CALCOLO LETTERALE

Definizione di monomio

Un **monomio** è un'espressione letterale in cui compaiono soltanto moltiplicazioni fra

- numeri
- potenze di lettere con numeri naturali per esponenti.

ESEMPIO

Sono monomi:	Non sono monomi:
• $2a$	• $2a + 1$
• b^3	• b^{3x}
• $-4c^5z$	• $-4c^{-5}z$
• $(6^{-1}m)(6n)$	• $(36mn)^{-1}$
• $(3 + 2)x$	• $(3x + 2y)$

Coefficiente e parte letterale

Un monomio è scritto (o ridotto) in *forma normale* quando è espresso come prodotto di:

- un solo fattore numerico, il coefficiente,
- una o più potenze letterali con lettere tutte diverse fra loro, la parte letterale.

$$-\overbrace{\frac{3}{2}}^{\text{coefficiente}}\underbrace{x^2y}_{\text{parte letterale}}$$

ESEMPIO

Riduciamo $a\frac{1}{2}b^2 3a^3$ in forma normale.

$$a\frac{1}{2}b^2 3a^3 = \left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)\cdot(a\cdot a^3)\cdot b^2 = \frac{3}{2}a^4b^2.$$

proprietà commutativa della moltiplicazione

prima proprietà delle potenze

Numeri come monomi

Tutti i numeri sono monomi.

ESEMPIO

$7 = 7a^0 = 7a^0b^0$

Perciò 7 è un *monomio in forma normale* il cui coefficiente è 7 e la cui parte letterale è un qualunque gruppo di lettere aventi tutte esponente 0.

In particolare 0 è detto **monomio nullo**.

Grado di un monomio

Il **grado di un monomio rispetto a una lettera** è l'esponente che la lettera ha nel monomio.

Il **grado (complessivo) di un monomio** è la somma degli esponenti delle lettere.

(Notiamo che la prima definizione ha senso per *monomi in forma normale*.)

ESEMPIO

grado 3 rispetto ad *a*

grado 1 rispetto a *b*

$\frac{2}{7}a^3bc^2$ — grado 2 rispetto a *c*

monomio di grado
$3 + 1 + 2 = 6$

Monomi simili, opposti, uguali

Due *monomi in forma normale* sono:

- **simili**, se hanno la stessa parte letterale;

ESEMPIO
$3ab^2$ e $-4ab^2$ sono simili.

- **opposti**, se sono simili e hanno coefficienti opposti;

ESEMPIO
$9a^2x^3$ e $-9a^2x^3$ sono opposti.

- **uguali**, se sono simili e hanno lo stesso coefficiente.

ESEMPIO
$2xy^3$ e $(1+1)xy^3$ sono uguali.

Somma di monomi

La **somma** di due o più **monomi simili** è un monomio che ha:

- per *coefficiente* la somma dei coefficienti;
- la stessa *parte letterale* degli addendi.

ESEMPIO

$9ax^2 - 2ax^2 + 6ax^2 =$

raccogliamo la parte letterale

$(9 - 2 + 6)ax^2 =$

sommiamo i coefficienti

$13ax^2$

La **somma** di due **monomi opposti** è 0.

ESEMPIO

$5x^2z^3 + (-5x^2z^3) = 5x^2z^3 - 5x^2z^3 =$
$(5 - 5)x^2z^3 = 0$

Somma algebrica di monomi

Monomi simili:

$2x^3yz^2 \quad 5x^3yz^2$

La loro **somma** restituisce un **unico monomio**:

$2x^3yz^2 + 5x^3yz^2 = (2+5)\, x^3yz^2 =$
$= 7\, x^3yz^2$

Monomi non simili:

$4xy^7 \quad 3x^2y$

La loro **somma** non è un unico monomio ma un **polinomio**

$4xy^7 + 3x^2y$

La somma di due monomi simili è un nuovo monomio
che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti e
come parte letterale la stessa parte letterale

$5xy + 3xy = (5 + 3)xy = 8xy$

La somma di due monomi simili di grado n
è ancora un monomio di grado n

$5xy$ ha grado 2
$3xy$ ha grado 2

$(5 + 3)xy = 8xy$ ha grado 2

Espressioni con somme e sottrazioni di monomi

Un'espressione che contiene solo addizioni e sottrazioni di monomi può essere ricondotta a un'*addizione algebrica*.

