Irrazionali…e non solo.

Equazioni irrazionali

DEFINIZIONE	ESEMPIO
Un'**equazione** è **irrazionale** se contiene almeno un radicale con l'incognita nel radicando.	$\sqrt{x+2} = 7$ è un'equazione irrazionale. $\sqrt{5}\,x = 3\sqrt{2}$ **non** è un'equazione irrazionale.

Per **risolvere un'equazione irrazionale** è necessario trasformarla in un'**equazione razionale equivalente**, che non contiene quindi radicali con l'incognita nel radicando.

Equazioni irrazionali

ESEMPIO

- $\sqrt{x} = +2$ è equivalente a $(\sqrt{x})^2 = (+2)^2 \to x = 4$;
  invece:
  $\sqrt{x} = -2$ **non** è equivalente a $(\sqrt{x})^2 = (-2)^2 \to x = 4$,
  perché la radice quadrata, quando esiste, non è mai negativa:
  $\sqrt{x} = -2$ non ha soluzioni.
- $\sqrt[3]{x} = +2$ è equivalente a $(\sqrt[3]{x})^3 = (+2)^3 \to x = 8$;
  è anche vero che:
  $\sqrt[3]{x} = -2$ è equivalente a $(\sqrt[3]{x})^3 = (-2)^3 \to x = -8$,
  perché la radice cubica di un numero esiste sempre e ha lo stesso segno del numero stesso.

Equazioni con radicali con indice pari

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = B^2(x) \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione irrazionale $\sqrt{3x+10} = 2-3x$.

L'equazione data è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2-3x \geq 0 \quad \text{— condizione di concordanza di segno} \\ 3x+10 = (2-3x)^2 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione trovando i valori $-\frac{1}{3}$ e 2.

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \vee x = 2 \end{cases}$$

L'unico valore accettabile è $x = -\frac{1}{3}$ perché è minore di $\frac{2}{3}$.

Concludiamo che l'unica soluzione dell'equazione irrazionale data è $-\frac{1}{3}$.

Le equazioni irrazionali possono anche essere del tipo

$$\sqrt{\mathbf{p(x)}} = \sqrt{\mathbf{q(x)}}$$

Risolverla equivale a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) = q(x) \end{cases}$$

Le prime due disequazioni sono imposte dalla condizione di esistenza dei radicali quadratici, mentre la terza si ottiene elevando al quadrato l'equazione assegnata.
Ecco un esempio di questa tipologia. Prendiamo l?equazione irrazionale $\sqrt{x-4} = \sqrt{2x+1}$
si impone il sistema

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x-4 = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -5 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione irrazionale assegnata non ha soluzione.

$\boldsymbol{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+5} = -3}$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{x+2} + 3 = 2\sqrt{x+5}$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -5 \end{cases}$ $x \geq -2$ $(*)$

Sotto queste condizioni, elevando ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{x+2}+3\right)^2 = \left(2\sqrt{x+5}\right)^2$; $x+2+9+6\sqrt{x+2} = 4(x+5)$;

$6\sqrt{x+2} = 4x+20-x-2-9$; $6\sqrt{x+2} = 3x+9$;

$2\sqrt{x+2} = x+3$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $x+3 \geq 0$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \left(2\sqrt{x+2}\right)^2 = (x+3)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ 4(x+2) = x^2+9+6x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ 4x+8 = x^2+9+6x \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+2x+1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1 \end{cases}$ $x = -1$

La soluzione $\boxed{\boldsymbol{x = -1}}$ è accettabile perché soddisfa le condizioni di esistenza $(*)$ $x \geq -2$.

