Equazioni e sistemi

Equazioni Lineari

Identità

Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali vera per qualsiasi valore attribuito alle lettere.

ESEMPIO

primo membro | secondo membro

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO

L'uguaglianza $(2y - x)(2y + x) + x^2 = 4(y^2 + 1) - 4$ è un'identità?

- Primo membro: $(2y - x)(2y + x) + x^2 = 4y^2 - x^2 + x^2 = 4y^2$.
- Secondo membro: $4(y^2 + 1) - 4 = 4y^2 + 4 - 4 = 4y^2$.

I due membri sono uguali, quindi l'uguaglianza è un'identità.

Equazioni

Un'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale cerchiamo gli eventuali valori che, sostituiti a una o più lettere, dette **incognite**, la rendono vera.

ESEMPIO

- $2x + 1 = 0$ è un'equazione nell'incognita x.
- $6y^2 - 3x + 2 = 4x - 1$ è un'equazione nelle incognite x e y.
- $-1 + 5b = 2z + a^3$ è un'equazione nelle incognite a, b e z.
- $(3a - 1)(2x + 7)^2 = -14a$ è un'equazione nelle incognite x e a.

Risolvere un'equazione

Chiamiamo **soluzioni** o **radici** di un'equazione i valori che, attribuiti alle incognite, rendono uguali il primo e il secondo membro dell'equazione.

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne tutte le soluzioni: le soluzioni vanno cercate nell'**insieme di definizione** o **dominio** dell'equazione.

ESEMPIO

L'equazione $5x + 1 = 2$ ha come unica soluzione $x = -1/5$ se il dominio dell'equazione è $\mathbb{R}$, invece non ha nessuna soluzione se il dominio è $\mathbb{N}$.

Per verificare se un numero è soluzione, basta sostituirlo all'incognita, e controllare se si ottiene un'identità.

Condizioni di esistenza

Di solito sottintendiamo che l'insieme numerico in cui consideriamo vera un'identità o in cui cerchiamo le soluzioni di un'equazione è $\mathbb{R}$.

Se esistono dei valori per cui le espressioni letterali non hanno significato dobbiamo scrivere le **condizioni di esistenza** (C.E.).

ESEMPIO

$\frac{(a+1)(a+3)}{a+1} = a+3$ è un'identità con C.E.: $a \neq -1$, perché il primo membro perde significato per $a = -1$.

ESEMPIO

L'equazione $(x - 2) = 1 + (x - 1)^{-1}$ richiede la C.E. $x \neq 1$, altrimenti il secondo membro perde di significato.

Classificazione delle equazioni in base al numero di soluzioni

Possiamo classificare le equazioni in base al numero di soluzioni. Diremo che un'equazione è:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni;
- **indeterminata** se le soluzioni sono infinite;
- **impossibile** se non ha soluzioni.

ESEMPIO

- $3x = 15$ ha una sola soluzione: $x = 5$, è **determinata**;
- $2x + 3x = 5x$ è vera per ogni valore della x (è un'identità), è **indeterminata**.
- $x + 2 = x$ non ha soluzioni, è **impossibile**.

Equazioni numeriche e letterali

In un'equazione possono essere presenti lettere diverse, ma non è detto che siano tutte **incognite**. Le incognite sono le lettere rispetto a cui l'equazione va risolta.

Diciamo che un'equazione è **numerica** se non contiene altre lettere oltre alle incognite, altrimenti è **letterale**.

Le lettere che non sono incognite sono dette **parametri** e possono assumere qualsiasi valore nell'insieme numerico considerato.

ESEMPIO

L'equazione $2 + y = a - 1$

- è **numerica** se a e y sono entrambe dichiarate come incognite,
- è **letterale** se a è dichiarata come parametro e di conseguenza y è l'incognita, o viceversa.

Equazioni equivalenti

Due equazioni nelle stesse incognite sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

ESEMPIO

- $y - 11 = 7y + 1$ e $4y = -8$ sono equivalenti.
- $2a + 3 = 0$ e $a^2 - 4a + 4 = 0$ non sono equivalenti perché la prima ha soluzione $a = -3/2$, mentre la seconda ha soluzione $a = 2$.
- $x + 1 = 0$ e $(x + 1)^2 (x + 1)^{-1} = 0$ non sono equivalenti perché la prima ha soluzione $x = -1$, mentre la seconda è impossibile visto che richiede la C.E. $x \neq -1$.

Princìpi di equivalenza

- Per risolvere un'equazione, cerchiamo di sostituirla con una equivalente più semplice.

ESEMPIO

$2x + 7 - 4(x + 3) = 7$ è equivalente a $-2x = 12$.

- Ripetiamo questo procedimento fino a ottenere un'equazione con soluzione immediata.

ESEMPIO

$x = 1$, $x = -6$ e $x = 0$ sono esempi di equazioni con soluzione immediata.

- Per passare da un'equazione a un'altra equivalente più semplice, utilizziamo due **princìpi di equivalenza**.

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o sottraendo a entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, o espressione letterale, otteniamo un'equazione equivalente.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $4x + 6 = 3 + x$.
Notiamo che ha soluzione $x = -1$.

- Se sommiamo ad entrambi i membri il numero -2 otteniamo un'equazione equivalente:
  $4x + 6 -2 = 3 + x -2$, ovvero $4x + 4 = 1 + x$.
- Se sommiamo ad entrambi i membri il monomio $-2x$ otteniamo un'equazione equivalente:
  $4x + 6 -2x = 3 + x -2x$, ovvero $2x + 6 = 3 - x$.

Regola del trasporto

Dal primo principio possiamo derivare la **regola del trasporto**:

Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se trasportiamo un termine da un membro all'altro cambiandogli segno.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $6y^2 - 5 - 2y = 1$, possiamo **trasportare** il termine $-2y$ dal primo al secondo membro ottenendo l'equazione equivalente:

$$6y^2 - 5 = 1 + 2y.$$

Avremmo potuto ottenere la stessa equazione applicando il **primo principio di equivalenza** e sommando ad entrambi i membri il termine $+2y$.

$6y^2 - 5 - 2y + 2y = 1 + 2y$, $6y^2 - 5 = 1 + 2y$

Regola di cancellazione

Dal primo principio possiamo derivare la **regola di cancellazione**:

Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se in entrambi i membri cancelliamo termini uguali.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $3z - 5 = 2z - 5$, possiamo **cancellare** il termine -5 da entrambi i membri ottenendo l'equazione equivalente: $3z = 2z$.

Avremmo potuto ottenere la stessa equazione applicando il **primo principio di equivalenza** e sommando ad entrambi i membri il termine $+5$.

$3z - 5 + 5 = 2z - 5 + 5$, $3z = 2z$

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un’equazione per uno stesso numero o espressione letterale diversi da zero, otteniamo un’equazione equivalente.

ESEMPIO

Consideriamo l’equazione $9x - 3 = 3 + 3x$.
Notiamo che ha soluzione $x = 1$.

- Se moltiplichiamo entrambi i membri per il numero -1/3 otteniamo un’equazione equivalente:
  $-1/3(9x - 3) = -1/3(3 + 3x)$, ovvero $3x - 1 = -1 - x$.
- Se dividiamo entrambi i membri per il monomio $3x$ otteniamo un’equazione equivalente:
  $(9x - 3)/3x = (3 + 3x)/3x$, $3 - 1/x = 1/x + 1$, però dobbiamo ricordarci di imporre la C.E. $x \neq 0$.

Regola del cambio di segno

Dal secondo principio possiamo derivare la **regola del cambio di segno**:

Da un’equazione otteniamo un’equazione equivalente se cambiamo segno a tutti i suoi termini.

ESEMPIO

Consideriamo l’equazione $-12x + 1 = -2$, possiamo **cambiare segno** a tutti i termini ottenendo l’equazione equivalente: $12x - 1 = 2$.
Avremmo potuto ottenere la stessa equazione applicando il **secondo principio di equivalenza** e moltiplicando entrambi i membri per il numero -1.
$-1(-12x + 1) = -1(-2)$, $12x - 1 = 2$

Applicazioni del secondo principio di equivalenza

Oltre alla **regola del cambio di segno** ci sono altre applicazioni utili del secondo principio di equivalenza.

- Quando tutti i termini di un'equazione hanno un fattore comune.

ESEMPIO

$8x + 16 = 24 \rightarrow \cancel{8}x + \cancel{8} \cdot 2 = \cancel{8} \cdot 3 \rightarrow x + 2 = 3$ dividiamo per 8 tutti i termini

- Quando ci sono termini con coefficienti frazionari e vogliamo ottenere coefficienti interi.

ESEMPIO

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{9} + 2 \rightarrow \frac{9x+6}{18} = \frac{2x+36}{18} \rightarrow 9x + 6 = 2x + 36$$

stesso denominatore: mcm(2; 3; 9) = 18

moltiplichiamo per 18 entrambi i membri

Forma normale di un'equazione

Se i membri di un'equazione nell'incognita x sono polinomi possiamo riscrivere l'equazione come un solo polinomio $P(x)$ ridotto a forma normale e uguagliato a zero: $P(x) = 0$.

In questo modo si ottiene la **forma normale** dell'equazione.

ESEMPIO

Scriviamo il polinomio $y - 7 + 4y^2 = y^3 + 4 - 5y^2$ in forma normale.

- Trasportiamo al primo membro tutti i temini:
  $y - 7 + 4y^2 - y^3 - 4 + 5y^2 = 0$.
- Sommiamo i monomi simili:
  $y - 11 + 9y^2 - y^3 = 0$
- Ordiniamo il polinomio secondo le potenze decrescenti di y:
  $- y^3 + 9y^2 + y - 11 = 0$ $(P(y) = - y^3 + 9y^2 + y - 11)$

Grado di un’equazione

Se i membri di un’equazione nell’incognita x sono polinomi, chiamiamo **grado** dell’equazione il grado del polinomio $P(x)$ ridotto a forma normale.

ESEMPIO

Il grado dell’equazione $-y^3 + 9y^2 + y - 11 = 0$ è 3, perché il polinomio $P(y) = -y^3 + 9y^2 + y - 11$ ha grado 3.

Risoluzione di un’equazione lineare

Per risolvere un’equazione numerica intera di primo grado, svolgiamo i calcoli nei due membri e utilizziamo i princìpi di equivalenza fino a giungere alla forma

$ax = b$.

Poi distinguiamo tre casi:

- equazione determinata, $a \neq 0$;
- equazione indeterminata, $a = 0$ e $b = 0$;
- equazione impossibile, $a = 0$ e $b \neq 0$.

Equazione determinata

Per risolvere un'equazione numerica intera di primo grado $ax = b$ determinata ($a \neq 0$) dividiamo ambedue i membri per a ottenendo la soluzione:

$x = b/a$

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $5x - 1 = x + 11$,

portimo i termini con la x al primo membro, i numeri al secondo

$4x = 12$,

notiamo che $a = 4$ quindi l'equazione è determinata

dividiamo entrambi i membri per 4

$x = 3$ è la soluzione.

Equazione indeterminata

Un'equazione numerica intera di primo grado $ax = b$ indeterminata ($a = 0$ e $b = 0$) ha per soluzione tutti i numeri reali, infatti $0x = 0$ è un'identità.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $7x - 6 + 2x = 9x - 10 + 4$,

portimo i termini con la x al primo membro, i numeri al secondo

$0x = 0$,

notiamo che $a = 0$ e $b = 0$ quindi l'equazione è indeterminata

qualsiasi numero reale sostituito ad x è la soluzione.

Equazione impossibile

Un'equazione numerica intera di primo grado $ax = b$ impossibile ($a = 0$ e $b \neq 0$) non ha soluzione; nessun numero reale x risolve l'equazione $0x = b$.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $4x - 6 + 5x = 9x + 4$,

portimo i termini con la x al primo membro, i numeri al secondo

$0x = 10$,

notiamo che $a = 0$ e $b \neq 0$ quindi l'equazione è impossibile

nessun numero reale x moltiplicato per 0 risulta 10.

Equazioni numeriche fratte

Un'equazione **numerica** è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore dei suoi termini.

Le equazioni fratte possono essere determinate, indeterminate o impossibili.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione seguente.

$$\frac{4}{x} + \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{x(1+x)} \rightarrow \frac{4+4x+\cancel{x^2}}{\cancel{x(1+x)}} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x(1+x)}} \rightarrow 4x = -4 \rightarrow x = -1$$

C.E.: $x \neq 0$, $x \neq -1$

Controllo: $x = -1$ *non* soddisfa le C.E., quindi *non* è accettabile.

L'equazione è *impossibile* perché non ci sono soluzioni accettabili.

ESEMPIO

$$\frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{x-2} = \frac{5}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{x-2} = \frac{5}{x+2}$$

Poiché deve essere $x + 2 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0$

ossia $x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 2$

Il dominio è l' insieme **D = R – {– 2; 2}**

$$\frac{1-3(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

continua

$$\cancel{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{1-3(x+2)}{\cancel{(x-2)(x+2)}} = \frac{5(x-2)}{\cancel{(x-2)(x+2)}} \cdot \cancel{(x-2)(x+2)}$$

$$1 - 3(x+2) = 5(x-2)$$

$$1 - 3x - 6 = 5x - 10$$

$$-3x - 5x = -10 + 6 - 1$$

$$-8x = -5 \rightarrow x = +\frac{5}{8}$$

Poiché $\frac{5}{8}$ non coincide con uno dei valori esclusi dal domino, la soluzione è accettabile: $S = \left\{ \frac{5}{8} \right\}$

$$\frac{2}{x^2-9}=\frac{4}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{(x-\dots)(x+\dots)}=\frac{4}{(x-3)(x-\dots)}-\frac{2}{(x-\dots)(x+\dots)}$$
Riscrivi l'equazione scomponendo i denominatori mediante i prodotti notevoli (differenza di quadrati e trinomio particolare).

