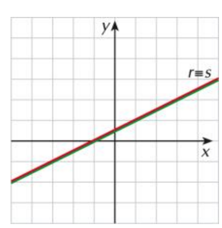
Si possono presentare i seguenti casi:



Rette incidenti nel punto P
Sistema determinato



Rette parallele
Sistema impossibile



Rette coincidenti
Sistema indeterminato

ESEMPI Posizione reciproca di due rette

Stabiliamo la posizione reciproca delle rette per ciascuna delle seguenti coppie:

a. $2x - y + 3 = 0$ e $x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 0$

b. $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ e $\sqrt{2}x - 2y + 2 = 0$

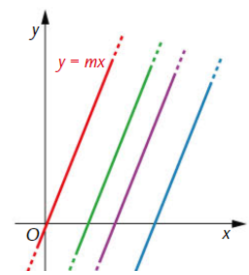
c. $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$ e $x + y - \sqrt{2} = 0$

a. Poiché $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 2$, le due rette sono *coincidenti*.

b. Poiché $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{c}{c'} = 1$, le due rette sono *parallele distinte*.

c. Poiché $\frac{a}{a'} = \sqrt{2}$ e $\frac{b}{b'} = -1$, risulta $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, quindi le due rette sono *incidenti*.

Risolvendo il sistema $\begin{cases} \sqrt{2}x - y - 1 = 0 \\ x + y - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$, si trova che le due rette si intersecano nel punto di coordinate $(1, \sqrt{2} - 1)$.



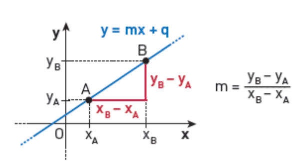
Coefficiente angolare come rapporto

Per determinare il **coefficiente angolare della retta passante per due punti** richiamiamo il seguente teorema.

TEOREMA

Dati i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ della retta r di equazione $y = mx + q$, il coefficiente angolare di r è uguale al rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei due punti, prese nello stesso ordine.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad \text{con } x_B \neq x_A.$$



Come nell'enunciato del teorema, deve essere $x_B \neq x_A$.
Se $x_B = x_A$, la retta è parallela all'asse y e il coefficiente angolare non esiste.
Se invece $y_B = y_A$, la retta è parallela all'asse x e il suo coefficiente angolare è $m = 0$, come si può calcolare con la formula.

Retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto

L'equazione di una retta passante per il punto $A(x_A; y_A)$ e di coefficiente angolare m è:

$$y - y_A = m(x - x_A).$$

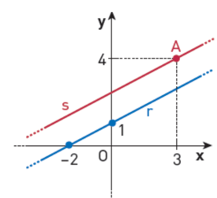
equazione di una retta passante per $A(x_A; y_A)$ e di coefficiente angolare m

ESEMPIO

La retta s passante per $A(3; 4)$ è parallela alla retta r di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$, quindi anche il suo coefficiente angolare vale $\frac{1}{2}$. L'equazione di s è:

$$\underset{y_A}{y - 4} = \frac{1}{2}(x - \underset{x_A}{3}) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 4 \rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$



ESEMPIO

La retta passante per $A(2, -3)$ di coefficiente angolare $m = 4$ ha equazione:

$$y - (-3) = 4(x - 2)$$

$$y + 3 = 4x - 8$$

in forma esplicita $\quad y = 4x - 11$

in forma implicita $\quad 4x - y - 11 = 0$

Determiniamo per quali valori di k la retta di equazione $(k - 1)x + ky + 1 = 0$ forma con l'asse x un angolo acuto.

- Affinché la retta formi con l'asse x un angolo acuto, essa non potrà essere parallela all'asse y (perché in tal caso l'angolo formato con l'asse x sarebbe retto).
  Possiamo quindi supporre $k \neq 0$ e porre l'equazione della retta in forma esplicita: $y = \frac{1-k}{k}x - \frac{1}{k}$.
- L'angolo formato dalla retta con l'asse x sarà acuto se e solo se il coefficiente angolare è *positivo*.
  Deve allora essere verificata la disequazione $\frac{1-k}{k} > 0$, da cui segue: $0 < k < 1$.

Verificare che le rette r e s di equazioni

$$r: 2x + 3y - 5 = 0 \quad \text{e} \quad s: 4x + 6y + 3 = 0$$

sono parallele.