Un altro tipo di equazione irrazionale è:

$$\sqrt{\mathbf{p(x)}} + \sqrt{\mathbf{q(x)}} = \sqrt{\mathbf{s(x)}}$$

Tale equazione equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ s(x) \geq 0 \\ p(x) + q(x) + 2\sqrt{p(x) \cdot q(x)} = s(x) \end{cases}$$

Si risolva, per esempio, l'equazione irrazionale $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ Si impone il seguente sistema

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ x-3+x-1+2\sqrt{(x-3)(x-1)} = 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ 2x-4+2\sqrt{x^2-4x+3} = 2x \end{cases}$$

Dalle prime tre disequazioni si ottiene $x \geq 3$ mentre l'equazione diventa $\sqrt{x^2-4x+3} = 2$. Possiamo elevare entrambi i membri al quadrato, dato che da entrambi i lati abbiamo quantità positive: si ottiene quindi $x^2-4x+3 = 4$ da cui $x^2-4x-1 = 0$. Le radici di quest'equazione di secondo grado sono: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$. . Dato che $x_1 = 2+\sqrt{5} \geq 3$ e che invece $x_2 < 3$, l'equazione irrazionale data ha un'unica soluzione: $x = 2+\sqrt{5}$

Equazioni con radicali con indice dispari

$$\sqrt[3]{A(x)} = B(x) \leftrightarrow A(x) = B^3(x).$$

ESEMPIO

Risolviamo $\sqrt[3]{x^2 - 8x^3 - 1} = -2x$.

$\sqrt[3]{x^2 - 8x^3 - 1} = -2x \rightarrow$ eleviamo al cubo i due membri

$x^2 - 8x^3 - 1 = -8x^3 \rightarrow$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = +1$

L'equazione irrazionale ha per soluzioni -1 e 1.

Disequazioni irrazionali

DEFINIZIONE

Una **disequazione** è **irrazionale** se contiene almeno un radicale con l'incognita nel radicando.

ESEMPIO

$\sqrt{x-5} > x$ è una disequazione irrazionale.

$\sqrt{7}\,x < 2x + \sqrt{3}$ **non** è una disequazione irrazionale.

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases}$$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x) \leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^2(x) \end{cases}$$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x) \leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B^2(x) \end{cases}$$

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione irrazionale $\sqrt{5x-1} < 2x$.

La disequazione è equivalente al seguente sistema.

$$\begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ 2x > 0 \\ 5x-1 < (2x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} & \text{— } S_1 \\ x > 0 & \text{— } S_2 \\ 5x-1 < 4x^2 \end{cases}$$

Risolviamo la terza disequazione: $5x-1 < 4x^2 \rightarrow 4x^2-5x+1 > 0$.

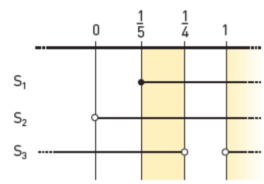
$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} \rightarrow x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1$

L'equazione associata $4x^2-5x+1=0$ ha per soluzioni $\frac{1}{4}$ e 1.

La disequazione è verificata per $x < \frac{1}{4} \vee x > 1$. — S_3

Costruiamo lo schema riassuntivo delle soluzioni e deduciamo che le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione irrazionale data, sono:

$$\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{4} \vee x > 1.$$



Risolvere la disequazione

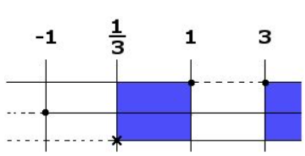
$$\sqrt{x^2-4x+3} < x+1$$

La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2-4x+3 < (x+1)^2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3 \\ x \geq -1 \\ x^2-4x+3 < x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3 \\ x \geq -1 \\ 6x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3 \\ x \geq -1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Il sistema (e quindi anche la disequazione proposta) è soddisfatta per:

$$\frac{1}{3} < x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3$$

$\sqrt{3x+1} < x+7\,.$

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+7 > 0 \\ 3x+1 < (x+7)^2 \end{cases}$$

Calcolando il quadrato del binomio e sommando i monomi simili si ha

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+7 > 0 \\ x^2+11x+48 > 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ha

$$\begin{cases} x \geq -1/3 \\ x > -7 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e quindi tale sistema ha come soluzione $x \geq -1/3$.
Dunque la disequazione data è verificata per $x \geq -1/3$.

Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$

ESEMPIO

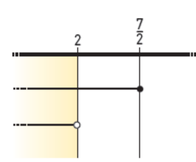
Risolviamo la disequazione irrazionale $\sqrt{7-2x} > x-2$.