C.E. $x \neq 3 \wedge x \neq -\dots \wedge x \neq +\dots \wedge x \neq -\dots$ — Poni le C.E.

m.c.m. $(x-3)(x+\dots)(x-\dots)(x+\dots)$ — Calcola il m.c.m.

$$\cancel{(x-3)(x+\dots)(x-\dots)(x+\dots)}\,\frac{2(x-\dots)(x+\dots)}{\cancel{(x-3)(x+\dots)(x-\dots)(x+\dots)}}=$$
Riduci le frazioni allo stesso denominatore e moltiplica per il m.c.m.

$$=\frac{4(x+\dots)(x+\dots)-2(x-3)(x+\dots)}{\cancel{(x-3)(x+\dots)(x-\dots)(x+\dots)}}\cdot\cancel{(x-3)(x+\dots)(x-\dots)(x+\dots)}$$

$2(x^{\cdots}-\dots)=4(x^{\cdots}+\dots x+\dots x+\dots)-2(x^{\cdots}-\dots)$ — Riconosci i due prodotti notevoli ed esegui la moltiplicazione tra i due binomi.

$2x^{\cdots}-\dots=4x^{\cdots}+\dots x+\dots x+\dots-2x^{\cdots}+\dots$ — Esegui le moltiplicazioni.

$\cancel{2x^{\cdots}}-\cancel{4x^{\cdots}}-\dots x-\dots x+\cancel{2x^{\cdots}}=+\dots+\dots+\dots$ — Applica la regola del trasporto e somma i termini simili.

$-\dots x=\dots$ — Dividi entrambi i membri per il coefficiente di x.

$$\frac{-\dots x}{-\dots}=\frac{\dots}{-\dots}\quad\rightarrow\quad x=-\frac{\dots}{\dots}$$
Ricava x.

Soluzione accettabile. — Confronta la soluzione con le C.E.

Risolvi la seguente equazione fratta:

$$\frac{16x}{x^2-9}-\frac{8}{x-3}=\frac{5}{x+3}.$$

$$\frac{16x}{(x-\dots)(x+\dots)}-\frac{8}{x-3}=\frac{5}{x+3}$$

C.E.:

$x \neq +\dots$

$x \neq -\dots$

m.c.m. $(x-3)(x+3)$

$$\cancel{(x-\dots)(x+\dots)}\,\frac{16x-8(x+\dots)}{\cancel{(x-\dots)(x+\dots)}}=\frac{5(x-\dots)}{\cancel{(x+3)(x-\dots)}}\cdot\cancel{(x+3)(x-\dots)}$$

$16x-8x-\dots=5x-\dots$

$16x-8x-5x=\dots-\dots$

$$\frac{3x}{3}=\frac{\dots}{3}$$

$x=\dots$ soluzione non ....

25

Sistemi lineari

Equazioni lineari in due incognite

Un'**equazione lineare in due incognite** $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è un'equazione del tipo $\boldsymbol{ax+by=c}$ che ha per soluzioni coppie di valori $(x; y)$ che verificano l'uguaglianza.

ESEMPIO

Data l'equazione $x+2y=6$, le sue soluzioni sono rappresentate graficamente dai punti della retta di equazione:

$$x+2y=6 \quad \rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x+3.$$

x	-2	0	4	6	$\dots$
y	4	3	1	0	$\dots$

Le coppie $(-2; 4)$, $(0; 3)$, … sono le infinite soluzioni dell'equazione.

Sistema di equazioni

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni per le quali cerchiamo le soluzioni comuni, ossia i valori, da attribuire alle incognite, che verificano *contemporaneamente* tutte le equazioni.

ESEMPIO

La coppia $(0; 1)$ è una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x^2+xy=0 \\ 1-y=2x \end{cases}.$$

verifichiamolo: $0^2+0\cdot 1=0$

$1-1=2\cdot 0$

Due sistemi si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Grado di un sistema

DEFINIZIONE	ESEMPIO
Il **grado di un sistema** intero è il prodotto dei gradi delle sue equazioni.	$\begin{cases} x^3 + xy = 1 \\ x^2 + y + y^2 = 16 \end{cases}$ equazione di grado 3; equazione di grado 2 Grado del sistema: $3 \cdot 2 = 6$.

Un sistema è detto **lineare** se è un sistema di primo grado, costituito cioè da equazioni lineari.

Forma normale

La **forma normale** (o **canonica**) di un sistema lineare di due equazioni in x e y è:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'x = c' \end{cases}, \qquad \text{con } a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO
È in forma normale il seguente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 6 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

Sistemi lineari in due incognite

Un sistema può essere:

- **determinato** se ha un numero finito di soluzioni;
- **impossibile** se non ha soluzioni;
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni.

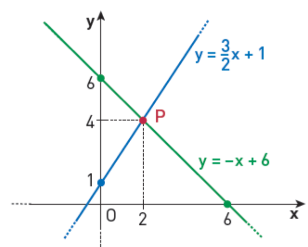
ESEMPIO

Sistema determinato

Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

è determinato e ha per soluzione (2; 4), coordinate del punto di intersezione P delle rette **incidenti** che rappresentano le equazioni.



Sistemi lineari in due incognite

Un sistema può essere:

- **determinato** se ha un numero finito di soluzioni;
- **impossibile** se non ha soluzioni;
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni.

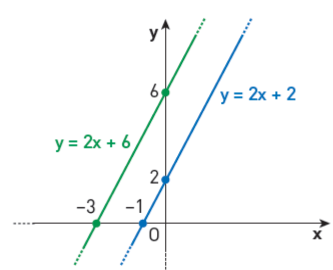
ESEMPIO

Sistema impossibile

Il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$

è impossibile. Le rette hanno lo stesso coefficiente angolare e sono **parallele** e **distinte**.



Sistemi lineari in due incognite

Un sistema può essere:

- **determinato** se ha un numero finito di soluzioni;
- **impossibile** se non ha soluzioni;
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni.

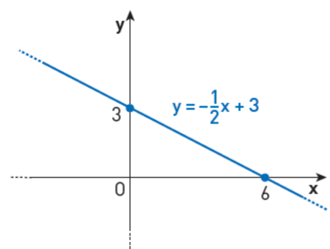
ESEMPIO

Sistema indeterminato

Il sistema

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+6y=18 \end{cases}$$

è indeterminato. Le rette sono **coincidenti**.



Metodo di sostituzione

Il **metodo di sostituzione** per la risoluzione di un sistema consiste nel ricavare da un'equazione una delle incognite in funzione dell'altra e sostituire l'espressione ottenuta nell'altra equazione.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x-3y=-12 \\ x+4y=5 \end{cases}$$

Ricaviamo x nella seconda equazione e sostituiamo la sua espressione nella prima.

$$\begin{cases} 2x-3y=-12 \\ x=5-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(5-4y)-3y=-12 \\ x=5-4y \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione, che è nella sola variabile y, e sostituiamo il valore ottenuto nella seconda.

$$\begin{cases} 10-8y-3y=-12 \\ x=5-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -11y=-22 \\ x=5-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=5-4\cdot 2=-3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $(-3; 2)$.

Metodo del confronto

Il **metodo del confronto** per la risoluzione di un sistema consiste nel ricavare la stessa incognita da entrambe le equazioni e uguagliare le espressioni ottenute, così da avere un'equazione in una sola incognita.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 4x+y=2 \\ 3x-y=12 \end{cases}$$

Ricaviamo y in entrambe le equazioni e uguagliamo le espressioni ottenute.

$$\begin{cases} 4x+y=2 \\ 3x-y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-4x+2 \\ y=3x-12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-4x+2 \\ -4x+2=3x-12 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione in x e sostituiamo il valore ottenuto nella prima equazione.

$$\begin{cases} y=-4x+2 \\ -4x-3x=-12-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-4x+2 \\ 7x=14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-4\cdot 2+2 \\ x=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-6 \\ x=2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $(2; -6)$.

Metodo di riduzione

Il **principio di riduzione** afferma che se sommiamo o sottraiamo membro a membro due equazioni di un sistema e sostituiamo l'equazione ottenuta a una delle due equazioni di partenza, otteniamo un sistema equivalente.
Questo principio è alla base del **metodo di riduzione**.

ESEMPIO

Applichiamo il principio di riduzione.

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$$

sommiamo le equazioni membro a membro

$$6x \quad = 6 \rightarrow x=1$$

Mettiamo a sistema $x=1$ con una delle equazioni iniziali e ricaviamo y con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} x=1 \\ 4x+3y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4\cdot 1+3y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3y=1-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

La soluzione del sistema è $(1; -1)$.

Metodo di Cramer

Dato il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, con a, b, a', b' non tutti nulli e considerati i determinanti D, D_x, D_y:

- se $\boldsymbol{D \neq 0}$, il sistema è **determinato** e la soluzione è la coppia $(x; y)$, con $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$;
- se $\boldsymbol{D = 0}$ e $\boldsymbol{D_x \neq 0}$ oppure $\boldsymbol{D = 0}$ e $\boldsymbol{D_y \neq 0}$, il sistema è **impossibile**;
- se $\boldsymbol{D = 0}$ e $\boldsymbol{D_x = 0}$ e $\boldsymbol{D_y = 0}$, il sistema è **indeterminato**.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b. \qquad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b; \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Metodo di Cramer

ESEMPIO

Risolviamo i sistemi con il metodo di Cramer:

a. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 7x - y = 5 \\ 21x - 3y = 15 \end{cases}$;

a. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \rightarrow D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 \neq 0 \rightarrow$

il sistema è determinato.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -11; \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 18;$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-11}{-1} = 11; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{-1} = -18.$$

La soluzione del sistema è $(11; -18)$.

b. $\begin{cases} 7x - y = 5 \\ 21x - 3y = 15 \end{cases} \rightarrow D = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 21 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - 21 \cdot (-1) = -21 + 21 = 0$

il sistema è o impossibile o indeterminato

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 15 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 15 \cdot (-1) = 0;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 21 & 15 \end{vmatrix} = 7 \cdot 15 - 5 \cdot 21 = 0;$$

$D = D_x = D_y = 0 \rightarrow$ **il sistema è indeterminato.**

Confronto fra i rapporti dei coefficienti

È possibile stabilire se un sistema è determinato, impossibile o indeterminato **senza risolverlo**.

Dato il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

con a', b', c' diversi da 0:

- se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, il sistema è **determinato**;
- se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, il sistema è **impossibile**;
- se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, il sistema è **indeterminato**.

ESEMPIO

$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ $\quad \frac{3}{1} \neq \frac{2}{-4} \rightarrow$ il sistema è determinato.

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ $\quad \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{8}{4} \rightarrow$ il sistema è indeterminato.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 12x - 3y = 1 \end{cases}$ $\quad \frac{4}{12} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{5}{1} \rightarrow$ il sistema è impossibile.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

Matrici

CON LE PAROLE	CON I SIMBOLI
Una **matrice** $\boldsymbol{m \times n}$ è un insieme di numeri disposti in m righe e n colonne.	due righe $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrice 2×3; tre colonne

Un **generico elemento di una matrice** può essere indicato con una lettera minuscola con due indici, per esempio $\boldsymbol{a_{ij}}$, in cui il primo indice indica la riga e il secondo la colonna a cui appartiene l'elemento.

ESEMPIO

Nella matrice A a fianco, abbiamo:

$a_{23} = 4; \quad a_{12} = 7; \quad a_{33} = 6; \quad a_{21} = 3; \quad a_{13} = 8; \quad \ldots$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Determinanti

Il **determinante** è un *numero* che si associa solo ad una matrice quadrata, cioè ad una matrice $n \times n$.

Il determinante di una **generica matrice** $\mathbf{2 \times 2}$ è:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

il determinante di una **generica matrice** $\mathbf{3 \times 3}$ è:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

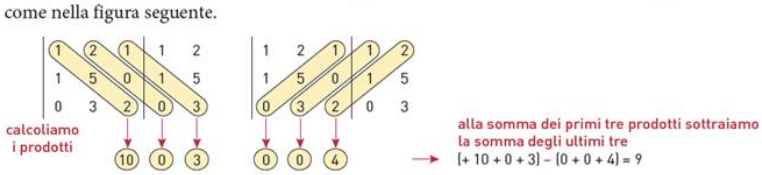
Determinanti

Spesso, per il calcolo di determinanti di matrici 3×3, si utilizza la **Regola di Sarrus**.

ESEMPIO

Calcoliamo il determinante della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ con la regola di Sarrus.

Ricopiamo a destra le prime due colonne e applichiamo la definizione calcolando i prodotti sulle diagonali, come nella figura seguente.



Il determinante è 9.

Sistemi di tre equazioni in tre incognite

Le **soluzioni** di un sistema di tre equazioni in tre incognite possono essere scritte come **terne ordinate** di numeri che sono soluzioni di tutte le equazioni del sistema. Anche in questo caso sono validi i metodi risolutivi che abbiamo studiato:

- metodo di sostituzione
- metodo del confronto
- metodo di riduzione

Il Metodo di Cramer, invece, necessita di essere enunciato di nuovo:

TEOREMA

Regola di Cramer (sistemi di tre equazioni in tre incognite)
Dato un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite x, y, z e considerati i determinanti D, D_x, D_y, D_z, il sistema è determinato se e solo se $D \neq 0$, e in tal caso la soluzione è la terna $(x; y; z)$, con:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

Risolvere il seguente sistema di primo grado nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x+2y-3z=6-3y \\ 2x-y+4z=x \\ 3x-z=y+2 \end{cases}$$

Prima di tutto trasportiamo a sinistra tutti i termini contenenti le incognite e a destra i termini noti:

$$\begin{cases} x+2y+3y-3z=6 \\ 2x-x-y+4z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$$

Ora riduciamo i termini simili presenti nelle tre equazioni:

$$\begin{cases} x+5y-3z=6 \\ x-y+4z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$$

A questo punto isoliamo una delle variabili da una delle tre equazioni, a scelta, e sostituiamo la sua espressione nelle altre due equazioni. Quando possibile, ed in questo caso lo è, conviene ricavare una variabile che ha coefficiente 1 o -1; in questo caso procederemo isolando la x dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ x-y+4z=0 \\ 3x-y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{"} \\ -5y+3z+6-y+4z=0 \\ 3(-5y+3z+6)-y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{"} \\ \begin{cases} -6y+7z=-6 \\ -16y+8z=-16 \end{cases} \end{cases}$$

da questo punto in poi, procedendo come se il nostro sistema fosse del tipo 2x2 nelle incognite y,z, si ricava

$$\begin{cases} \text{"} \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione i valori numerici di y e di z appena ottenuti si potrà ricavare x

$$\begin{cases} x=-5y+3z+6 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5\cdot 1+3\cdot 0+6=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Concludiamo scrivendo la soluzione del sistema: $S=\{(1;1;0)\}$.