In un'espressione in cui compaiono monomi non tutti simili tra loro, possiamo sommare algebricamente solo i quelli simili. Non è detto che il risultato sia un monomio.

ESEMPIO

$2ay - 5a + 3y + a - 11ay - y^2 = 2ay - 5a + 3y + a - 11ay - y^2 =$
$(2 - 11)ay + (-5 + 1)a + 3y - y^2 = -9ay - 4a + 3y - y^2$

Prodotto di monomi

Il **prodotto** di due o più monomi è un monomio in cui:

- il *coefficiente* è il prodotto dei coefficienti;
- nella *parte letterale* ogni lettera ha per esponente la somma degli esponenti con cui la lettera compare nei fattori.

ESEMPIO

$2a^2z^4\ 5ay^3z^5 = 2a^2z^4\ 5ay^3z^5 = (2\ 5)\ (a^2\ a)\ y^3\ (z^4\ z^5) =$
$10a^{2+1}y^3z^{4+5} = 10a^3y^3z^9$

$$12x^2y \cdot 2xzk = 24x^3yzk$$

$$5x^2y \cdot 2x^5y^2z^4 \cdot (-z^2) = -10x^7y^3z^6$$

$$-\frac{1}{2}x^2 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{15}{2}y\right) = \frac{15}{2}x^3y$$

Per moltiplicare le parti letterali applichiamo

- la *proprietà commutativa* per raggruppare le lettere uguali,
- la *proprietà del prodotto di potenze ad ugual base*: $a^m a^n = a^{m+n}$.

Criterio di divisibilità tra monomi

Se *A* e *B* sono due monomi, con $B \neq 0$, *A* è **divisibile** per *B* se e solo se ha nella parte letterale tutte le lettere di *B*, ognuna con esponente maggiore o uguale a quello con cui compare in *B*.

Chiamiamo divisore il monomio B e dividendo il monomio A.

ESEMPIO

$4a^5b^4c^2$ è divisibile per $-3a^2b^3c^2$ perché gli esponenti delle lettere a, b, c sono $5 > 2$, $4 > 3$, $2 = 2$.

$6x^3b^5$ *non* è divisibile per $2x^2b^7$ perché $5 < 7$.

Quoziente di due monomi

Dati i monomi *A* e *B*, con *A* divisibile per *B* e *B* ≠ 0, il **quoziente** *A* diviso *B* è un monomio in cui:

- il *coefficiente* è il quoziente dei coefficienti;
- nella *parte letterale* ogni lettera ha per esponente la differenza tra gli esponenti con cui la lettera compare in *A* e *B*.

ESEMPIO

$(2x^6) : (3x^2) =$ $\quad (a \cdot b) : (c \cdot d) = (a : c) \cdot (b : d)$

$(2 : 3) \cdot (x^6 : x^2) =$ $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$

$\frac{2}{3}x^{6-2} = \frac{2}{3}x^4$

$$\frac{27x^6y^3}{9x^4y} = 3x^2y^2$$

$$-\frac{4x^4y^2z}{12x^4y} = -\frac{1}{3}yz$$

Multiplo di un monomio

Se il monomio *A* è divisibile per il monomio *B*, diremo che *A* è **multiplo** di *B*.

Dati due monomi *A* e *B*, possiamo calcolare *A* : *B* solo se *A* è **divisibile** per *B*.

La divisione tra due monomi non produce, in generale, un monomio.

Se *A* è multiplo di *B* allora *A* : *B* è un monomio.

Potenza di un monomio

Per calcolare la **potenza** di un monomio con esponente n, con $n \in \mathbb{N}$:

- eleviamo a esponente n il suo coefficiente;
- moltiplichiamo per n ognuno degli esponenti delle sue lettere.