La disequazione è equivalente al seguente sistema.

$$\begin{cases} 7-2x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-2x > (x-2)^2 \end{cases}$$

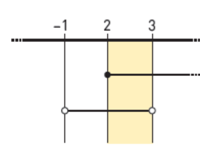
Primo sistema

$$\begin{cases} 7-2x \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{2} \\ x < 2 \end{cases} \rightarrow x < 2$$



Secondo sistema

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-2x > x^2-4x+4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \rightarrow 2 \leq x < 3$$



Unendo le soluzioni dei due sistemi, otteniamo le soluzioni della disequazione:

$x < 2 \vee 2 \leq x < 3 \rightarrow x < 3.$

Quindi le soluzioni della disequazione irrazionale sono: $x < 3$.

$$\sqrt{x^2-5x+6} > x-1$$

Si tratta di una Disequazione irrazionale con verso >, quindi dobbiamo risolvere i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 x^2-5x+6 > x^2-2x+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

Il primo è equivalente a

$$\begin{cases} x < 2 \vee x > 3 \\ x \geq 1 x < \frac{5}{3} \end{cases}$$

il quale ha soluzione $1 \leq x < \frac{5}{3}$.

Mentre invece, il secondo si può riscrivere come

$$\begin{cases} x < 2 \vee x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$$

e ha come soluzione l'intervallo $x < 1$.

L'unione delle soluzioni del primo e del secondo sistema è dunque

$$1 \leq x < \frac{5}{3} \vee x < 1$$

ossia l'intervallo $x < \frac{5}{3}$.

$$\sqrt{4-x} > 3x-2\,.$$

Svolgimento: La disequazione data è equivalente a

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-x > (3x-2)^2\,. \end{cases}$$

Calcolando il quadrato del binomio e sommando i monomi simili si ha

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2/3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2/3 \\ 9x^2-11x < 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ha

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2/3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2/3 \\ 0 < x < 11/9\,, \end{cases}$$

e quindi i due sistemi hanno come soluzione rispettivamente $x < 2/3$ e $2/3 \leq x < 11/9$.
Dunque la disequazione data è verificata per $x < 11/9$.

Disequazioni con radicali con indice dispari

Per risolvere una disequazione contenente solo **radicali con indice dispari** eleviamo ogni membro all'esponente dell'indice.

Nella disequazione *lasciamo lo stesso verso* e, poiché i radicali hanno indice dispari, *non sono necessarie condizioni di esistenza*.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\sqrt[3]{2x^2+5x+5} < 2$.

$$\sqrt[3]{2x^2+5x+5} < 2 \xrightarrow{\text{eleviamo al cubo i due membri}} 2x^2+5x+5 < 8 \rightarrow 2x^2+5x-3 < 0 \rightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$$

$$2x^2+5x-3=0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione irrazionale sono: $-3 < x < \frac{1}{2}$.

$$\sqrt[3]{x^3-2x} < x-2\,.$$

Svolgimento: Elevando al cubo entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$x^3-2x < (x-2)^3\,.$$

Calcolando il cubo del binomio si ha

$$x^3-2x < x^3-6x^2+12x-8$$

da cui, sommando i monomi simili, segue

$$6x^2-14x+8 < 0\,,$$

le cui soluzioni sono date da

$$1 < x < \frac{4}{3}\,.$$

Equazioni irrazionali	
L'equazione	**equivale a**
$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$	• $A(x) = [B(x)]^n$ se n è dispari • $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$ se n è pari