44

Esempio sul metodo di Cramer (risolvere un sistema di 3 equazioni in 3 incognite)

$$\begin{cases} x+4y-2z+1=0 \\ y-2=x+z \\ 4x+2z=-7 \end{cases}$$

La prima cosa da fare quando risolviamo un sistema col metodo di Cramer è, non dimentichiamolo mai, **riscrivere il sistema in forma normale.**

Nel nostro caso non abbiamo termini simili per cui si tratta di mettere semplicemente in ordine i termini. Dobbiamo però stare attenti alla terza equazione. In essa, l'incognita y non compare esplicitamente. Tuttavia, poiché vogliamo utilizzare il metodo di Cramer, **dobbiamo comunque scrivere l'incognita mancante attribuendole un coefficiente zero**.

Dunque, per risolvere un sistema con il metodo di Cramer dobbiamo anzitutto assicurarci che **sia in forma normale con anche i coefficienti nulli delle incognite indicati esplicitamente.**

Così, il sistema una volta espresso in forma normale diviene:

$$\begin{cases} x+4y-2z=-1 \\ x-y+z=-2 \\ 4x+0y+2z=-7 \end{cases}$$

45

Possiamo ora scrivere la **matrice dei coefficienti**, che chiaramente sarà una matrice con tre righe e tre colonne. Ricordiamo, la matrice dei coefficienti è una tabella contenente i coefficienti delle incognite così come compaiono nelle equazioni del sistema. Ogni riga della tabella contiene i coefficienti di una singola equazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo calcolarne il determinante D utilizzando la regola di Sarrus:

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \quad \left(\text{matrice estesa:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{matrix} \right)$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 2 – 1 \cdot 1 \cdot 0 - [(-2) \cdot (-1) \cdot 4] =$$

$$= -2 + 16 + 0 - 8 - 0 - 8 = -2$$

Il determinante D è diverso da zero per cui il sistema è determinato. Possiamo quindi procedere calcolando gli altri determinanti.

46

Poiché abbiamo tre incognite, dovremo calcolare i tre corrispondenti determinanti, ovvero:

- D_x: determinante della matrice che si ottiene sostituendo la prima colonna della matrice dei coefficienti (coefficienti delle x) con i termini noti del sistema;
- D_y: determinante della matrice che si ottiene sostituendo la seconda colonna della matrice dei coefficienti (coefficienti delle y) con i termini noti del sistema;
- infine, D_z: determinante della matrice che si ottiene sostituendo la terza colonna della matrice dei coefficienti (coefficienti delle z) con i termini noti del sistema;

Si tratterà così di inserire ogni volta nella matrice dei coefficienti, in modo opportuno, la colonna:

$$\begin{matrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{matrix}$$

che possiamo indicare come "colonna dei termini noti", ovvero la colonna formata dai termini che compaiono al secondo membro di ciascuna equazione del sistema ridotto a forma normale.

Cominciamo sostituendo nella matrice dei coefficienti la colonna dei termini in x con la colonna dei coefficienti. Quindi, calcoliamo il determinante della matrice così ottenuta:

$$D_x = \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \left(\text{matrice estesa:} \quad \left[\begin{matrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \\ -7 & 0 \end{matrix} \right)$$

$$= -1 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot (-7) + 0 - [4 \cdot (-2) \cdot 2] - 0 - [-2 \cdot (-1) \cdot (-7)] =$$

$$= 2 - 28 + 16 + 14 = 4$$

In modo del tutto simile calcoliamo il determinante D_y (la matrice considerata è la matrice dei coefficienti nella quale sostituiamo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti):

$$D_y = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \left(\text{matrice estesa:} \quad \left[\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 4 & -7 \end{matrix} \right)$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot (-7) - [-1 \cdot 1 \cdot 2] - [1 \cdot 1 \cdot (-7)] - [-2 \cdot (-2) \cdot 4] =$$

$$= -4 - 4 + 14 + 2 + 7 - 16 = -1$$

Infine, in modo del tutto simile, calcoliamo il determinante D_z:

$$D_z = \det\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\1 & -1 & -2\\4 & 0 & -7\end{bmatrix} = \quad \left(\text{matrice estesa:} \quad \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\1 & -1 & -2\\4 & 0 & -7\end{bmatrix}\begin{matrix}1 & 4\\1 & -1\\4 & 0\end{matrix}\right)$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-7) + 4\cdot(-2)\cdot 4 + 0 - [4\cdot 1\cdot(-7)] - 0 - [-1\cdot(-1)\cdot 4] =$$

$$= 7 - 32 + 28 - 4 = -1$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per poter scrivere la soluzione del sistema. Per i sistemi lineari 3×3 valgono infatti le formule:

$$x = \frac{D_x}{D}; \qquad y = \frac{D_y}{D}; \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

Sostituendo i valori che abbiamo trovato per i vari determinanti otteniamo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Sistemi fratti

Un **sistema** è **fratto** se nelle equazioni che lo costituiscono c'è almeno un denominatore che contiene una o più incognite. Per risolverlo, poniamo le condizioni di esistenza e ci riconduciamo a un sistema intero.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema $\begin{cases}\dfrac{3x-y}{5x+5y} = 1\\[2mm] \dfrac{3}{y-1} = 8 + \dfrac{x}{1-y}\end{cases}$.

Scomponiamo il primo denominatore e poniamo le condizioni di esistenza.

$$\begin{cases}\dfrac{3x-y}{5(x+y)} = 1\\[2mm] \dfrac{3}{y-1} = 8 + \dfrac{x}{1-y}\end{cases} \qquad \text{C.E.: } x \neq -y,\ y \neq 1$$

In entrambe le equazioni, determiniamo il denominatore comune e lo eliminiamo.

$$\begin{cases}\dfrac{3x-y}{5(x+y)} = \dfrac{5(x+y)}{5(x+y)}\\[2mm] \dfrac{3}{y-1} = \dfrac{8(y-1)-x}{y-1}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}3x-y = 5x+5y\\ 3 = 8y-8-x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x+6y = 0\\ x-8y = -11\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x+3y = 0\\ x-8y = -11\end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo del confronto.

$$\begin{cases}x = -3y\\ x = 8y-11\end{cases} \rightarrow -3y = 8y - 11 \rightarrow \begin{cases}y = 1\\ x = -3\cdot 1 = -3\end{cases}$$

Poiché deve essere $y \neq 1$, la soluzione $(-3; 1)$ non è accettabile e il sistema risulta impossibile.

Esempio
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Le strategie per risolvere questo sistema sono principalmente tre:

① Metodo di sostituzione: scriviamo un'incognita in funzione dell'altra in una delle equazioni

$$-x + 2y = 0 \iff x = 2y.$$

Sostituiamo il valore dell'incognita nell'altra equazione e risolviamo:

$$2x - 3y = 1 \overset{x=2y}{\iff} 4y - 3y = 1 \iff y = 1$$

$$x = 2y \underset{y=1}{\iff} x = 2 \longrightarrow \text{Soluzione: } (2,1)$$

② Metodo del confronto: scriviamo tutte le equazioni isolando la stessa incognita:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \iff x = \dfrac{1+3y}{2} \\ -x + 2y = 0 \iff \boxed{x = 2y} \end{cases}$$

Eguagliamo le espressioni ottenute: $\dfrac{1+3y}{2} = 2y$

$$\frac{1+3y}{2} = 2y \iff 1 + 3y = 4y \iff \boxed{1 = y} \qquad x = 2.$$

51

$$\begin{cases} 2(x-1) + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}.$$

1° modo

$$\begin{cases} 2(x-1) + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ Sistema da risolvere

Ricaviamo x in funzione di y dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} 2(x-1) + y = -3 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione l'espressione trovata per x otteniamo l'equazione risolvente:

$$2(4 - 2y - 1) + y = -3$$
$$8 - 4y - 2 + y = -3$$
$$-3y = -9 \Rightarrow y = 3$$

Ora ricaviamo x:

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $(-2, 3)$.

2° modo

$$\begin{cases} 2(x-1) + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ Sistema da risolvere

Ricaviamo y in funzione di x dalla prima equazione:

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione l'espressione trovata per y otteniamo l'equazione risolvente:

$$x + 2(-2x - 1) = 4$$
$$x - 4x - 2 = 4$$
$$-3x = 6 \Rightarrow x = -2$$

Ora ricaviamo y.

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (-2) \cdot (-2) - 1 = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $(-2, 3)$.

52

Risolviamo con il metodo del confronto il sistema $\begin{cases}2x+y=-1\\x+2y=4\end{cases}$.

- Dobbiamo risolvere entrambe le equazioni rispetto a una delle due incognite. In questo caso è indifferente, ai fini dei calcoli, risolvere le due equazioni rispetto a x o rispetto a y.
  Risolviamo entrambe le equazioni del sistema, per esempio, rispetto a y:

$$\begin{cases}2x+y=-1\\x+2y=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-2x-1\\y=-\frac{1}{2}x+2\end{cases}$$

- Uguagliando le due espressioni (in rosso) che esprimono y in funzione di x, otteniamo l'equazione risolvente:

$$-2x-1=-\frac{1}{2}x+2$$
$$-4x-2=-x+4$$
$$-3x=6 \Rightarrow x=-2$$

- Abbiamo così determinato il valore di x; per determinare y sostituiamo -2 al posto di x in una delle due equazioni che esprimono y in funzione di x:

$$\begin{cases}y=-2x-1\\x=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=(-2)\cdot(-2)-1=3\\x=-2\end{cases}$$

- La soluzione del sistema è quindi la coppia $(-2, 3)$.

53

Risolviamo con il metodo di addizione e sottrazione il sistema $\begin{cases}2x-y=1\\2x-3y=5\end{cases}$.

- Osserviamo che i due termini nell'incognita x sono uguali: quindi, sottraendo le due equazioni del sistema, riusciamo a «eliminare» la x e ottenere un'equazione risolvente in y.

$$\begin{array}{l}\begin{cases}2x-\ \ y=1\\2x-3y=5\end{cases}\\\hline 0\ \ +2y=-4\\ \qquad y=-2\end{array}$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda. Attenzione ai segni!

- Per determinare x, procediamo per sostituzione.

$$\begin{cases}2x-y=1\\y=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x-(-2)=1\\y=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+2=1\\y=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=-2\end{cases}$$

- Pertanto, la soluzione del sistema è la coppia ordinata $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

Risolvi il sistema $\begin{cases}3x-4y=1\\2x-5y=3\end{cases}$ **con il metodo di addizione e sottrazione.**

- Moltiplica i due membri della *prima equazione* per il coefficiente di x della seconda, cioè per 2, e i due membri della *seconda equazione* per il coefficiente di x della prima, cioè per 3. Ottieni così il sistema equivalente:

$$\begin{cases}2\cdot(3x-4y)=2\cdot 1\\3\cdot(2x-5y)=3\cdot 3\end{cases} \text{ ossia } \begin{cases}6x-\ldots y=2\\6x-\ldots y=9\end{cases}$$

- Sottraendo membro a membro le due equazioni dell'ultimo sistema scritto, ottieni l'equazione risolvente ...., da cui ricavi $y=$ ....
- Per determinare x, puoi applicare due metodi:
  - sostituendo il valore trovato per y nella prima equazione, ottieni l'equazione ...., da cui ricavi $x=$ ....

  oppure:
  - puoi applicare di nuovo il metodo di addizione e sottrazione, in modo, però, che questa volta venga eliminata la y: a tale scopo devi moltiplicare i due membri della prima equazione per .... e i due membri della seconda per .... e poi sottrarre le equazioni membro a membro. Ottieni così l'equazione ...., da cui ricavi $x=$ ....
- In ogni caso, puoi concludere che la soluzione del sistema è .... $[(-1, -1)]$

54

Risolvi con il metodo di Cramer il sistema $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ 3x+5y=-1 \end{cases}$.

Calcola anzitutto il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = ...$

Essendo $D \neq 0$, il sistema è ....

Per determinare la soluzione, calcola D_x e D_y:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = ... \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = ...$$

Allora, per il teorema di Cramer:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{.....}{.....} = ... \quad \text{e} \quad y = \frac{D_y}{D} = ...$$

Pertanto la soluzione è (..... , ...). $\left[\left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)\right]$

55

Risolvi il sistema $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=5 \\ x-3y+2z=2 \end{cases}$.

Metodo di sostituzione
Ricava, per esempio, dalla prima equazione l'espressione di z in funzione di x e y: $z =$ .... [1]
Sostituisci l'espressione trovata per z nelle altre due equazioni del sistema:

$x - y +$ .... $= 5$ [2]

$x - 3y + 2($..............$) = 2$ [3]

Le due equazioni [2] e [3], formano un sistema di due equazioni in due incognite.
Risolvendolo, troverai che:

$x =$ ...., $y =$ ....

Sostituendo questi valori di x e y nell'equazione [1] puoi ricavare infine il valore di z:

$z =$ .... $=$ ....

quindi la soluzione del sistema è (....., ..., ...).

Metodo di addizione e sottrazione
Sommando membro a membro le prime due equazioni del sistema, ottieni l'equazione: .... = ... [4]
Moltiplicando i due membri della seconda equazione per 2 e sottraendo dall'equazione ottenuta la terza equazione, ottieni l'equazione:

$x + y =$ .... [5]

Dalla [4] puoi ricavare che $x =$ ....
Sostituendo il valore di x trovato nella [5], puoi ricavare che $y =$ ....
Infine, sostituendo i valori di x e y, in una delle tre equazioni del sistema puoi ricavare che $z =$ ....
Come nel caso precedente, troverai che la soluzione del sistema è (....., ..., ...).
Confronta i due metodi risolutivi: quale ti sembra più veloce? [Soluzione sistema: (2, 6, 9)]

56

Equazioni di secondo grado

Forma normale e soluzioni

Un'**equazione di secondo grado** in **forma normale** è un'equazione del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

dove x è l'incognita e a, b, c sono detti coefficienti dell'equazione.
Il coefficiente c è detto anche termine noto.