ESEMPIO

$(5az^5)^3 = (5az^5)^3 = (5)^3\ (a)^3\ (z^5)^3 = 125a^{1\,3}z^{5\,3} = 125a^3z^{15}$

$$(3x^2y)^3 = 27x^6y^3$$

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)^3 = -\frac{1}{8}x^3y^9$$

$$\left[(3x^2y)^9\right]^0 = (3x^2y)^0 = 1$$

Per elevare a potenza le parti letterali applichiamo:

- la *proprietà distributiva della potenza rispetto al prodotto,*
- la *proprietà della potenza di potenza*: $(a^m)^n = a^{mn}$.

La potenza di un monomio è sempre un monomio.

MCD tra monomi

Nel **calcolo del MCD** di monomi, prendiamo:

- come **coefficiente**, il MCD dei valori assoluti dei coefficienti se sono tutti interi, altrimenti (se almeno un monomio non ha coefficiente intero) il numero 1;
- come **parte letterale**, il prodotto delle lettere *comuni* a tutti i monomi, ognuna presa con l'esponente *minimo*.

ESEMPIO

- $\mathrm{MCD}(6a^3b^3c^2;\ 4a^2b^4c;\ 12ab^2)$

	2	3	a^3	b^3	c^2
	2^2		a^2	b^4	c
	2^2	3	a	b^2	
MCD =	2		a	b^2	

mettiamo in colonna i coefficienti (scomposti in fattori) e le lettere dei monomi

nel MCD:
- coefficiente: MCD dei coefficienti
- lettere comuni con esponente minimo

Il M.C.D dei seguenti tre monomi x^6y^3, xy^5z^3, xy^2z è xy^2, mentre il m.c.m è $x^6y^5z^3$

mcm tra monomi

Nel **calcolo del mcm** di monomi, prendiamo:

- come **coefficiente**, il mcm dei valori assoluti dei coefficienti se sono tutti interi, altrimenti (se almeno un monomio non ha coefficiente intero) il numero 1;
- come **parte letterale**, il prodotto di ciascuna delle lettere presenti in *almeno uno* dei monomi, ognuna presa con l'esponente *massimo*.

ESEMPIO

$\text{mcm}(6a^3b^3c^2;\ 4a^2b^4c;\ 12ab^2)$

2	3	a^3	b^3	c^2
2^2		a^2	b^4	c
2^2	3	a	b^2	

mettiamo in colonna i coefficienti e le lettere dei monomi

$\text{mcm} = \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3}\ a^3\ b^4\ c^2$

nel mcm:
- coefficiente: mcm dei coefficienti
- tutte le lettere con esponente massimo

Polinomi

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi non simili tra loro.

I singoli monomi sono i **termini** del polinomio.

$$5a^2b - 2a^3c^2 + 4ab^2$$

Un polinomio ridotto, con due, tre, quattro termini si dice rispettivamente **binomio**, **trinomio**, **quadrinomio**.

Quando i termini sono più di quattro si usa il nome generico di **polinomio con 5, 6, 7… n termini.**

- $4x^3 + \frac{2}{3}ax^5$ è un polinomio.
- $2a + 3a^{-1}$ e $\frac{a^2}{b}$ ***non*** sono polinomi.

Se in un polinomio troviamo dei termini simili, calcoliamo la loro somma algebrica per ottenere un polinomio **ridotto** e più semplice.

L'operazione effettuata si chiama **riduzione dei termini simili**.

$$-3yz + y^2 - 5x^2 + 6y^2 + 2y^2 + 10x^2 =$$
$$= (1+6+2)y^2 + (-5+10)x^2 + (-3yz) = 9y^2 + 5x^2 - 3yz$$

$$-\frac{1}{2}ax - \frac{3}{2}x^2b - y^2 - \frac{1}{4}ax - \frac{3}{2}x^2b + y^2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)ax + \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)x^2b + (-\cancel{y^2} + \cancel{y^2}) =$$
$$= \left(\frac{-2-1}{4}\right)ax + \left(\frac{-3-3}{2}\right)x^2b = -\frac{3}{4}ax - \frac{6}{2}x^2b = -\frac{3}{4}ax - 3x^2b$$

REGOLA :

Per eseguire la riduzione dei termini simili di un polinomio si deve sostituire a ogni gruppo di monomi simili, il monomio simile a essi e avente per coefficiente la somma algebrica dei loro coefficienti.