Disequazioni irrazionali	
La disequazione	**equivale a**
$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$	• $A(x) < [B(x)]^n$ se n è dispari • $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$ se n è pari
$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$	• $A(x) > [B(x)]^n$ se n è dispari • $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$ se n è pari

con una sola radice quadrata ed un numero positivo n a secondo membro			
$\sqrt{\boldsymbol{A}} > n \rightarrow A > n^2$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \geq n \rightarrow A \geq n^2$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} < n \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A < n^2 \end{cases}$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \leq n \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq n^2 \end{cases}$

con una sola radice quadrata ed un numero negativo -n a secondo membro			
$\sqrt{\boldsymbol{A}} > -n \rightarrow A \geq 0$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \geq -n \rightarrow A \geq 0$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} < -n \rightarrow$ nessuna soluzione	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \leq -n \rightarrow$ nessuna soluzione

con una sola radice quadrata e lo zero a secondo membro			
$\sqrt{\boldsymbol{A}} > 0 \rightarrow A > 0$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \geq 0 \rightarrow A \geq 0$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \leq 0 \rightarrow A = 0$

con solo due radici quadrate			
$\sqrt{\boldsymbol{A}} > \sqrt{\boldsymbol{B}} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \geq \sqrt{\boldsymbol{B}} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \geq B \end{cases}$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} < \sqrt{\boldsymbol{B}} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A < B \end{cases}$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} \leq \sqrt{\boldsymbol{B}} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B \end{cases}$

con due radici quadrate ed un polinomio o un numero positivo n a secondo membro
$\sqrt{\boldsymbol{A}} + \sqrt{\boldsymbol{B}} \gtrless \boldsymbol{C} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ \left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)^2 \gtrless C^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A + 2\sqrt{AB} + B \gtrless C^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ 2\sqrt{AB} \gtrless C^2 - A - B \, * \end{cases}$
* la disequazione va risolta applicando lo schema di risoluzione per disequazioni irrazionali con una sola radice

con due radici quadrate e lo zero a secondo membro			
$\sqrt{\boldsymbol{A}} + \sqrt{\boldsymbol{B}} > 0 \rightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} + \sqrt{\boldsymbol{B}} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} + \sqrt{\boldsymbol{B}} < 0 \rightarrow \emptyset$	$\sqrt{\boldsymbol{A}} + \sqrt{\boldsymbol{B}} \leq 0 \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

1 Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt{x-3} < 4.$$

Il radicale al primo membro esiste se è $x - 3 \geq 0$ cioè $x \geq 3$. Il dominio della disequazione è dunque l'intervallo $D = [3\ ;\ +\infty)$.
Per $x \geq 3$ il primo membro è positivo o nullo; il secondo membro, uguale a 4, è senz'altro positivo e perciò, per tali valori di x, possiamo elevare entrambi i membri della disequazione al quadrato

$$\sqrt{x-3} < 4 \longrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 < 4^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 19 \end{cases} \longrightarrow 3 \leq x < 19.$$

2 Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 2x} > -3.$$

Il radicale esiste per

$$x^2 - 2x \geq 0 \longrightarrow x \leq 0 \ \vee\ x \geq 2 \longrightarrow D = (-\infty\ ;\ 0] \cup [2\ ;\ +\infty).$$

Per tali valori di x il 1° membro della disequazione è positivo o nullo ed è quindi senz'altro maggiore del secondo membro che è il numero negativo -3. Si conclude che la disequazione proposta è soddisfatta nel suo dominio, cioè per

$$x \leq 0 \ \vee\ x \geq 2.$$

3 Risolvere la disequazione

$$\sqrt{3x+5} < 0.$$

La disequazione è impossibile perché un radicale quadratico, se reale, è positivo o nullo e quindi non può mai essere negativo.

4 Risolvere la disequazione

$$\sqrt[6]{\frac{x-2}{x+1}} > 0.$$

Il suo dominio si ottiene ponendo $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$, ma, poiché è richiesto che il radicale sia positivo, dovrà essere $\frac{x-2}{x+1} > 0 \longrightarrow x < -1 \vee x > 2$.