Se tutti i coefficienti dell'equazione sono diversi da 0, l'equazione si dice **completa**, altrimenti è **incompleta.**

Le equazioni di secondo grado possono avere al massimo **due soluzioni**, dette anche *radici.*

Risoluzione di equazioni incomplete

- Un'equazione è **spuria** se non ha il termine noto *c*, cioè se è della forma $ax^2 + bx = 0$.

$$ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x=0 \vee ax+b=0 \rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$$

Quindi un'equazione di secondo grado spuria ha sempre due soluzioni reali di cui una è nulla.

Risoluzione di equazioni incomplete

- Un'equazione è **pura** se $b = 0$, cioè se è della forma $ax^2 + c = 0$.

$$ax^2+c=0 \rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \begin{cases} \text{se } -\frac{c}{a}>0 \rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \\ \text{se } -\frac{c}{a}<0 \rightarrow \text{l'equazione è impossibile.} \end{cases}$$

Quindi un'equazione di secondo grado pura ha due soluzioni, una opposta dell'altra, oppure è impossibile.

Risoluzione di equazioni incomplete

- Un'equazione è **monomia** se $b = 0$ e $c = 0$, cioè se è della forma $\boldsymbol{ax^2 = 0}$.

$$\boxed{ax^2 = 0} \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 0.}$$

Quindi un'equazione di secondo grado monomia ha una soluzione doppia che è $x_1 = x_2 = 0$.

Risoluzione di equazioni complete

Data l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, definiamo il **discriminante** $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$.

- Se $\Delta < 0$, l'equazione non ha soluzioni reali.
- Se $\Delta = 0$, l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{b}{2a}}$$

- Se $\Delta > 0$, l'equazione è determinata e ha due soluzioni reali e distinte che si trovano con la **formula risolutiva**:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Risoluzione di equazioni complete

ESEMPIO

Risolviamo le seguenti equazioni.

a. $3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$\Delta = \underbrace{(-5)^2}_{b^2} \underbrace{- 4 \cdot 3 \cdot (-2)}_{-4ac} = 49 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{due soluzioni distinte:}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} \rightarrow x_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{5+7}{6} = 2.$$

b. $25x^2 + 20x + 4 = 0$

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{due soluzioni reali coincidenti:}$$

$$x = \frac{-20}{2 \cdot 25} = -\frac{2}{5},\ \text{soluzione doppia.}$$

Possiamo evitare il calcolo di Δ e l'applicazione della formula se osserviamo che $25x^2 + 20x + 4$ è il quadrato di un binomio. La risoluzione dell'equazione diventa:

$$25x^2 + 20x + 4 = 0 \rightarrow (5x+2)^2 = 0 \rightarrow 5x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{5}.$$

c. $2x^2 - 1 \cdot x + 3 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{non ci sono soluzioni reali.}$$

Risoluzione di equazioni complete

Se nella forma normale $ax^2 + bx + c = 0$ il coefficiente b è divisibile per 2, è comodo usare la **formula risolutiva ridotta**:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$$

dove $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $3x^2 - 10x + 7 = 0$.

$b = -10$ è divisibile per 2, quindi applichiamo la formula ridotta:

$$3x^2 - 10x + 7 = 0, \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 3 \cdot 7 = (-5)^2 - 21 = 25 - 21 = 4,$$

$$x = \frac{-\left(\frac{-10}{2}\right) \pm \sqrt{4}}{3} = \frac{5 \pm 2}{3} \rightarrow x_1 = \frac{5-2}{3} = 1,\ x_2 = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Equazioni numeriche fratte

Le **equazioni di secondo grado numeriche fratte** sono equazioni in cui l'incognita compare nel denominatore di almeno una frazione e possono essere ricondotte a equazioni intere di secondo grado.

ESEMPIO

Risolviamo la seguente equazione.

$$\frac{x}{x-1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x-1}$$

scriviamo le C.E.

C.E.: $x \neq 0,\ x \neq 1$.

riduciamo allo stesso denominatore

$$\frac{2x^2+x-1}{2x(x-1)}=\frac{2x}{2x(x-1)}$$

moltiplichiamo entrambi i membri per $2x(x-1)$ e risolviamo l'equazione intera

$$2x^2+x-1-2x=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-x-1=0$$

$$\Delta = 1+8=9,\ x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm 3}{4} \rightarrow x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=1.$$

Controllo: $x_1=-\frac{1}{2}$ soddisfa le C.E. → accettabile; $x_2=1$ *non* soddisfa le C.E. → *non* accettabile.

L'equazione ha una sola soluzione, $x=-\frac{1}{2}$.

Scomposizione di un trinomio di secondo grado

Consideriamo il trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, e l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

- Se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni x_1 e x_2, e il trinomio può essere scomposto in fattori:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Se $\Delta = 0$, le soluzioni coincidono, quindi:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

- Se $\Delta < 0$, l'equazione non ha soluzioni, quindi il trinomio non è scomponibile.

Scomposizione di un trinomio di secondo grado

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori, quando è possibile, i trinomi:

a. $5x^2 + 34x - 7$; **b.** $9x^2 - 6x + 1$; **c.** $2x^2 - 3x + 5$.

a. Risolviamo l'equazione associata $5x^2 + 34x - 7 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 324,\ x = \frac{-17 \pm 18}{5} \rightarrow x_1 = -7,\ x_2 = \frac{1}{5}.$$

Scomponiamo il trinomio: $5x^2 + 34x - 7 = 5(x+7)\left(x - \frac{1}{5}\right)$.

b. Risolviamo l'equazione associata $9x^2 - 6x + 1 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0,\ x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Scomponiamo il trinomio:

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2.$$

c. L'equazione $2x^2 - 3x + 5 = 0$ ha discriminante $\Delta = 9 - 40 < 0$, quindi il trinomio non è scomponibile.

Sistemi di secondo grado

Il **grado di un sistema** di equazioni è il **prodotto dei gradi** delle equazioni che lo compongono.

Un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite è quindi composto da un'equazione di secondo grado e un'equazione di primo grado.

Un **sistema di secondo grado** può essere:

- **determinato** se le soluzioni sono in numero finito (al massimo due);
- **indeterminato** se le soluzioni sono infinite;
- **impossibile** se non ha soluzioni.

Sistemi di due equazioni in due incognite

Per risolvere un **sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite** si utilizza di solito il **metodo di sostituzione**.

Un sistema di questo tipo può in generale avere anche **una sola soluzione**, che è:

•**doppia** se l'equazione risolvente che si ottiene dalla sostituzione è di secondo grado con discriminante nullo;

•**semplice** se l'equazione risolvente che si ottiene dalla sostituzione è di primo grado.

ESEMPIO

a. $\begin{cases} 4y^2 - x = 0 \\ 1 + x = -4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y^2 - x = 0 \\ x = -4y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y^2 + 4y + 1 = 0 \\ x = -4y - 1 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} (2y+1)^2 = 0 \\ x = -4y - 1 \end{cases} \rightarrow \left(1; -\frac{1}{2}\right)$ **doppia**

b. $\begin{cases} 4y^2 = 3x \\ 2(y+x) = 3 + 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y^2 = 3x \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{4} \cdot \frac{9}{\cancel{4}} = 3x \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \left(3; \frac{3}{2}\right)$ **semplice**

Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$.

Sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione di primo grado

$$2x + 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; x + y - 2 = 0.$$

Il sistema può allora essere trasformato nel seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

che può essere risolto con il metodo di sostituzione.

Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$.

Isoliamo y nell'equazione di primo grado e sostituiamola nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 3 \\ x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 3\right)^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 3 \\ x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 3 \\ \frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita $\frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0$ e verifichiamo che $\Delta = \frac{81}{4} - \frac{125}{4}$ è negativo, quindi l'equazione non ha soluzioni reali e I. S. $= \emptyset$. Il sistema non ha soluzioni reali e si dice *impossibile*.

70

Equazioni di grado superiore al secondo

EQUAZIONI BINOMIE

Un'equazione è **binomia** se si può scrivere nella forma
$\boldsymbol{ax^n + b = 0}$, con $a, b, n \neq 0$.

Per risolverla, poniamo

$x^n = -\frac{b}{a}$ e distinguiamo due casi:

- se n è pari, l'equazione è determinata solo se $-\frac{b}{a} > 0$ e ci sono due soluzioni $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$
- se n è dispari, esiste sempre una sola soluzione reale $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

EQUAZIONI TRINOMIE

Un'equazione è **trinomia** se si può scrivere nella forma
$\boldsymbol{ax^{2n} + bx^n + c = 0}$,
con $a, b, c, n \neq 0$.

Per risolverla, introduciamo un'incognita *ausiliaria* $t = x^n$ e risolviamo l'equazione
$at^2 + bt + c = 0$.

Se questa è determinata con radici t_1 e t_2, le soluzioni dell'equazione trinomia si ottengono risolvendo le due equazioni binomie $x^n = t_1$ e $x^n = t_2$.

Equazioni di grado superiore al secondo

EQUAZIONI RISOLUBILI CON SCOMPOSIZIONI IN FATTORI

Alcune equazioni di grado superiore al secondo possono essere risolte scrivendole nella forma polinomiale $P(x) = 0$, scomponendo il polinomio in fattori, applicando la legge di annullamento del prodotto e unendo le soluzioni delle equazioni ottenute.

Risolviamo l'equazione:

$$\boldsymbol{6x^4 + 3x^2 - 6x^3 = 3x.}$$

$6x^4 + 3x^2 - 6x^3 = 3x$ — scriviamo l'equazione nella forma $P(x) = 0$

$6x^4 + 3x^2 - 6x^3 - 3x = 0$ — scomponiamo con raccoglimento totale e poi un raccoglimento parziale

$3x(x-1)(2x^2+1) = 0$ — legge di annullamento del prodotto

$3x = 0 \vee x - 1 = 0 \vee 2x^2 + 1 = 0$ — risolviamo le tre equazioni

$x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x^2 = -\frac{1}{2}$

La terza equazione è impossibile perché x^2 è sempre maggiore o uguale a zero, quindi le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

Sistemi di grado superiore al secondo

ESEMPIO – Risoluzione algebrica

Risolviamo il seguente sistema di quarto grado.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2-3x-3y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{scomponiamo in fattori il polinomio della seconda equazione}} \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+y)(x-y-3)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{applichiamo la legge di annullamento del prodotto}} \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=0 \quad \vee \quad x-y-3=0 \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere due sistemi.

Primo sistema $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ricaviamo } x \text{ nella seconda equazione e sostituiamo nella prima}} \begin{cases} 2y^2=2 \\ x=-y \end{cases} \to \begin{cases} y^2=1 \\ x=-y \end{cases} \to \begin{cases} y_1=-1 \\ x_1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2=1 \\ x_2=-1 \end{cases}$

Secondo sistema $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x-y-3=0 \end{cases} \to \begin{cases} (y+3)^2+y^2=2 \\ x=y+3 \end{cases} \to \begin{cases} y^2+6y+9+y^2=2 \\ x=y+3 \end{cases} \to \begin{cases} 2y^2+6y+7=0 \\ x=y+3 \end{cases}$

$2y^2+6y+7=0$ $\underbrace{\text{non ha soluzioni}}_{\frac{\Delta}{4}=9-14<0}$ $\to$ il secondo sistema è impossibile.

Concludiamo che il sistema iniziale ha per soluzioni le coppie $(-1;1)$, $(1;-1)$.

Esempio 4.5.1. *Risolvere le equaioni*

1. $x^4-3=0$.
2. $x^3+5=0$.

Nel primo caso si ha

$$x=\pm\sqrt[4]{2}.$$

mentre nel secondo caso abbiamo

$$x=\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}.$$

Esempio 4.5.3. *Risolviamo l'equazione*

$$x^3+2x^2-9x-18=0.$$

Raccogliendo parzialmente abbiamo

$$x^2(x+2)-9(x+2)=0.$$

da cui

$$(x+2)(x^2-9)=0.$$

Ora applichiamo la legge di annullamento del prodotto. Otteniamo le equazioni

$$x+2=0.$$

e

$$x^2-9=0.$$

La prima di esse ha come soluzione $x_1=-2$ mentre la seconda ha come soluzioni $x_2=3$ e $x_3=-3$.

Esempio 4.5.2. *Risolviamo l'equazione*

$$x^4-5x^2+4=0.$$

Poniamo $y=x^2$ e otteniamo

$$y^2-5y+4=0.$$

che risolta ci fornisce $y_1=4$ e $y_2=1$. Ne segue che $x^2=4$ e $x^2=1$. Nel primo caso otteniamo $x=\pm2$ mentre nel secondo caso otteniamo $x=\pm1$.

Esempio 4.5.4. *Risolviamo l'equazione*

$$x^3-6x^2+11x-6=0.$$

In questo caso il raccoglimento parziale non consente di fattorizzare il primo membro ed allora cerchiamo di vedere se il **Teorema di Ruffini** *ci è utile. I divisori del termine noto -6 sono i seguenti: ±1, ±2, ±3, ±6. Ponendo*

$$p(x)=x^3-6x^2+11x-6.$$

iniziamo a calcolare $p(1)$. Si ha $p(1)=1^3-6\cdot1^2+11\cdot1-6=1-6+11-6=0$ e quindi $x=1$ è uno zero del polinomio e di conseguenza una soluzione dell'equazione. Applichiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Abbiamo dunque che

$$p(x)=(x-1)(x^2-5x+6).$$

e quindi la nostra equazione diventa

$$(x-1)(x^2-5x+6)=0.$$

Risolvendo $x-1=0$ abbiamo $x_1=1$. Risolvendo $x^2-5x+6=0$ abbiamo $x_2=2$ e $x_3=3$.

74

Esempio.

$$\frac{3x}{x-3} - 2\,\frac{x+1}{x-1} = 4\,\frac{x+1}{x^2-4x+3}$$

Si moltiplica per il minimo comune multiplo dei denominatori, $(x-1)(x-3)$, e semplifichiamo:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{1, 2\}$$

Occhio! Le due equazioni sono equivalenti quando $(x-1)(x-3) \neq 0$. Dobbiamo verificare che le soluzioni ottenute non annullino i denominatori!

Quindi $x = 1$ non è soluzione!