Un polinomio si dice **intero** se tutti i suoi termini sono monomi interi; si dice **frazionario** se uno almeno dei suoi termini è frazionario

$$\underbrace{5a^2b - 2a^3c^2 + 4ab^2}_{\textbf{polinomio intero}} \qquad \underbrace{5ab^2 - \frac{5a}{b} + \frac{6a^2b^3}{c}}_{\textbf{polinomio frazionario}}$$

Un polinomio intero può avere a sua volta coefficienti **interi** o **frazionari**.

$$\underbrace{5}_{\substack{\textbf{coefficiente}\\ \textbf{intero}}} a^2b^2 - \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\textbf{coefficiente}\\ \textbf{frazionario}}} a^3c + \underbrace{\frac{7}{8}}_{\substack{\textbf{coefficiente}\\ \textbf{frazionario}}} a^2b^3$$

Il grado di un polinomio

Definizione :

Si dice **grado di un polinomio** il massimo fra i gradi dei suoi termini.

$$4a^2bc^2 - a^3b^2c^2 + \frac{3}{4}a^2bc^3$$

$4a^2bc^2 \rightarrow$ 5° grado; $-a^3b^2c^2 \rightarrow$ 7° grado; $+\frac{3}{4}a^2bc^3 \rightarrow$ 6° grado

REGOLA :

Il maggiore fra i gradi dei monomi che costituiscono un polinomio rappresenta il **grado complessivo** del polinomio

REGOLA :

Si dice invece **grado relativo** di un polinomio rispetto ad una lettera il massimo esponente con cui quella lettera compare nel polinomio

Polinomio ordinato, completo e omogeneo

Definizione :

Un polinomio si dice **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

$$-7a^3b + 8b^4 - \frac{1}{2}a^2b^2$$

Definizione :

Un polinomio si dice **ordinato** secondo le potenze decrescenti (o crescenti) di una lettera quando gli esponenti della lettera stessa si succedono in modo decrescente (o crescente).

$$-7a + 15a^2 + 18a^3b^2 - 3a^4b \qquad -3a^4b + 18a^3b^2 + 15a^2 - 7a$$

Definizione :

Un polinomio si dice **completo** rispetto a una lettera se essa compare in ognuno dei vari monomi con esponenti che vanno dal grado minimo (0) al grado massimo. Se ciò non avviene il polinomio si dice **incompleto** rispetto a quella lettera.

$$-2a^4+\frac{3}{4}a^3b-a^2b^2+\frac{6}{7}ab^3-\frac{5}{4}b^4$$

Ricapitoliamo i vari casi trattati in uno schema riassuntivo:

$-2a^4x^2+\frac{3}{4}a^3x^2+\frac{1}{2}a^2x-ax^3+5$	→	Polinomio di 6° grado ordinato e completo rispetto alle potenze decrescenti della lettera *a*.
$5c^4-bc^2+\frac{3}{4}b^3c-\frac{1}{2}b^5c^3$	→	Polinomio di 8° grado ordinato e incompleto rispetto alle potenze crescenti della lettera *b*.
$\frac{2}{3}a^5-\frac{1}{2}a^4c-a^3c^2+\frac{3}{4}a^2c^3-2ac^4+\frac{1}{3}c^5$	→	Polinomio di 5° grado ordinato e completo rispetto alle potenze decrescenti di *a* e crescenti di *c*. Inoltre il polinomio è omogeneo.

LE OPERAZIONI CON I POLINOMI

LA SOMMA ALGEBRICA DI POLINOMI

REGOLA :

Se un polinomio è racchiuso in una parentesi preceduta dal segno +, possiamo sopprimere il segno + e la parentesi, e scrivere i vari termini ciascuno con il proprio segno.

Se un polinomio è racchiuso in una parentesi preceduta dal segno - , possiamo sopprimere il segno – e la parentesi, e scrivere i vari termini ciascuno con il segno cambiato.