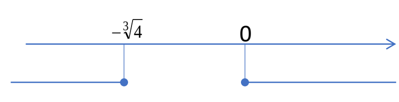
$$x^2 + 1 < \sqrt{x^4 + 4x}$$

È una disequazione irrazionale di indice pari del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$
Si risolve impostando due sistemi e le soluzioni della disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x^4 + 4x \geq 0 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ x^4 + 4x > \left(x^2 + 1\right)^2 \end{cases}$$

Risolviamo il 1° sistema la cui prima disequazione si risolve scomponendo il polinomio in fattori e applicando il metodo del *falso sistema*

$$\begin{cases} x\left(x^3 + 4\right) \geq 0 \\ x^2 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \vee x \geq 0 \\ \text{Mai verificato perché non ci sono radici reali e c'è discordanza} \end{cases}$$



Questo 1° sistema non ammette soluzioni.
Risolviamo il 2° sistema

$$\begin{cases} \forall x \in \Re \\ x^4 + 4x > x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \Re \\ 2x^2 - 4x + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Re \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \Re \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$soluzioni: 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Notiamo in questa disequazione che, tenendo conto che il termine $x^2 + 1$ è sempre positivo in quanto somma di due quadrati, sin dall'inizio si poteva elevare alla seconda i due membri della disequazione ed ottenere più direttamente la risoluzione dell'esercizio

$$\sqrt{x^2+x} > \sqrt{x^2-4}$$

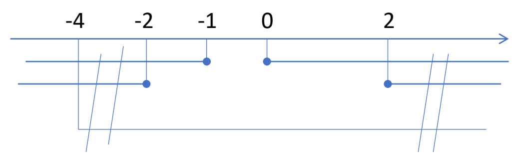
È una disequazione irrazionale di indice pari, contenente due radicali. Bisogna considerare il Dominio di ciascun radicale e, poiché sono entrambi positivi, si elevano alla seconda i due membri della disequazione. Queste condizioni devono coesistere per cui si imposta un sistema

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \\ x^2+x > x^2-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1, x_2=0 \\ x_1=-2, x_2=2 \\ x>-4 \end{cases}$$

In queste due disequazioni di 2° grado, ci sono radici reali concordanza tra a e il segno della disequazione, quindi entrambe sono verificate per valori esterni all'intervallo delle radici

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -1, x \geq 0 \\ x \leq -2, x \geq 2 \\ x > -4 \end{cases}$$

$$soluzioni: -4 < x \leq -2 \vee x \geq 2$$



$$\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} > \frac{13}{6}$$

È una disequazione irrazionale contenente due radicali quadratici. Bisogna considerare i domini dei radicali ed elevare alla seconda i due membri della disequazione. Attenzione che al 1° membro va fatto il quadrato di un binomio

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x-1} \geq 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} \geq 0 \\ \frac{x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{x+1} + 2 > \frac{169}{36} \end{cases}$$

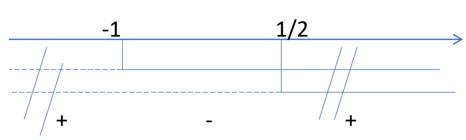
Osserviamo che le prime due disequazioni fratte sono una l'inversa dell'altra per cui basta risolverne una posta solo maggiore di zero e va fatta con il falso sistema. L'ultima disequazione è una fratta da svolgere anch'essa con il falso sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x-1} > 0 \\ \frac{-14x^2-169x+169}{(2x-1)(x+1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2x-1} > 0 \\ \frac{14x^2+169x-169}{(2x-1)(x+1)} < 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione fratta

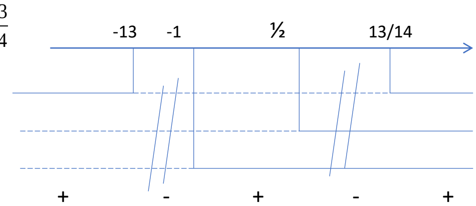
$$\left\| \begin{array}{l} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$soluzioni: x < -1 \vee x > \frac{1}{2}$$



Risolviamo la seconda disequazione fratta

$$\begin{cases} 14x^2+169x-169>0 \\ 2x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-13 \vee x>\dfrac{13}{14} \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x>-1 \end{cases}$$



$$soluzioni: -13<x<-1 \vee \frac{1}{2}<x<\frac{13}{14}$$

Ora le soluzioni delle due disequazioni fratte vanno messe a sistema e …..
Fate voi lo schema grafico. Vi dò le soluzioni.