ESEMPIO Risoluzione di un'equazione, previa ricerca delle sue soluzioni razionali

Risolviamo l'equazione $2x^3 + 2x^2 - 7x - 6 = 0$

▶ 1° passo **Cerchiamo, se esiste, almeno una soluzione razionale dell'equazione**
Il polinomio $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 7x - 6$ è a coefficienti *interi*, perciò possiamo utilizzare il **Teorema 1**. Determiniamo anzitutto tutti i divisori p del termine noto -6 e tutti i divisori q di 2.

p: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ — Divisori di -6

q: $\pm 1, \pm 2$ — Divisori di 2

Ora costruiamo tutti i possibili rapporti $\frac{p}{q}$:

$\frac{p}{q}$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ — Candidati zeri razionali

Il teorema dice che *se* $P(x)$ ha degli zeri razionali, essi appartengono a quest'ultimo elenco; potrebbe però anche accadere che nessuno dei numeri elencati sia uno zero! Per decidere *se* qualcuno di questi zeri «potenziali» è *realmente* uno zero, effettuiamo delle verifiche dirette, per sostituzione, a partire dai numeri «più semplici», cioè da ± 1 e ± 2.

$P(-1) = 1, \quad P(1) = -9, \quad P(-2) = 0$

Dunque -2 è uno zero. Non procediamo ulteriormente nella ricerca degli zeri razionali, poiché uno zero è sufficiente per effettuare la scomposizione.

▶ 2° passo **Determiniamo la scomposizione di $P(x)$**
Poiché -2 è uno zero di $P(x)$, il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x - (-2))$, cioè per $(x + 2)$.
Effettuiamo la divisione mediante la regola di Ruffini, costruendo il consueto schema. Da esso deduciamo che:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 2 & -7 & -6 \\ -2 & & -4 & 4 & 6 \\ \hline & 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 2x - 3$

quindi:

$P(x) = (x + 2)(2x^2 - 2x - 3)$

▶ 3° passo **Risolviamo l'equazione $P(x) = 0$**

$2x^3 + 2x^2 - 7x - 6 = 0$ — Equazione da risolvere

$(x + 2)(2x^2 - 2x - 3) = 0$ — In base alla scomposizione di $P(x)$

$x + 2 = 0 \vee 2x^2 - 2x - 3 = 0$ — Legge di annullamento del prodotto

$x = -2 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ — Risolvendo le due equazioni

▶ 4° passo **Concludiamo**
L'insieme delle soluzioni dell'equazione data è: $S = \left\{-2, \frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right\}$

75

Risolvi le seguenti equazioni trinomie:

a. $x^4 - x^2 - 6 = 0$ b. $x^6 - 6x^3 - 16 = 0$ c. $x^8 - x^4 + 2 = 0$

a. Ponendo $x^2 = t$, ottieni l'equazione $t^2 - t - 6 = 0$, che ammette le due soluzioni:
$t = -2$ e $t = ...$

Avendo posto $x^2 = t$, le soluzioni dell'equazione di partenza sono le soluzioni delle due equazioni:
$x^2 = -2$ e $x^2 = ...$

La prima equazione non ammette ....; la seconda ammette come soluzioni $x = \pm$ ..... Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è $S = \{-\sqrt{.....}, \sqrt{.....}\}$.

b. Ponendo $x^3 = t$, ottieni l'equazione $t^2 - 6t - 16 = 0$, che ammette come soluzioni:
$t = -2$ e $t = ...$

Avendo posto $x^3 = t$, le soluzioni dell'equazione di partenza sono le soluzioni delle due equazioni binomie:
$x^3 = -2$ e $x^3 = ...$

da cui: $x = -\sqrt[3]{.....}$ e $x = \sqrt[3]{.....} = ...$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è $S = \{-\sqrt[3]{.....}, ...\}$.

c. Ponendo $x^4 = t$, ottieni l'equazione $t^2 - t + 2 = 0$. Il discriminante di questa equazione è ...., quindi ....

Risolvi l'equazione $x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0$.

$x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^4 - 1 - 2x^3 - 2x = 0 \Rightarrow (x^2 - ....)(x^2 + ...) - 2x(.........) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 + ...)(x^2 - .... - ....) = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + ... = 0}_{\text{impossibile in } \mathbb{R}} \vee x^2 - .... - .... = 0 \Rightarrow x = 1 \pm .....$

76

Risolvi l'equazione $2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$, dopo averne determinato qualche soluzione razionale.

- **Ricerca almeno una soluzione razionale dell'equazione**
  Le eventuali soluzioni razionali dell'equazione sono: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$ (sai giustificare perché?).
  Prova, per tentativi, se qualcuna di esse è effettivamente una soluzione.
  Posto $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, calcola:
  $P(1) = \ldots\ldots = \ldots$ $\quad P(-1) = \ldots\ldots = \ldots$ $\quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots = \ldots$ $\quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots = \ldots$
  Troverai che l'unico zero di $P(x)$ è $-\frac{1}{2}$. Quindi $P(x)$ è certamente divisibile per $x + \frac{1}{2}$.
- **Scomponi il polinomio effettuando la divisione di $P(x)$ per $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ mediante la regola di Ruffini**
  Effettua la divisione con la regola di Ruffini, completando lo schema.
  Il quoziente della divisione è $Q(x) = \ldots\ldots$
  Puoi quindi scrivere la seguente scomposizione di $P(x)$: $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(\ldots\ldots)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -3 & -4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

- **Risolvi l'equazione applicando la legge di annullamento del prodotto**

$2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$	Equazione da risolvere
$\left(x + \frac{1}{2}\right)(\ldots\ldots) = 0$	In base alla scomposizione di $P(x)$ trovata
$x + \frac{1}{2} = 0 \lor \ldots\ldots = 0$	Legge di annullamento del prodotto
$x = -\frac{1}{2} \lor x = \ldots\ldots$	Risolvendo le due equazioni

- **Concludi**
  Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è: $S = \left\{-\frac{1}{2}, \ldots\ldots\right\}$.

77

Disequazioni lineari

Disuguaglianze numeriche

Le disuguaglianze fra numeri possono essere espresse con uno di questi simboli:

$<$	$\leq$	$>$	$\geq$
minore	minore o uguale	maggiore	maggiore o uguale

Chiamiamo:

- *primo membro* l'espressione a sinistra del simbolo di relazione;
- *secondo membro* quella a destra.

primo membro

$$\underbrace{5+3}_{\text{primo membro}} < \underbrace{7+8}_{\text{secondo membro}}$$

secondo membro

Due disuguaglianze hanno lo **stesso verso** se compare lo stesso simbolo, > o <, altrimenti hanno **verso contrario.**

ESEMPIO

$\underbrace{-5>-7 \qquad 8>6}_{\text{stesso verso}} \qquad \underbrace{3<4 \qquad -1>-9}_{\text{verso contrario}}$

Proprietà delle disuguaglianze

CON LE PAROLE	Se ai due membri di una disuguaglianza **sommiamo** o **sottraiamo** uno stesso numero, otteniamo una disuguaglianza con lo stesso verso.
CON I SIMBOLI	se $a<b$: $a+c<b+c$; $a-c<b-c$.
CON I NUMERI	$-5<1 \xrightarrow{\text{sommiamo 2}} -5+2<1+2$;

Proprietà delle disuguaglianze

CON LE PAROLE	Se **moltiplichiamo** o **dividiamo** i due membri di una disuguaglianza per un numero: • *positivo,* otteniamo una disuguaglianza con lo *stesso verso;* • *negativo,* otteniamo una disuguaglianza con *verso contrario*. Questa proprietà non vale se si moltiplica o si divide per zero.
CON I SIMBOLI	se $a < b$ e $c > 0$ $\rightarrow$ $a \cdot c < b \cdot c$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; se $a < b$ e $c < 0$ $\rightarrow$ $a \cdot c > b \cdot c$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
CON I NUMERI	$+2 > -7 \underset{\text{dividiamo per } +5}{\rightarrow} \frac{+2}{+5} > \frac{-7}{+5}$; $+4 > +1 \underset{\text{moltiplichiamo per } -2}{\rightarrow} (+4)\cdot(-2) < (+1)\cdot(-2)$.

Proprietà delle disuguaglianze

CON LE PAROLE	Data una disuguaglianza fra due numeri *diversi da zero e concordi*, la disuguaglianza fra i loro **reciproci** ha *verso contrario.*
CON I SIMBOLI	$a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ se a e b concordi e $a,\ b \neq 0$.
CON I NUMERI	$3 < 4 \rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; $-5 < -4 \rightarrow -\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$.

Proprietà delle disuguaglianze

CON LE PAROLE	Se **eleviamo a *n***, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, i due membri *non negativi* di una disuguaglianza, otteniamo una disuguaglianza con lo *stesso verso*.
CON I SIMBOLI	$a < b \rightarrow a^n < b^n$, con $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$.
CON I NUMERI	$+2 < +3 \rightarrow (+2)^4 < (+3)^4$; $+4 > +2 \rightarrow (+4)^3 > (+2)^3$

Disequazioni

DEFINIZIONE

Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale cerchiamo quali valori, sostituiti a una o più lettere, rendono vera la disuguaglianza stessa.

ESEMPIO

Cerchiamo i valori di a tali che:

$\underbrace{a - 3 > 15}_{\text{è una disequazione}}$.

Chiamiamo:

- **soluzioni** i valori che rendono vera la disuguaglianza;
- **incognite** le lettere per le quali cerchiamo le soluzioni.

ESEMPIO

incognita

$5x - 3 > 7$

4 è soluzione perché: $5 \cdot 4 - 3 > 7$.

1 *non* è soluzione perché: $5 \cdot 1 - 3 < 7$.

Risoluzione di una disequazione

Risolvere una disequazione significa trovare *tutte* le sue soluzioni.
Cerchiamo le soluzioni in un insieme che, in mancanza di altre indicazioni, è $\mathbb{R}$.

ESEMPIO
Le soluzioni di $x+2<10$ sono tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ tali che $x<8$.

Rappresentazione delle soluzioni

Per scrivere o rappresentare graficamente le soluzioni di una disequazione usiamo gli **intervalli** di numeri reali.

Un intervallo può essere:
- **illimitato** se è costituito da tutti i numeri che precedono un certo numero (intervallo illimitato **inferiormente** o **a sinistra**) o che lo seguono (intervallo illimitato **superiormente** o **a destra**);
- **limitato** se è formato da tutti i valori compresi fra due numeri.

Il numero o i numeri con i quali inizia o termina l'intervallo sono detti **estremi**.

$x<-5$	$x>1$	$8<x<10$
intervallo illimitato inferiormente	intervallo illimitato superiormente	intervallo limitato

Rappresentazione delle soluzioni

Rispetto a un estremo un intervallo può essere:

- **aperto**, se non comprende l'estremo;
- **chiuso**, se comprende l'estremo.

La variabile relativa ai valori dell'intervallo la indichiamo con *x*.

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ si leggono *più infinito* e *meno infinito* e si usano per indicare che un intervallo è illimitato a destra o a sinistra, rispettivamente.

Rappresentazione delle soluzioni

Vediamo alcuni esempi dei tre tipi di rappresentazione delle soluzioni di una disequazione.

Intervallo limitato, aperto a sinistra, chiuso a destra.	aperto 2 — chiuso 5	chiuso $2 < x \leq 5$ aperto	chiuso $]2; 5]$ aperto
Intervallo illimitato, chiuso a sinistra.	−7	$x \geq -7$	$[-7; +\infty[$
Intervallo illimitato, aperto a destra.	3	$x < 3$	$]-\infty; 3[$

Diversi tipi di disequazioni

Una disequazione è:

- **intera** se l'incognita non compare nei denominatori;
- **fratta** se l'incognita compare in almeno uno dei denominatori;
- **numerica** se non contiene altre lettere oltre all'incognita;
- **letterale** se oltre all'incognita contiene altre lettere, dette *parametri* della disequazione.

ESEMPIO

$3x - 1 < 5$ è una disequazione numerica intera;

$5a + \frac{x}{2} \geq \frac{1}{a+1}$, nell'incognita x, è una disequazione letterale intera con parametro a;

$\frac{7}{x+1} \leq \frac{5}{x-1}$ è una disequazione numerica fratta;

$\frac{1}{x} > b$, nell'incognita x, è una disequazione letterale fratta, con parametro b.

Diversi tipi di disequazioni

Una disequazione nella forma ***P*(*x*) > 0** o ***P*(*x*) < 0**, dove $P(x)$ è un polinomio ridotto nell'incognita x, è detta in **forma normale** o **canonica**.

Chiamiamo **grado** della disequazione il grado del polinomio $P(x)$.

ESEMPIO

$x^3 - 4x + 1 \leq 0$ è una disequazione intera di terzo grado.

Una disequazione di primo grado è anche detta **disequazione lineare**.

Disequazioni equivalenti

DEFINIZIONE	ESEMPIO
Due disequazioni sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.	sono equivalenti $x-3>0$ e $2x>6$ hanno entrambe come soluzioni $x>3$.

Per ottenere da una disequazione una disequazione equivalente, utilizziamo due princìpi di equivalenza.

Primo principio di equivalenza

Il **primo principio di equivalenza** afferma che aggiungendo o sottraendo ai due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione letterale, definita nel dominio della disequazione, otteniamo una disequazione equivalente.

ESEMPIO

$7x-2>1 \quad \rightarrow \quad 7x-2+2>1+2 \quad \rightarrow \quad 7x>3;$

$4x<2+x \quad \rightarrow \quad 4x-x<2+x-x \quad \rightarrow \quad 3x<2.$

Primo principio di equivalenza

Dal primo principio si deduce che:

- un termine può essere *trasportato* da un membro all'altro cambiandogli il segno;
- un termine può essere *cancellato* se presente in entrambi i membri.

ESEMPIO

$$\cancel{x^2} > \cancel{x^2} + 1 - x \underset{\text{cancellazione}}{\rightarrow} 0 > 1 - x \underset{\text{trasporto}}{\rightarrow} x > 1$$

Secondo principio di equivalenza

Il **secondo principio di equivalenza** afferma che moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per uno stesso numero o una stessa espressione letterale diversi da 0, otteniamo una disequazione equivalente:

- mantenendo lo *stesso verso*, se il numero (o l'espressione) per cui moltiplichiamo è *positivo;*
- *cambiando verso*, se il numero (o l'espressione) è *negativo*.