■ Le equazioni di r e s sono nella forma implicita $ax + by + c = 0$; ricordando che $m = -\frac{a}{b}$, troviamo

$$\left.\begin{array}{l} m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \\ m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \longrightarrow m_r = m_s \longrightarrow r // s$$

■ In alternativa, avremmo potuto dedurre il parallelismo di r e s scrivendo in forma esplicita le corrispondenti equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} r: 3y = -2x + 5 \longrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ s: 6y = -4x - 3 \longrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \longrightarrow m_r = m_s \longrightarrow r // s$$

Fasci di rette

L'insieme di tutte le rette passanti per il punto A è detto **fascio proprio** delle rette passanti per A e il punto A è il **centro del fascio**.
La sua equazione è:

$$y - y_A = m(x - x_A) \vee x = x_A$$

L'insieme di tutte le rette parallele a una retta data è detto **fascio improprio** di rette.
In generale, data una retta r di coefficiente angolare m_1, il **fascio di rette parallele a r** ha equazione:

$$y = m_1 x + q, \quad \text{con } q \in \mathbb{R}$$

Retta passante per due punti

Consideriamo una retta passante per $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ con $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$. La sua equazione è:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$

equazione della retta passante per A e per B

ESEMPIO

Se $A(3; 5)$ e $B(-1; 2)$, la retta AB ha equazione:

$$\frac{y-5}{2-5} = \frac{x-3}{-1-3} \rightarrow y = \frac{3}{4}(x-3)+5 \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

- Per scrivere l' equazione della retta che passa per i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ si usa la formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ESEMPIO

La retta passante per $A(1, -3)$ e $B(3, -2)$ ha equazione

$$\frac{y+3}{-2+3} = \frac{x-1}{3-1}$$

Calcolando si ottiene $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Scrivere l'equazione della retta passante per A(1,3) e parallela a quella passante per i punti B(–1,–6) e C(2,3).

Applicando la formula della retta passante per un punto abbiamo:
$y - y_1 = m(x - x_1)$ quindi
$y - 3 = m(x - 1)$
Determiniamo ora la retta per BC, sfruttando l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

evidenziandone l'espressione del coefficiente angolare m, cioè

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

dati i punti B(–1, –6) ; C(2,3) e applicando la formula avremo :

$$\frac{y+6}{x+1} = \frac{3+6}{2+1} \quad \text{da cui} \quad \frac{y+6}{x+1} = \frac{9}{3} = 3 = m'$$

Concludendo essendo le due rette parallele m = m' da cui

$$y - 3 = 3(x - 1)$$
$$y - 3 = 3x - 3$$
$$\mathbf{y = 3x}$$

Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per A(2,5) e B(–3,0); calcolare inoltre, l'intersezione di essa con la retta passante per C(7,2) e di coefficiente angolare –1.

Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

evidenziandone l'espressione del coefficiente angolare m, cioè

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Per i punti A(2,5); B(–3,0) applicando la formula avremo :

$$\frac{y-5}{x-2} = \frac{-5}{-5} \text{ da cui } \frac{y-5}{x-2} = 1 \text{ cioè } \quad \mathbf{m = 1} \text{ e la retta } \mathbf{y - 5 = x - 2}$$

Applicando la formula della retta passante per il punto C(7,2) con il coefficiente dato abbiamo:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y - 2 = -1(x - 7)$$
$$\mathbf{y - 2 = -x + 7}$$

Vediamone l'intersezione

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ \underline{x + y = 9} \\ 2x \; // = 6 \end{cases} \qquad \text{da cui } x = 3 \text{ ed } y = 6 \text{ e le coordinate dell'intersezione : } Q(3,6)$$

Distanza di un punto da una retta

La **distanza d** di un punto generico $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

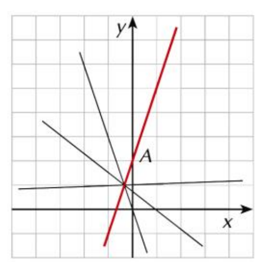
ESEMPIO

La distanza del punto $A(-1; 2)$ dalla retta di equazione $3x - 4y + 5 = 0$ è:

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 8 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

I Fasci di rette

- **Fascio proprio:** insieme di tutte e sole le rette che passano per un punto P assegnato.



$P(x_0; y_0)$: centro del fascio

Equazione del fascio: $y - y_0 = m(x - x_0)$

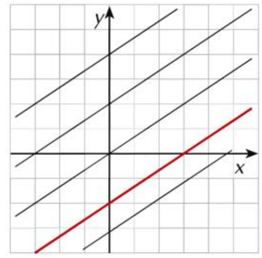
ESEMPIO

Equazione del fascio proprio di centro $P(2, -3)$

$$y - (-3) = m(x - 2) \longrightarrow y + 3 = mx - 2m \longrightarrow y = mx - 2m - 3$$

- **Fascio improprio:** insieme di tutte e sole le rette parallele a una retta data.