ESEMPI

1) $+(-3a^2+5ab-7b^2)=-3a^2+5ab-7b^2$

2) $-\left(-2a^3+4a^2b-5ab^2+\frac{3}{4}b^3\right)=2a^3-4a^2b+5ab^2-\frac{3}{4}b^3$

ADDIZIONE

Per indicare l'addizione di due o più polinomi, per esempio fra

$$5a^2 - 3\,ab + b^2; \qquad 7a^2 + 8ab + 3b^2; \qquad -3a^2 + ab - 9b^2$$

Ognuno di essi si scrive chiuso in parentesi, ponendo tra le parentesi il segno +:

$$(5a^2 - 3ab + b^2) + (7a^2 + 8ab + 3b^2) + (-3a^2 + ab - 9b^2)$$

Per eseguire l'addizione eliminiamo la parentesi e riduciamo in termini simili:

$$\begin{aligned}&(5a^2 - 3ab + b^2) + (7a^2 + 8ab + 3b^2) + (-3a^2 + ab - 9b^2) =\\ &= 5a^2 - 3ab + b^2 + 7a^2 + 8ab + 3b^2 - 3a^2 + ab - 9b^2 =\\ &= (5 + 7 - 3)\,a^2 + (-3 + 8 + 1)\,ab + (1 + 3 - 9)\,b^2 = 9a^2 + 6ab - 5b^2\end{aligned}$$

REGOLA :

La somma di due o più polinomi si ottiene scrivendo l'uno di seguito all'altro i loro termini, ciascuno con il proprio segno, e riducendo successivamente gli eventuali termini simili.

SOTTRAZIONE

Per indicare l'addizione di due o più polinomi, per esempio fra

$$5a^2 - 3ab + 7b^2 \qquad \text{e} \qquad -4a^2 - 6ab + 2b^2$$

Scriviamo il minuendo e il sottraendo, chiusi in parentesi, separati dal segno - :

$$(5a^2 - 3ab + 7b^2) - (-4a^2 - 6ab + 2b^2)$$

Per eseguire la sottrazione eliminiamo la parentesi e riduciamo in termini simili:

$$\begin{aligned}&(5a^2 - 3ab + 7b^2) - (-4a^2 - 6ab + 2b^2) =\\ &= 5a^2 - 3ab + 7b^2 + 4a^2 + 6ab - 2b^2 =\\ &= 9a^2 + 3ab + 5b^2\end{aligned}$$

REGOLA :

La differenza tra due polinomi si ottiene scrivendo i termini del 1° polinomio, cioè del minuendo, con il proprio segno, seguiti dai termini, cambiati di segno, del 2° polinomio, cioè del sottraendo, e riducendo infine gli eventuali termini simili.

Moltiplicazione di un polinomio per un monomio

Consideriamo la seguente moltiplicazione di un polinomio per un monomio

$$-2a \cdot (a^3 - 2ab + 1)$$

Per determinare il prodotto applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione: si moltiplica ciascun termine del polinomio per il monomio e si addizionano poi i prodotti ottenuti.

$$-2a \cdot (a^3 - 2ab + 1) = -2a^4 + 4a^2b - 2a$$

REGOLA :

Per moltiplicare un polinomio per un monomio, o viceversa, basta moltiplicare ciascun termine del polinomio per il monomio e addizionare i prodotti parziali così ottenuti.

Moltiplicazione di DUE polinomi

Consideriamo la seguente moltiplicazione di polinomi

$$(5a + 2b) \cdot (4b - 3a - 1)$$

Anche per effettuare la moltiplicazione di due polinomi applichiamo la proprietà distributiva e riducendo poi in termini simili si ha:

$$(5a + 2b) \cdot (4b - 3a - 1) = 20ab - 15a^2 - 5a + 8b^2 - 6ab - 2b =$$

$$= 14ab - 15a^2 - 5a + 8b^2 - 2b$$

REGOLA :

Per moltiplicare due polinomi si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo, e poi si esegue la somma algebrica dei prodotti parziali così ottenuti

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

REGOLA :

Per dividere un polinomio per un monomio prima si divide ciascun termine del polinomio per il monomio e poi si addizionano tra loro i quozienti parziali così ottenuti.

$$(12x^2 - 9xy + 6x) : 3x$$

$$(12x^2 - 9xy + 6x) : 3x = \boxed{4x - 3y + 2} \rightarrow \text{polinomio quoziente}$$

Se i termini del polinomio non sono tutti divisibili per il monomio, i quozienti parziali si scrivono sotto forma di frazioni, eseguendo le possibili semplificazioni. In questo caso il polinomio quoziente è frazionario, anche se qualcuno dei suoi monomi può essere intero.