ESEMPIO

$$5x > 1 \xrightarrow{\text{dividiamo per 5 e manteniamo lo stesso verso}} x > \frac{1}{5};$$

$$-4(x+1) > 8 \xrightarrow{\text{dividiamo per } -4 \text{ e cambiamo verso}} x + 1 < -2.$$

Secondo principio di equivalenza

Dal secondo principio si deduce che *se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione, si deve cambiare il verso* della disequazione.

Moltiplicare o dividere per un'espressione letterale contenente l'incognita porta a una disequazione equivalente a quella di partenza solo se tale espressione non è mai nulla ed è definita nel dominio della disequazione.

ESEMPIO
$(1+x^2)(x-1) \geq (1+x^2)(2x+3)$ è equivalente a $(x-1) \geq (2x+3)$ perché $1+x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$x(x-1) \geq x(2x+3)$ non è equivalente a $(x-1) \geq (2x+3)$.

Disequazioni intere di primo grado

Per risolvere una disequazione di primo grado numerica intera, dobbiamo ricondurci a una delle forme $ax < b$, $ax \leq b$, $ax > b$, $ax \geq b$
e poi dividere ambo i membri per il coefficiente a di x.

ESEMPIO
$4x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{4} \rightarrow x > \frac{3}{2}$.

dividiamo ambo i membri per il coefficiente di x, cioè 4.

In base al tipo di insieme delle soluzioni, una disequazione può essere:

- **determinata**;
- **impossibile**;
- **sempre verificata**.

Disequazioni intere di primo grado

ESEMPIO

Risolviamo le disequazioni:

a. $x - 6 > 3x$; **b.** $2(x+3) - 3x < 1 - x$; **c.** $(x+1)^2 - 2x > x^2 - 6$.

a. $x - 6 > 3x \;\rightarrow\; x - 3x > 6 \rightarrow -2x > 6 \;\rightarrow\; \frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2} \rightarrow x < -3$

portiamo i termini in *x* al primo membro, quelli senza *x* al secondo

dividiamo entrambi i membri per -2: il verso cambia

L'insieme delle soluzioni è l'intervallo illimitato $x < -3$ e la disequazione è **determinata**.

b. $2(x+3) - 3x < 1 - x \;\rightarrow\; 2x + 6 - 3x < 1 - x \;\rightarrow\; 2x - 3x + x < 1 - 6 \;\rightarrow$
$\mathbf{0x < -5}$

Un qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0, che *non* è minore di -5.

L'insieme delle soluzioni è vuoto e la disequazione è **impossibile**.

c. $(x+1)^2 - 2x > x^2 - 6 \;\rightarrow\; \cancel{x^2} + 2x + 1 - 2x > \cancel{x^2} - 6 \;\rightarrow\; 0x > -6 - 1 \;\rightarrow$
$\mathbf{0x > -7}$

Un numero qualsiasi moltiplicato per 0 dà 0, che è maggiore di -7.

L'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$ e la disequazione è **sempre verificata**.

Sistemi di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni, nella stessa incognita, per le quali cerchiamo *tutte le soluzioni comuni.*
Un sistema può avere un'unica soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione (sistema **impossibile**).

ESEMPIO

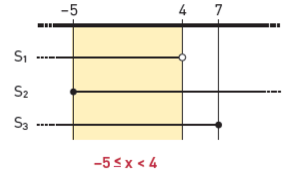
Vogliamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - 1 < 3 \\ 3x + 15 \geq 0 \\ 4x \leq 28 \end{cases}$$

- Risolviamo ognuna delle disequazioni:

  $x - 1 < 3 \rightarrow x < 4; \quad 3x + 15 \geq 0 \rightarrow x \geq -5; \quad 4x \leq 28 \rightarrow x \leq 7.$

- Costruiamo uno schema grafico con gli intervalli S_1, S_2 e S_3 che rappresentano gli insiemi delle soluzioni.
- Determiniamo l'intersezione dei tre insiemi di soluzioni, colorando la zona del grafico in cui abbiamo soluzioni comuni alle tre disequazioni.



Le soluzioni del sistema sono $-5 \leq x < 4$.

Segno di un prodotto

Disequazioni del tipo $A(x) \cdot B(x) > 0$ o $A(x) \cdot B(x) < 0$ si risolvono studiando il segno del prodotto dei due polinomi di primo grado.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $(x-4)(2x+1) \leq 0$.

- Studiamo il segno dei fattori ponendoli positivi (indipendentemente dal simbolo $\leq$ della disequazione):

$$x-4>0 \rightarrow x>4;$$

$$2x+1>0 \rightarrow x>-\frac{1}{2}.$$

- Compiliamo il quadro dei segni e cerchiamo gli intervalli in cui il prodotto è negativo o nullo.

Le soluzioni sono:

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 4.$$

		$-\frac{1}{2}$		4	
$x-4$	−		−	0	+
$2x+1$	−	0	+		+
$(x-4)(2x+1)$	+	0	−	0	+

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

Una disequazione è di **secondo grado intera** se è possibile scriverla nella **forma normale *$ax^2 + bx + c > 0$***, con $a \neq 0$ e positivo, o nelle analoghe con i simboli <, ≥, ≤.

Risolvere una disequazione significa trovare tutte le sue **soluzioni**. Per farlo è necessario risolvere l'**equazione associata**, determinando il discriminante e le eventuali radici.

$a > 0$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$
$\Delta > 0$	x_1 x_2 $x < x_1 \vee x > x_2$	x_1 x_2 $x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$	x_1 $x \neq x_1$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni:

a. $x^2-3x+2>0$ b. $-x^2-6x+7>0$ c. $x^2-2x+2>0$

—

a. Traccia il grafico della parabola di equazione $y=x^2-3x+2$, verificando in particolare che ha la concavità rivolta verso l'alto e interseca l'asse x nei punti di coordinate $(1, 0)$ e $(2, 0)$. La disequazione è soddisfatta in corrispondenza dei valori di x per cui i corrispondenti punti della parabola hanno ordinate positive, cioè per:

$x<$ .... $\vee\ x>$ ....

b. Traccia il grafico della parabola di equazione $y=-x^2-6x+7$, verificando in particolare che ha la concavità rivolta verso il basso e interseca l'asse x nei punti di coordinate $(-7, 0)$ e $(1, 0)$. La disequazione è soddisfatta in corrispondenza dei valori di x per cui i corrispondenti punti della parabola hanno ordinate positive, cioè per:

.... $<x<$ ....

c. Traccia il grafico della parabola di equazione $y=x^2-2x+2$, verificando in particolare che ha la concavità rivolta verso l'alto e che non interseca l'asse x in alcun punto. Tutti i punti della parabola hanno ordinate positive, quindi la disequazione è soddisfatta per ogni ....

Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $2x^2-3x+2>0$ b. $-x^2-5x+6>0$

—

a. Osserva anzitutto che il coefficiente di x^2 è positivo.
Inoltre l'equazione associata, $2x^2-3x-2=0$, ha due soluzioni reali distinte:

$x=$ .... $\vee\ x=2$

Per il **Teorema 1** la disequazione è soddisfatta negli intervalli *esterni* alle soluzioni:

$x<$ .... $\vee\ x>$ ....

b. Il coefficiente di x^2 è negativo. Cambia allora i segni e il verso della disequazione; ottieni la disequazione equivalente:

$x^2+5x-6<0$

L'equazione associata, $x^2+5x-6=0$, ha due soluzioni reali distinte:

$x=$ .... $\vee\ x=1$

Per il **Teorema 1** la disequazione è soddisfatta nell'intervallo *interno* alle soluzioni:

.... $<x<$ ....

01

Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $x^2+16x+16>0$ b. $x^2-10x+25\leq 0$

—

a. Osserva che il coefficiente di x^2 è positivo e che l'equazione associata, $x^2+16x+16=0$, equivale a $(x+4)^2=0$, quindi ha la soluzione doppia $x=$ ....
Il trinomio al primo membro è quindi sempre positivo, eccetto che per il valore $x=$ .... per cui si annulla.
Ne puoi dedurre che la disequazione è soddisfatta per ogni ...., tale che $x\neq$ ....

b. Osserva che il coefficiente di x^2 è positivo e che l'equazione associata, $x^2-10x+25=0$, equivale a $(x-5)^2=0$, quindi ha la soluzione doppia $x=$ ....
Il trinomio al primo membro è quindi sempre positivo, eccetto che per il valore $x=$ .... per cui si annulla. Ne puoi dedurre che la disequazione è soddisfatta solo per $x=$ ....

Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $x^2-3x+4>0$ b. $-2x^2+5x-7\geq 0$

—

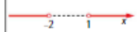
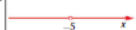
a. Osserva che il coefficiente di x^2 è positivo e il discriminante dell'equazione associata, $x^2-3x+4=0$, è uguale a .... Per il **Teorema 3** il trinomio al primo membro è sempre positivo, quindi la disequazione è verificata ....

b. Il coefficiente di x^2 è negativo. Cambiando il segno e il verso della disequazione, ottieni la disequazione equivalente:

$2x^2-5x+7\leq 0$

Il discriminante dell'equazione associata, $2x^2-5x+7=0$, è uguale a ....
Per il **Teorema 3** il trinomio al primo membro è sempre positivo, quindi la disequazione non è verificata in corrispondenza di alcun ....

102

Disequazione da risolvere	Il segno del coefficiente di x^2 è positivo?	Soluzioni dell'equazione associata	Soluzioni della disequazione	Rappresentazione dell'insieme delle soluzioni
$x^2+x-2>0$	Sì	$x^2+x-2=0$ $(x-1)(x+2)=0$ $\underbrace{x_1=-2,\ x_2=1}_{\text{due soluzioni reali distinte} \to \text{Teorema 1}}$	Per il **Teorema 1**, sono i valori di x per cui: $\underbrace{x<-2 \vee x>1}_{}$ intervalli esterni, perché la disequazione è soddisfatta quando il trinomio è positivo	
$-x^2+7\geq 0$	No, risolviamo la disequazione equivalente: $\underbrace{x^2-7\leq 0}_{}$ cambiando i segni e il verso	$x^2-7=0$ $x^2=7$ $\underbrace{x_1=-\sqrt{7},\ x_2=\sqrt{7}}_{\text{due soluzioni reali distinte} \to \text{Teorema 1}}$	Per il **Teorema 1**, sono i valori di x per cui: $\underbrace{-\sqrt{7}\leq x\leq\sqrt{7}}_{}$ intervallo **interno**, perché la disequazione è soddisfatta quando x^2-7 è negativo o nullo	
$-x^2+4x-4\geq 0$	No, risolviamo la disequazione equivalente: $\underbrace{x^2-4x+4\leq 0}_{}$ cambiando i segni e il verso	$x^2-4x+4=0$ $(x-2)^2=0$ $\underbrace{x_1=x_2=2}_{\text{due soluzioni coincidenti} \to \text{Teorema 2}}$	Il trinomio x^2-4x+4 è sempre positivo, eccetto che per il valore $x=2$ per cui si annulla; l'unica soluzione della disequazione è perciò: $x=2$	
$x^2+10x+25>0$	Sì	$x^2+10x+25=0$ $(x+5)^2=0$ $\underbrace{x_1=x_2=-5}_{\text{due soluzioni coincidenti} \to \text{Teorema 2}}$	Il trinomio $x^2+10x+25$ è sempre positivo, eccetto che per il valore $x=-5$ per cui si annulla: tale valore **non** fa parte delle soluzioni della disequazione perché compare il simbolo $>$; l'insieme delle soluzioni è perciò $\mathbb{R}-\{-5\}$.	
$x^2-x+1<0$	Sì	Nessuna soluzione reale perché $\Delta=-3<0$ $\to$ Teorema 3	Per il **Teorema 3**, il trinomio x^2-x+1 è sempre positivo, quindi la disequazione **non** ha soluzioni reali.	
$2x^2-3x+2\geq 0$	Sì	Nessuna soluzione reale perché $\Delta=-7<0$ $\to$ Teorema 3	Per il **Teorema 3**, il trinomio $2x^2-3x+2$ è sempre positivo, quindi la disequazione è soddisfatta per ogni $x\in\mathbb{R}$.	

103

Risoluzione di una disequazione di secondo grado

ESEMPIO

$-4x^2-11x+3\geq 0$ cambiamo segno ai termini e verso alla disequazione per avere $a>0$

$4x^2+11x-3\leq 0$ la disequazione richiede che il trinomio sia negativo o nullo

Risolviamo l'equazione associata:

$$4x^2+11x-3=0 \to \Delta=121+48=169>0; \quad x=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{8};$$

$$x_1=\frac{-11-13}{8}=-\frac{24}{8}=-3,$$

$$x_2=\frac{-11+13}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Compiliamo lo schema del segno del trinomio e scegliamo i valori di x per i quali il trinomio è negativo o nullo.

Le soluzioni della disequazione sono:

$$-3\leq x\leq\frac{1}{4}.$$

Disequazioni intere di grado superiore al secondo

Per risolvere una disequazione di **grado superiore al secondo** procediamo in questo modo:

a. scomponiamo in fattori il polinomio;
b. studiamo il segno di ogni fattore;
c. compiliamo il quadro dei segni e studiamo il segno del prodotto.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 > 0$.

a. Scomponiamo in fattori il polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ con il metodo di Ruffini.

Scriviamo il polinomio $P(x)$ scomposto in due fattori, F_1 e F_2:

$$P(x) = \underbrace{(x+1)}_{F_1}\underbrace{(x^2 - 3x - 10)}_{F_2}.$$

b. Studiamo il segno dei fattori F_1 e F_2.

$F_1 > 0 \rightarrow x + 1 > 0 \rightarrow x > -1;$

$F_2 > 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 > 0$ per $x < -2 \vee x > 5$.

c. Compiliamo il quadro dei segni e studiamo il segno del prodotto.

		−2		−1		5	
F_1	−		−	0	+		+
F_2	+	0	−		−	0	+
$F_1 \cdot F_2$	−	0	+	0	−	0	+

La disequazione richiede che il polinomio prodotto sia positivo, quindi le sue soluzioni sono:

$-2 < x < -1 \vee x > 5$.