L'equazione di questo fascio ha un coefficiente angolare fisso e un'ordinata all'origine variabile.



ESEMPIO

Il fascio di rette parallele a quella di equazione $3x+5y-1=0$

ha equazione $3x+5y+k=0$

Al variare di *k* le rette del fascio hanno tutte lo stesso coefficiente angolare.

Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni: $3x+2y-1=0$ e $6x+4y+3=0$, stabilisci se è proprio o improprio e determina l'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1.

Soluzione

L'equazione del fascio è: $3x+2y-1+k\cdot(6x+4y+3)=0$

Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$3x+2y-1+6kx+4ky+3k=0\,;$

$(3+6k)x+(2+4k)y+3k-1=0\,.$

$$m=-\frac{a}{b}=-\frac{3+6k}{2+4k}=-\frac{3(1+2k)}{2(1+2k)}=-\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{3k-1}{2+4k}$$

Essendo il coefficiente angolare non dipendente dal parametro k, il fascio è improprio.

L'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1 si ottiene sostituendo le coordinate del punto $(0\,;1)$, oppure imponendo che l'ordinata all'origine sia uguale a 1.

$$q=1\,; \qquad -\frac{3k-1}{2+4k}=1\,; \qquad -3k+1=2+4k\,; \qquad 7k=-1\,; \qquad k=-\frac{1}{7} \qquad \Rightarrow$$

$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)-1}{2+4\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}\,; \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{-\frac{3}{7}-1}{2-\frac{4}{7}}\,; \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{-\frac{10}{7}}{\frac{10}{7}}\,;$$

$$y=-\frac{3}{2}x+1\,.$$

Scrivi l'equazione del fascio proprio di rette, passante per il punto $P\left(-2;\frac{1}{5}\right)$.

$x_1=\ldots,\; y_1=\frac{1}{5}$

$y-\ldots=m[x-(-2)]$

$y=m(x+2)+\ldots$

$y=m(x+2)+\ldots \vee x=\ldots$

Studia il fascio individuato dall'equazione $(3k+6)x+(3+2k)y-3=0$ *trovando le rette generatrici, il tipo di fascio e l'eventuale punto comune.*

Per trovare le rette generatrici e capire di che tipo di fascio si tratti sviluppiamo l'equazione, separando i termini col k da quelli senza.

$$\begin{aligned}(3k+6)x+(3+2k)y-3&=0\\ 3kx+6x+3y+2ky-3&=0\\ 6x+3y-3+k(3x+2y)&=0\end{aligned} \tag{3.51}$$

Per cui le rette generatrici sono:

$$6x+3y-3=0 \quad ; \quad 3x+2y=0 \tag{3.52}$$

Le rette non sono parallele perché i loro parametri non sono proporzionali ($6/3 \neq 3/2$) e quindi il fascio è proprio; possiamo trovare il punto comune facendo sistema tra le due rette.

$$\begin{cases}6x+3y-3=0\\ 3x+2y=0\end{cases} \tag{3.53}$$

$$3x=-2y \quad ; \quad x=-\frac{2y}{3}$$

$$6\left(-\frac{2y}{3}\right)+3y-3=0$$

$$-4y+3y-3=0$$

$$-y=3$$

$$y=-3 \quad ; \quad x=-\frac{2(-3)}{3}=2$$

Il punto è $P(2;-3)$.

Dato il fascio $(2k-1)x+(k+3)y-k+1=0$
Determinare :
- **a) centro del fascio**
- **b) la parallela all'asse y**
- **c) la parallela alla retta t) $x-3y+13=0$**

$$(2k-1)x+(k+3)y-k+1=0$$
$$2kx-x+ky+3y-k+1=0$$
$$3y-x+1+k(2x+y-1)=0$$

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\ 2\quad \underline{-x+3y+1=0}\\ // \quad +7y+1=0\end{cases} \quad \text{da cui } y=-\frac{1}{7} \text{ per sost. Con facili passaggi si ha } x=\frac{4}{7}$$