ESEMPI

1) $(6a^4b^3c^2 - 8a^3b^2c - 10ab^2c + 3b^2c^4):(-2a^2b^2c^2) =$

$$= -\frac{6a^4b^3c^2}{2a^2b^2c^2} + \frac{8a^3b^2c}{2a^2b^2c^2} + \frac{10ab^2c}{2a^2b^2c^2} - \frac{3b^2c^4}{2a^2b^2c^2} = -3a^2b + \frac{4a}{c} + \frac{5}{ac} - \frac{3c^2}{2a^2}$$

2) $(-3x^2yz + 6xy^2z - 8xz + 9z^2):(-3xyz) =$

$$= \frac{3x^2yz}{3xyz} - \frac{6xy^2z}{3xyz} + \frac{8xz}{3xyz} - \frac{9z^2}{3xyz} = x - 2y + \frac{8}{3y} - \frac{3z}{xy}$$

1° caso Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

Consideriamo il seguente prodotto tra due binomi, uno dei quali è la somma di due monomi *a* e *b*, mentre l'altro ne è la differenza:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})} = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = \boxed{\boldsymbol{a^2 - b^2}}$$

Notiamo che il risultato è uguale al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio.

REGOLA :

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio.

Esempi

1. $(2x+3y)\cdot(2x-3y) = 4x^2 - 9y^2$

2. $\left(\frac{2}{3}ab + \frac{3}{2}cd\right)\cdot\left(\frac{2}{3}ab - \frac{3}{2}cd\right) = \frac{4}{9}a^2b^2 - \frac{9}{4}c^2d^2$

2° caso QUADRATO DI UN BINOMIO

Calcoliamo il quadrato del binomio (a + b) costituito dalla somma di due monomi.

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2 = \boxed{\boldsymbol{a^2 + 2\,ab + b^2}}$$

Calcoliamo ora il quadrato del binomio (a - b) costituito dalla differenza di due monomi.

$$\boxed{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2} = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - \underline{ab} - \underline{ab} + b^2 = \boxed{\boldsymbol{a^2 - 2\,ab + b^2}}$$

REGOLA :

Il quadrato della somma di due monomi è uguale al quadrato del primo monomio, più o meno il doppio prodotto del primo per il secondo monomio, più il quadrato del secondo monomio.

3° caso **CUBO DI UN BINOMIO**

Calcoliamo il cubo del binomio (a + b) costituito dalla somma di due monomi.

$$\boxed{(a+b)^3} = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2)\cdot(a+b) =$$

$$= (a^2 + 2\,ab + b^2)\cdot(a+b) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{2\,a^2b} + \underline{2\,ab^2} + \underline{ab^2} + b^3 =$$

$$= \boxed{a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3}$$

Calcoliamo ora il cubo del binomio (a - b) costituito dalla differenza di due monomi.

$$\boxed{(a-b)^3} = (a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = (a^2 - ab - ab + b^2)\cdot(a-b) =$$

$$= (a^2 - 2\,ab + b^2)\cdot(a-b) = a^3 - \underline{a^2b} - \underline{2\,a^2b} + \underline{2\,ab^2} + \underline{ab^2} - b^3 =$$

$$= \boxed{a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3}$$

REGOLA :

Il cubo di un binomio è uguale ad un quadrinomio costituito dal cubo del primo monomio, più o meno il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo monomio, più o meno il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo monomio, più o meno il cubo del secondo monomio.