Disequazioni intere di grado superiore al secondo

Ogni disequazione intera di **grado superiore al secondo** può essere scritta nella forma:

$P(x) > 0$ (o in una delle forma analoghe con <, ≥, ≤),

dove ***P*(*x*) è un polinomio**.

Quando il polinomio è **scomponibile** in fattori di primo o secondo grado, otteniamo la risoluzione studiando il segno dei fattori e del polinomio.

Disequazioni fratte

In una disequazione fratta l'**incognita compare al denominatore**, quindi per risolverla è necessario scriverla nella forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} > 0,$$ forma normale di una disequazione fratta

o in una analoga con <, ≥, ≤, e studiare il segno della frazione.
Affinché la frazione algebrica esista, il denominatore *D*(*x*) deve essere diverso da zero.

Disequazioni fratte

Per risolvere una **disequazione fratta** procediamo in questo modo:

a. poniamo il denominatore diverso da zero;
b. scomponiamo in fattori numeratore e denominatore;
c. studiamo il segno di numeratore e denominatore;
d. compiliamo il quadro dei segni e studiamo il segno del quoziente.

ESEMPIO

Risolviamo la seguente disequazione.

$$\frac{x-x^3}{4x^2-25x+6} \leq 0$$

a. Il denominatore deve essere diverso da 0, perciò:

C.E.: $4x^2-25x+6 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{4}$ e $x \neq 6$.

b. Scomponiamo il numeratore in due fattori, N_1 e N_2.

$$x - x^3 = \underbrace{x}_{N_1}\underbrace{(1-x^2)}_{N_2}$$

c. Studiamo i segni di N_1, N_2 e del denominatore D.

$N_1 > 0 \rightarrow x > 0$; $N_2 > 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2-1 < 0 \rightarrow -1 < x < 1$

$D > 0 \rightarrow 4x^2-25x+6 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{4} \vee x > 6$.

d. Compiliamo il quadro dei segni, evidenziando i valori in corrispondenza dei quali si annullano rispettivamente il numeratore e il denominatore.

La disequazione richiede che la frazione sia negativa o nulla, quindi le sue soluzioni sono:

$$-1 \leq x \leq 0 \vee \frac{1}{4} < x \leq 1 \vee x > 6.$$

Sistemi di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni che devono essere soddisfatte *contemporaneamente.*

Per risolverlo procediamo in questo modo:

- risolviamo ciascuna delle disequazioni;
- costruiamo uno schema grafico con gli intervalli che rappresentano gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni;
- determiniamo l'intersezione di tutti gli insiemi delle soluzioni.

Sistemi di disequazioni

ESEMPIO

Risolviamo il seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} x^2 - 5 < 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

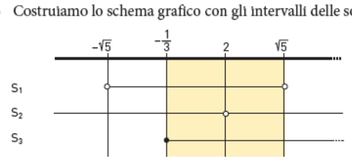
- Risolviamo singolarmente ognuna delle tre disequazioni.

  Prima disequazione: $x^2 - 5 < 0 \rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. — S_1

  Seconda disequazione: $x^2 - 4x + 4 > 0 \rightarrow \underbrace{x \neq 2}_{S_2}$. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ è sempre positivo tranne che per $x = 2$, valore per cui si annulla

  Terza disequazione: $3x + 1 \geq 0 \rightarrow 3x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$. — S_3

- Costruiamo lo schema grafico con gli intervalli delle soluzioni.



- Determiniamo l'intersezione dei tre insiemi di soluzioni, colorando la zona del grafico in cui ci sono soluzioni comuni alle **tre** disequazioni.

  Le soluzioni del sistema sono:

  $-\frac{1}{3} \leq x < 2 \vee 2 < x < \sqrt{5}$.

SINTESI

Procedimento per risolvere una disequazione di grado superiore al secondo
1° passo: si riconduce la disequazione a forma normale (se non lo è già);
2° passo: si scompone il polinomio al primo membro della disequazione in fattori di primo o secondo grado (o eventualmente di grado superiore, purché se ne sappia studiare il segno);
3° passo: si studia il segno di ciascun fattore;
4° passo: si costruisce una tabella riassuntiva dove si riporta il segno di ciascun fattore e si deduce, in base alla regola dei segni, il segno del prodotto in ciascun intervallo che si è venuto a determinare;
5° passo: si conclude deducendo, dalla tabella, l'insieme delle soluzioni della disequazione.

ESEMPIO Disequazione di terzo grado

Risolviamo la disequazione $x^3 - x^2 \leq 4x - 4$.

- 1° passo Portiamo tutti i termini al primo membro, in modo da riscrivere la disequazione in forma normale:

  $x^3 - x^2 - 4x + 4 \leq 0$

- 2° passo Scomponiamo il polinomio al primo membro in fattori:

  $x^2(x - 1) - 4(x - 1) \leq 0$
  $(x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$

- 3° passo Studiamo il segno dei fattori:

  1° *fattore* $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
  2° *fattore* $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$

- 4° passo Costruiamo la tabella dei segni in **Fig. 7**.

		-2		1		2		x
segno di $(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
segno di (x^2-4)	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
segno di $(x-1)(x^2-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Figura 7

- 5° passo La disequazione $(x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$ è soddisfatta quando il prodotto $(x - 1)(x^2 - 4)$ è negativo o nullo, cioè per:

  $x \leq -2 \vee 1 \leq x \leq 2$

La rappresentazione dell'insieme delle soluzioni sulla retta reale è perciò quella in **Fig. 8**.

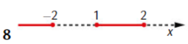


Figura 8

ESEMPIO Disequazione frazionaria con termini di primo e secondo grado

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{x-4}{1-x^2} \leq 0$$

- 1° passo Studiamo il segno del numeratore e del denominatore.

  Numeratore $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$
  Denominatore $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$ Perché?

- 2° passo Costruiamo la tabella dei segni (**Fig. 9**).

		-1		1		4		x
segno di $(x-4)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
segno di $(1-x^2)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
segno di $\frac{x-4}{1-x^2}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	

Figura 9

- 3° passo Concludiamo.

La disequazione $\frac{x-4}{1-x^2} \leq 0$ è verificata quando la frazione $\frac{x-4}{1-x^2}$ è negativa o nulla.

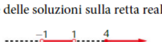
Dalla tabella dei segni vediamo che ciò accade per:

$-1 < x < 1 \vee x \geq 4$

Nota che -1 e 1 sono estremi *esclusi* perché, per $x = \pm 1$, la frazione **non** è definita; invece 4 è un estremo *incluso*, perché, per $x = 4$, la frazione è *nulla* e nella disequazione compare il simbolo $\leq$.

La rappresentazione dell'insieme delle soluzioni sulla retta reale è in **Fig. 10**.

Figura 10



Se il numeratore o il denominatore della frazione algebrica di cui si vuole studiare il segno sono di grado superiore al secondo, bisogna anzitutto scomporli in fattori di grado inferiore, di cui si sa studiare il segno; poi, invece di studiare il segno del numeratore e del denominatore, si studia il segno di ciascun fattore.

ESEMPIO Disequazione frazionaria con termini di grado superiore al secondo

Risolviamo la disequazione $\frac{x^3 - x}{x^4 - 16} \geq 0$.

- 1° passo: Scomponiamo numeratore e denominatore in *fattori* di primo e di secondo grado.

$$\frac{x(x^2-1)}{(x^2-4)(x^2+4)} \geq 0$$

- 2° passo: Studiamo il segno di ciascun fattore.

  1° *fattore* $x > 0 \Rightarrow x > 0$
  2° *fattore* $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$ Perché?
  3° *fattore* $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$ Perché?
  4° *fattore* $x^2 + 4 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ Perché?

- 3° passo: Costruiamo la tabella dei segni in **Fig. 11**.

		-2		-1		0		1		2		x
segno di x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
segno di (x^2-1)	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
segno di (x^2-4)	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
segno di (x^2+4)	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
segno di $\frac{x^3-x}{x^4-16}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	

Figura 11

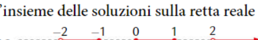
- 4° passo: Concludiamo.

La disequazione $\frac{x^3 - x}{x^4 - 16} \geq 0$ è verificata quando la frazione algebrica al primo membro è positiva o nulla, cioè per:

$-2 < x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 1 \vee x > 2$ Attenzione agli estremi inclusi ed esclusi!

La rappresentazione dell'insieme delle soluzioni sulla retta reale è in **Fig. 12**.

Figura 12



Se la disequazione frazionaria non è in forma normale occorre preliminarmente ricondursi a una disequazione che presenti una sola frazione algebrica al primo membro e il numero 0 al secondo, mediante i principi d'equivalenza per le disequazioni e il calcolo algebrico.

ESEMPIO Risoluzione di un sistema

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} \dfrac{3-x}{x+5} \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x > 1 \end{cases}$

▸ **1° passo** Risolviamo la prima disequazione del sistema.

Segno del numeratore $3 - x > 0 \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow x < 3$

Segno del denominatore $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

La tabella dei segni è in **Fig. 13**.

La disequazione è verificata quando la frazione $\dfrac{3-x}{x+5}$ è positiva o nulla, cioè per:

$-5 < x \leq 3$

		-5		$+3$	
segno di $3-x$	+		+	0	−
segno di $x+5$	−	0	+		+
segno di $\dfrac{3-x}{x+5}$	−	∄	+	0	−

Figura 13

▸ **2° passo** Risolviamo la seconda disequazione del sistema.

$\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x > 1 \Rightarrow x^2 + x > 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0$

L'equazione associata, $x^2 + x - 2 = 0$, ha come soluzioni:

$x = -2 \vee x = 1$

La disequazione è verificata negli intervalli esterni alle soluzioni, cioè per:

$x < -2 \vee x > 1$

▸ **3° passo** Costruiamo lo schema riassuntivo e concludiamo.
Rappresentiamo in un unico schema l'insieme S_1 delle soluzioni della prima disequazione e l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda (**Fig. 14**).

L'insieme S delle soluzioni del sistema corrisponde agli intervalli dove, su tutte le righe blu, c'è una linea continua (colorati in giallo). Concludiamo che il sistema è soddisfatto per:

$-5 < x < -2 \vee 1 < x \leq 3$

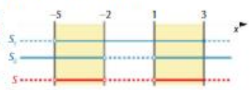


Figura 14

ESEMPIO Un sistema in cui una disequazione è sempre verificata

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} (2x+1)^2 + x^2 \geq 0 \\ x^2 + 5x < 0 \end{cases}$

Osserva la prima disequazione del sistema: il primo membro è la somma di due quadrati, quindi è certamente non negativo per ogni valore reale di x. Ne segue che la prima disequazione è sempre verificata e può quindi essere trascurata, perché non influisce sulle soluzioni del sistema (sai giustificare perché?).
Il sistema è allora equivalente alla seconda disequazione, che risolviamo:

$x^2 + 5x < 0 \Rightarrow -5 < x < 0$

Concludiamo che il sistema è soddisfatto per $-5 < x < 0$.

ESEMPIO Un sistema impossibile

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} x^2 + x - 1 \geq 0 \\ (x-2)^2 + 1 < 0 \end{cases}$

Questo è un sistema che possiamo risolvere senza fare alcun calcolo!
Osservando la seconda disequazione del sistema, vediamo infatti che essa è impossibile: aggiungendo a un quadrato 1, **non** possiamo mai ottenere un numero negativo. Dunque anche il sistema è impossibile (sai giustificare perché?).

113

Risoluzione di una disequazione frazionaria nell'incognita x

1. Si riconduce la disequazione a una delle forme: $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$, $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$, $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$, $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$.
2. Si studiano i segni del numeratore e del denominatore della frazione a primo membro.
3. Si costruisce la tabella dei segni.
4. Si scrivono le soluzioni, deducendole dalla tabella dei segni

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\dfrac{x^2-9}{x+1} \leq 0$.

1. La disequazione è già in una delle forme volute.
2. *Numeratore*: $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x < -3 \vee x > 3$

   Denominatore: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$
3.

		-3		-1		3	
segno di (x^2-9)	+	0	−		−	0	+
segno di $(x+1)$	−		−	0	+		+
segno di $\dfrac{x^2-9}{x+1}$	−	0	+	∄	−	0	+

4. La disequazione è verificata per $x \leq -3 \vee -1 < x \leq 3$.

114

Risoluzione di un sistema di disequazioni

1. Si risolvono le singole disequazioni del sistema.
2. Si costruisce lo schema grafico, per individuare l'*intersezione* degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.
3. Si scrive l'insieme delle soluzioni, deducendole dallo schema grafico.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x^2 - x - 3 \le 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 \ge 0 \end{cases}$

1. *Prima disequazione*: $2x^2 - x - 3 \le 0$ $\quad \Delta = 25 > 0 \quad x_1 = -1,\ x_2 = \frac{3}{2}$

   La disequazione è verificata per $-1 \le x \le \frac{3}{2}$

   Seconda disequazione: $2x^2 - 5x - 3 \ge 0$ $\quad \Delta = 49 > 0 \quad x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 3$

   La disequazione è verificata per $x \le -\frac{1}{2} \vee x \ge 3$

2. 

3. Il sistema è verificato per $-1 \le x \le -\frac{1}{2}$.

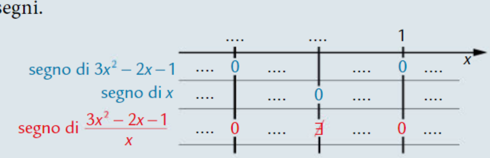
Risolvi la disequazione frazionaria $3x - 2 \ge \frac{1}{x}$.

—

- Portando tutti i termini al primo membro e calcolando la somma algebrica, otterrai la disequazione:
  $$\frac{3x^2 - 2x - 1}{x} \ge 0$$
- Studia il segno del numeratore e del denominatore.

  Numeratore $\quad 3x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow x <$ .... $\vee\ x > 1$

  Denominatore $\quad x > 0 \Rightarrow x >$ .....
- Costruisci la tabella dei segni.



- La disequazione è verificata per i valori di x che rendono la frazione $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x}$ *positiva* o *nulla*, cioè per:

  .... $\le x <$ .... $\vee\ x \ge$ ....