$$soluzioni: -12<x<-1 \vee \frac{1}{2}<x<\frac{13}{14}$$

23

$$\frac{\sqrt[2]{x^2-4x}}{3-\sqrt[2]{5-x}} \leq 0$$

Le C. E. sono: $\begin{cases} x^2-4x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 3-\sqrt[2]{5-x} \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4 \\ x \leq 5 \\ x \neq -4 \end{cases}$ $x<-4 \ \vee \ -4<x \leq 0 \ \vee \ 4 \leq x \leq 5$ (1)

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

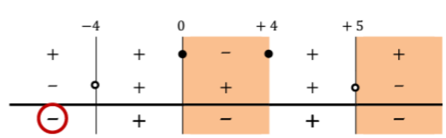
$\sqrt[2]{x^2-4x} \geq 0$; $x^2-4x \geq 0$; $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4$

$3-\sqrt[2]{5-x}>0$; $\sqrt[2]{5-x}<3$; $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 3 \geq 0 \\ (\sqrt[2]{5-x})^2<3^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 5 \\ \forall x \in R \\ 5-x<9 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 5 \\ \forall x \in R \\ x>-4 \end{cases}$ $-4<x \leq 5$

Costruiamo la tabella dei segni:

$N \geq 0$ $\quad x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4$

$D>0$ $\quad -4<x \leq 5$



Occorre accettare le soluzioni che rientrano nelle condizioni di esistenza (1), poste in precedenza.

Cioè occorre escludere dalle soluzioni gli intervalli $0 \leq x \leq 4$ e $x>5$.

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione data è $S=\{ x \ / \ x<4 \}$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{|x-1|-1} \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione.

I) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{|x-1|-1} \geq 0$

N) $\sqrt{x^2-1}-x-1>0$ Disequazione irrazionale: caso generale $\sqrt{A(x)} > B(x)$

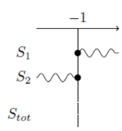
C.E. $x^2-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq +1$

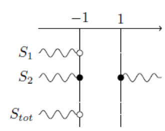
$\sqrt{x^2-1} > x+1$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-1 > x^2+2x+1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1<0 \\ x^2-1 \geq 0 \quad \text{(C.E.)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ -2x > 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x<-1 \\ x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x<-1 \\ x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 1 \end{cases}$$





$S = \emptyset \quad \vee \quad S: x<-1$

$S: x<-1$

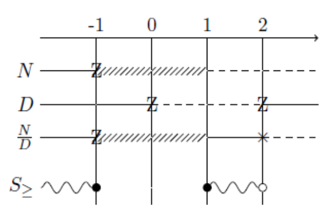
D) $|x-1|-1>0$ Disequazione con valore assoluto: scorciatoia $|A(x)| > k$

$|x-1|>1$

$x-1<-1 \quad \vee \quad x-1>1$

$S: x<0 \quad \vee \quad S: x>2$

$S: x<0 \quad \vee \quad x>2$



$S_I: \quad x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x < 2$

Risolviamo la seconda disequazione.

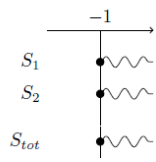
II) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} \geq 0$

N) $\sqrt{x-1} > 0$ Disequazione irrazionale: scorciatoia

C.E. $x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x \geq 1 \quad \text{(C.E.)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



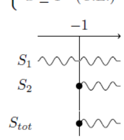
$S: \; x > 1$

D) $\sqrt{x-1}+2>0$ Disequazione irrazionale: caso banale

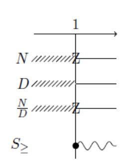
C.E. $x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$

$\sqrt{x-1} > -2$

$$\begin{cases} \forall\, x \\ x \geq 1 \quad \text{(C.E.)} \end{cases}$$

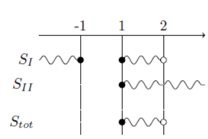


$S: \; x \geq 1$



$S_{II}: \quad x \geq 1$

Calcoliamo la soluzione del sistema.



$S: \quad 1 \leq x < 2$

BIBLIOGRAFIA - SITOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi *Matematica multimediale* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas
- http://eurekamat.weebly.com/