b) la parallela all'asse y (condizione : b = 0) quindi

$$k+3=0$$
$$k=-3$$

sostituendo nel testo abbiamo l'equazione cercata

$$(-6-1)x+(-3+3)y+3+1=0$$
$$-7x+4=0$$
$$x=\frac{4}{7}$$

c) la parallela alla retta t) $x-3y+13=0$

$m_t = 1/3$ $\quad m_f = -\dfrac{2k-1}{k+3}$ dovendo essere $m_f = m_t$ avremo

$$-\frac{2k-1}{k+3}=\frac{1}{3} \quad \text{con } k\neq-3$$
$$3(2k-1)=k+3$$
$$-6k+3=k+3$$
$$-7k=0 \quad \text{da cui} \quad \mathbf{k=0}$$

quindi la retta // è

$$\mathbf{x-3y-1=0}$$

Date le rette r) $2x-y+1=0$ ed s) $x+3y-5=0$
- **a) determinare il fascio,**
- **b) fra le infinite rette del fascio determinare quella che passa per l'origine,**
- **c) selezionare fra tutte le rette del fascio quella che passa per il punto A(3,2)**
- **d) fra le infinite rette determinare quella che è parallela alla q) $5x-3y+1=0$**
- **e) fra le infinite rette determinare la perpendicolare alla retta v) $3x-y+7=0$**
- **f) Determinare il centro del fascio**

a) determinare il fascio

$$2x-y+1+t(x+3y-5)=0$$
$$2x-y+1+tx+3ty-5t=0$$
$$\mathbf{x(2+t)+y(3t-1)-5t+1=0 \quad (*)}$$

b) fra le infinite rette del fascio determinare quella che passa per l'origine (cond : c= 0)

quindi $1-5t=0$ da cui $t=1/5$

c) selezionare fra tutte le rette del fascio quella che passa per il punto A(3,2)
basterà sostituire il punto dato nel fascio, ottenendo

$$3(2+t)-2(3t-1)-5t+1=0$$
$$6+3t-6t+2-5t+1=0$$
$$-8t+9=0$$
$$\mathbf{t=9/8}$$

d) fra le infinite rette determinare quella che è parallela alla q) $5x-3y+1=0$

La condizione è che la retta del fascio deve avere lo stesso coefficiente angolare m = m', quindi

$m_q = -a/b = 5/3$ $\quad m_f = m_q$ con $m_f = -\dfrac{2+t}{3t-1}$ da cui l'equazione

$-\dfrac{2+t}{3t-1}=\dfrac{5}{3}$ con la condizione $t\neq\dfrac{1}{3}$ (se non si pone tale condizione si potrebbe selezionare la retta con coeff. ang. 90° ; infinito!)

$$-3(2+t)=5(3t-1)$$
$$-6-3t=15t-5$$

$$-18t = 1$$
$$\mathbf{t = -1/18}$$

e) fra le infinite rette determinare la perpendicolare alla retta v) $3x - y + 7 = 0$
Condizione : $m_f \; m_r = -1$ dove $m_r = 3$

$$-\frac{3(2+t)}{3t-1} = -1$$
$$\frac{6+3t}{3t-1} = 1$$
$$6 + 3t = 3t - 1$$
$$\mathbf{6 = -1!!}$$

Ottenendo un assurdo se ne deduce che la retta cercata è quella esclusa.
N.B. : $m_s = -\frac{1}{3}$ opposto e reciproco di $m_v = 3$ infatti $m_s \; m_v = -1$
Conclusione, la retta s è quella cercata (è moltiplicata per il parametro)

f) Determinare il centro del fascio
Dalla (*) mettiamo a sistema le due equazioni delle rette, risolveremo il sistema con il metodo della add/ sott algebrica applicato due volte con la moltiplicazione di due fattori opportuni così da eliminare una delle due incognite, l'equazione che si ottiene, combinazione lineare delle precedenti due, ammetterà sempre la stessa soluzione:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$3\begin{cases} 6x - 3y + 3 = 0 \\ \underline{x + 3y - 5 = 0} \end{cases}$$
$$7x \quad // \quad -2 = 0 \qquad \text{da cui } x = \frac{2}{7}$$

$$\begin{array}{r} \\ -2 \end{array}\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ \underline{-2x - 6y + 10 = 0} \end{cases}$$
$$// \; -5y + 11 = 0 \qquad \text{da cui } y = \frac{11}{5}$$

BIBLIOGRAFIA - SITOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi, Trifone *La matematica del triennio* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas
- Valter Gentile *Esercizi svolti di geometria analitica*
- Massimiliano Virdis *Esercizi di geometria analitica*
- http://eurekamat.weebly.com/