Valore assoluto di un numero

Il **valore assoluto** di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero, se questo è negativo.
Il valore assoluto è quindi sempre positivo o nullo.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO
$|+9| = 9; \quad |-9| = 9; \quad |0| = 0.$

Valore assoluto di un'espressione

Se invece della variabile *x* consideriamo un'espressione *f*(*x*), abbiamo:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Chiamiamo **argomento** la funzione *f*(*x*) di cui calcoliamo il valore assoluto.

ESEMPIO
Se $f(x) = 2x + 3, \; |f(x)| = |2x+3| = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } 2x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{3}{2}, \\ -(2x+3) & \text{se } 2x+3 < 0 \rightarrow x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Proprietà del valore assoluto

PROPRIETÀ

1. $|f(x)| = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$;
2. $|f(x)| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
3. $|f(x)| = |-f(x)|$;
4. $|f(x)| = k$, con $k > 0 \rightarrow f(x) = k \vee f(x) = -k$.

La seconda e la quarta proprietà permettono di risolvere velocemente equazioni in cui l'incognita compare solo all'interno del valore assoluto.

ESEMPIO

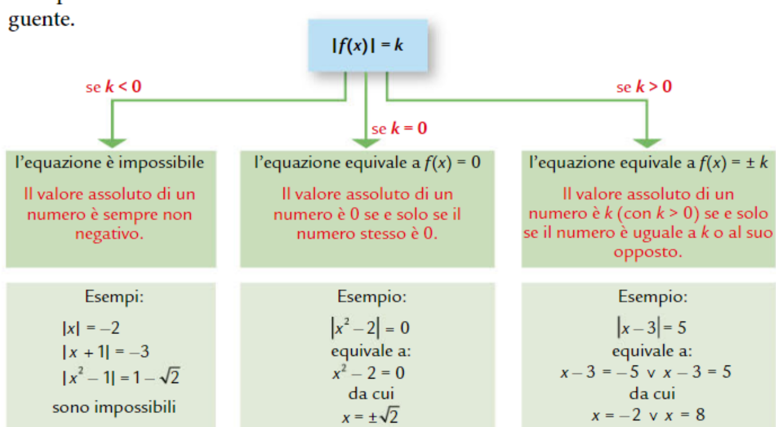
a. L'equazione $|x-5| = -6$ è impossibile per la proprietà 2, infatti $|x-5| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. Le soluzioni dell'equazione $|x+4| = 11$, per la proprietà 4, sono l'unione delle soluzioni delle due equazioni:

$$x+4 = 11 \quad \rightarrow \quad x = 7 \quad \vee \quad x+4 = -11 \quad \rightarrow \quad x = -15.$$

Equazioni del tipo $|f(x)| = k$

Esse possono essere risolte in base alle considerazioni riassunte nello schema seguente.



120

Equazioni con valori assoluti

REGOLA | Risoluzione dell'equazione $|f(x)| = g(x)$

L'equazione $|f(x)| = g(x)$ equivale a:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $2x - 9 = |x+3|$.

- Studiamo il segno dell'argomento $x+3$.

  $x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

  Compiliamo uno schema grafico: il valore assoluto coincide con $x+3$ quando $x+3$ è positivo o nullo; è l'opposto di $x+3$, e cioè $-(x+3)$, quando $x+3$ è negativo.

		-3	
$x+3$	$-$	0	$+$
$\lvert x+3 \rvert$	$-(x+3)$		$x+3$

- Le soluzioni dell'equazione sono l'*unione* delle soluzioni dei due sistemi.

$$\begin{cases} x < -3 \\ 2x - 9 = -(x+3) \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x - 9 = x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ 3x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ x = 12 \end{cases}$$

soluzione *non* accettabile: 2 *non* è minore di -3; soluzione accettabile: $12 \geq -3$.

- L'equazione ha soluzione $x = 12$.

REGOLA | Risoluzione dell'equazione $|f(x)| = |g(x)|$

L'equazione $|f(x)| = |g(x)|$ equivale a:

$$f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$$

In maniera equivalente, possiamo dire che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $|f(x)| = |g(x)|$ è l'**unione** degli insiemi delle soluzioni delle due equazioni:

$$f(x) = g(x) \quad \text{e} \quad f(x) = -g(x)$$

ESEMPIO Equazione della forma $|f(x)| = |g(x)|$

Risolviamo l'equazione $|x| = |2x - 1|$.

L'equazione data è del tipo $|f(x)| = |g(x)|$, con $f(x) = x$ e $g(x) = 2x - 1$. Perciò equivale a:

$$x = 2x - 1 \quad \vee \quad x = -(2x - 1)$$

$$x = 2x - 1 \quad \vee \quad x = -2x + 1$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$.

ESEMPI Equazione con due valori assoluti

Risolviamo l'equazione $|x| + 2|x + 1| = -2x + 3$.

▶ 1° passo **Studiamo il segno degli argomenti dei due valori assoluti.**
Riportiamo il segno dei due argomenti, x e $x + 1$, in una tabella analoga a quella che siamo soliti costruire per risolvere una disequazione frazionaria (**Fig. 5**).

		−1		0	
segno di x	−		−	0	+
segno di $x+1$	−	0	+		+

Figura 5

▶ 2° passo Tenendo conto dello studio del segno degli argomenti e della definizione di valore assoluto, possiamo **riscrivere l'equazione originaria** in ciascuno dei tre intervalli:

$x < -1, \quad -1 \le x < 0, \quad x \ge 0$

in modo che **non** compaiano valori assoluti.

- Per $x < -1$, gli argomenti dei due valori assoluti sono negativi, quindi:
$|x| = -x$ e $|x + 1| = -x - 1$
L'equazione $|x| + 2|x + 1| = -2x + 3$ diventa:
$(-x) + 2(-x - 1) = -2x + 3$
$-x - 2x - 2 = -2x + 3$
$x = -5$
Questa soluzione è *accettabile* perché verifica la condizione $x < -1$.

- Per $-1 \le x < 0$, l'argomento del primo valore assoluto è negativo e quello del secondo è positivo o nullo, quindi:
$|x| = -x$ e $|x + 1| = x + 1$
L'equazione $|x| + 2|x + 1| = -2x + 3$ diventa:
$(-x) + 2(x + 1) = -2x + 3$
$-x + 2x + 2 = -2x + 3$
$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
Questa soluzione, tuttavia, **non** è *accettabile* perché **non** verifica la condizione $-1 \le x < 0$.

- Per $x \ge 0$, gli argomenti dei due valori assoluti sono positivi o nulli, quindi:
$|x| = x$ e $|x + 1| = x + 1$
L'equazione $|x| + 2|x + 1| = -2x + 3$ diventa:
$x + 2(x + 1) = -2x + 3$
$x + 2x + 2 = -2x + 3$
$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$
Questa soluzione è *accettabile* perché verifica la condizione $x \ge 0$.

▶ 3° passo **Concludiamo.** Le soluzioni dell'equazione originaria sono le soluzioni *accettabili* ottenute nel passo precedente.
Le soluzioni accettabili che abbiamo trovato sono $x = -5$ e $x = \frac{1}{5}$, quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione originaria è $S = \left\{-5, \frac{1}{5}\right\}$.

123

Disequazioni con valori assoluti

Per risolvere disequazioni con valori assoluti sono utili le seguenti proprietà del valore assoluto.

PROPRIETÀ

Se $k > 0$:

1. $|f(x)| < k \leftrightarrow -k < f(x) < k$; 2. $|f(x)| > k \leftrightarrow f(x) < -k \vee f(x) > k$.

ESEMPIO

a. La disequazione $|x - 13| < 10$ si risolve con la proprietà 1:

$-10 < x - 13 < 10 \quad \rightarrow \quad -10 + 13 < x - 13 + 13 < 10 + 13 \quad \rightarrow$

sommiamo 13 a tutti e tre i membri

$3 < x < 23$

b. Per risolvere $|3x + 1| \ge 5$ dobbiamo unire le soluzioni delle due disequazioni:

$3x + 1 \ge 5 \quad \rightarrow \quad x \ge \frac{4}{3} \quad \vee \quad 3x + 1 \le -5 \quad \rightarrow \quad x \le -2.$

Le soluzioni della disequazione iniziale sono:

$x \le -2 \vee x \ge \frac{4}{3}$.

$|2x^2 + x| < -4$

Soluzione: impossibile

Perché: per definizione il valore assoluto non può essere mai negativo.

Disequazione con valore assoluto (caso particolare):

$|2x^2 + x| > -4$

soluzione

$\forall x \in \Re \xleftrightarrow{oppure}]-\infty;+\infty[$

Perché: per definizione il valore assoluto è sempre positivo

$$\boxed{\left|\frac{2x-5}{x+1}\right|>1}$$

La disequazione data è equivalente all'unione delle seguenti disequazioni:

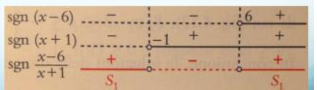
$$\frac{2x-5}{x+1}>1 \ \cup \ \frac{2x-5}{x+1}<-1$$

- Prima disequazione:

$$\frac{2x-5}{x+1}>1 \rightarrow \frac{x-6}{x+1}>0$$

$N>0 \rightarrow x-6>0 \rightarrow x>6$

$D>0 \rightarrow x+1>0 \rightarrow x>-1$



soluzione

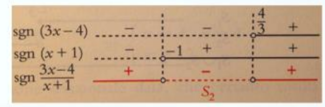
$x<-1 \vee x>6 \xleftrightarrow{oppure} \left]-\infty;-1\right[\cup \left]6;+\infty\right[$

- Seconda disequazione:

$$\frac{2x-5}{x+1}<-1 \rightarrow \frac{3x-4}{x+1}<0$$

$N>0 \rightarrow 3x-4>0 \rightarrow x>\frac{4}{3}$

$D>0 \rightarrow x+1>0 \rightarrow x>-1$



soluzione

$-1<x<\frac{4}{3} \vee \xrightarrow{oppure} \left]-1;\frac{4}{3}\right[$

L'insieme delle soluzioni trovate rappresenta la soluzione della disequazione data:

soluzione

$S=S_1 \cup S_2 \Rightarrow x<-1 \vee -1<x<\frac{4}{3} \vee x>6 \xrightarrow{oppure} \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;\frac{4}{3}\right[\cup \left]6;+\infty\right[$

125

Disequazioni con valori assoluti

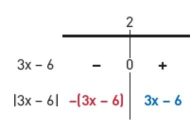
ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $|3x-6|>x+4$.

- Studiamo il segno dell'argomento $3x-6$.

  $3x-6>0 \rightarrow x>2$

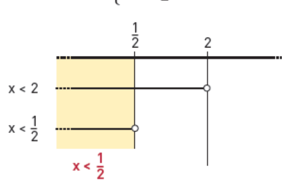
  Compiliamo uno schema grafico: il valore assoluto coincide con $3x-6$ quando $3x-6$ è positivo o nullo; è l'opposto quando $3x-6$ è negativo.

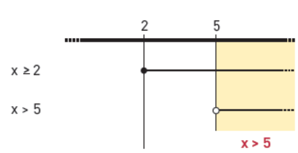


- Le soluzioni della disequazione sono l'unione delle soluzioni dei due sistemi.

$$\begin{cases} x<2 \\ -(3x-6)>x+4 \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 2 \\ 3x-6>x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2 \\ -4x>-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 2 \\ 2x>10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x>5 \end{cases}$$





- Uniamo i due intervalli delle soluzioni. La disequazione iniziale ha per soluzioni: $x<\frac{1}{2} \vee x>5$.

ESEMPIO Disequazione della forma $|A(x)| > |B(x)|$

Risolviamo la disequazione $|x+1| \geq |2x|$.

$|x+1| \geq |2x|$ — Disequazione da risolvere

$|x+1|^2 \geq |2x|^2$ — Elevando i due membri al quadrato otteniamo una disequazione equivalente

$(x+1)^2 \geq (2x)^2$ — Poiché $|a|^2 = a^2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

A questo punto non conviene sviluppare i quadrati ma procedere come segue:

$(x+1)^2 - (2x)^2 \geq 0$ — Portando i termini al primo membro

$(1-x)(3x+1) \geq 0$ — Scomponendo la differenza di quadrati

$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ — Risolvendo la disequazione ottenuta

Risolvi la disequazione $|x| + |x-1| < 2$.

- Studiando il segno degli argomenti dei valori assoluti, puoi costruire la seguente tabella:

		0		1		x
segno di x	−	0	+		+	
segno di $x-1$	−		−	0	+	

- Se $x < 0$, gli argomenti di entrambi i valori assoluti sono negativi, quindi:

  $|x| = -x$ e $|x-1| = -(x-1) = 1-x$

  La disequazione è equivalente al sistema:

  $$\begin{cases} x < 0 \\ -x + (1-x) < 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < .....$$

- Se $0 \leq x < 1$, l'argomento di $|x|$ è positivo o nullo, mentre l'argomento di $|x-1|$ è negativo, quindi:

  $|x| = x$ e $|x-1| = -(x-1) = 1-x$

  La disequazione è equivalente al sistema:

  $$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ .... < 2 \end{cases}$$

  che è soddisfatto per $0 \leq x < .....$

- Se $x \geq 1$, gli argomenti di entrambi i valori assoluti sono positivi o nulli, quindi:

  $|x| = x$ e $|x-1| = x-1$

  La disequazione è equivalente al sistema:

  $$\begin{cases} x \geq 1 \\ x + (.....) < 2 \end{cases} \Rightarrow ....1 \leq x < .....$$

- L'insieme delle soluzioni della disequazione proposta è l'*unione* degli insiemi delle soluzioni dei tre sistemi risolti, quindi è l'intervallo:

  $$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

127

Disequazioni letterali intere

Una disequazione è **letterale** se oltre all'incognita contiene altre lettere dette *parametri*.

Per risolvere una disequazione letterale **intera** occorre:

- trasformarla in una delle *forme normali*:

  $$Ax > B; \quad Ax \geq B; \quad Ax < B; \quad Ax \leq B$$

- studiare il segno del coefficiente A di x, considerando separatamente i casi $A > 0$, $A < 0$ e $A = 0$.
  Se in una disequazione si dividono entrambi i membri per un numero negativo, è necessario cambiare il verso della disequazione.

BIBLIOGRAFIA - SITOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi *Matematica multimediale* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas
- https://altramatica.altervista.org/metodo-di-cramer-sistemi-lineari-3-x-3/
- https://www.numerica.altervista.org/