Quadrato di un trinomio

Il **quadrato di un trinomio** è uguale alla somma dei quadrati dei tre termini e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

ESEMPIO

$$(x-3y-2)^2 = x^2 + (-3y)^2 + (-2)^2 + 2x(-3y) + 2x(-2) + 2(-3y)(-2) =$$
$$x^2 + 9y^2 + 4 - 6xy - 4x + 12y$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(-x-y)^3 = -x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$$
$$(-x+y)^3 = -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$$
$$(3x-2y^2)^3 = 27x^3 - 54x^2y^2 + 36xy^4 - 8y^6$$

$$(2x+y-3z)^2 = 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz$$

Il triangolo di Tartaglia

- In ogni riga il primo e l'ultimo numero sono uguali a 1.
- Ogni numero diverso da 1 si ottiene come somma dei due che sono nella riga precedente, nella stessa colonna e in quella che la precede.

1					riga 0
1	1				riga 1
1	2	1			riga 2
1	3	3	1		riga 3
1	4	6	4	1	riga 4
...					...

ESEMPIO

Otteniamo i coefficienti della riga 4 da quelli della riga 3 nel modo illustrato a fianco.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & + & & + & & + & & & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Potenza di un binomio

La **potenza *n*-esima di un binomio** $(A + B)^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è un polinomio:

- omogeneo di grado n,
- completo sia rispetto ad A sia rispetto a B e
- ordinato secondo le potenze decrescenti di A e crescenti di B,
- i cui coefficienti coincidono con la riga n del triangolo di Tartaglia.

ESEMPIO

Calcoliamo $(z - 2x)^4$.

$(A + B)^4 = 1A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + 1B^4$.

Nella potenza richiesta abbiamo $A = z$ e $B = -2x$, quindi:

$(z - 2x)^4 = z^4 - 8z^3x + 24z^2x^2 - 32zx^3 + 16x^4$.

TRIANGOLO DI TARTAGLIA:

ogni numero è la somma dei 2 che "stanno sopra"

1 1	$(a+b)^1 = (a+b)$
1 2 1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3 =$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4 =$
1 5 10 10 5 1	
1 6 15 20 15 6 1	$(a+b)^6$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Scomposizione in fattori

Un polinomio è **scomposto in fattori** se lo scriviamo come prodotto di polinomi di grado inferiore.

Un polinomio è:

- **riducibile** se possiamo scomporlo nel prodotto di più fattori, ciascuno di grado inferiore al suo;
- **irriducibile** in caso contrario.

ESEMPIO

$$y^3 + 2y^2 - 9y - 18 = \underbrace{(y+2)}_{\text{è irriducibile}}\ \underbrace{(y^2 - 9)}_{\text{è riducibile: } y^2 - 9 = (y+3)(y-3)}$$

$y^3 + 2y^2 - 9y - 18$: è riducibile

La scomposizione di un polinomio in fattori irriducibili è **unica**.
Sono irriducibili tutti i binomi di primo grado.

La scomposizione di un polinomio in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa trasformarlo in un prodotto di polinomi e monomi.

Raccoglimento a fattore comune:

- metti "in evidenza" il M.C.D. tra tutti i termini del polinomio, cioè i fattori comuni con il minimo esponente.
  - **Esempio:**

◇ $x^2 + ax + bx = x (x + a + b)$.

◇ $6a^2b^3 - 2a^4b^2 + 4a^3b^3 =$
$2a^2b^2 (3b - a^2 + 2ab)$

Raccoglimenti parziali:

- "raccogli" i monomi che hanno dei fattori comuni; è importante che le parentesi ottenute dopo i primi raccoglimenti siano eguali in modo da poter procedere successivamente con un raccoglimento a fattore comune!
- **Esempio:**

◇ $ax + x + ab + b = x (a+1) + b (a+1) =$
$= (a+1)(x+b)$

Esempi guidati di raccoglimenti totali

Scomporre 2a(x+1) – 4b(x +1) =

- Si calcola il massimo comune divisore tra 2 a (x+1), 4 b (x+1), cioè si moltiplicano tra loro i fattori comuni con il minimo esponente. Nel nostro caso MCD = 2 (x+1).

Si scrive il MCD trovato "in evidenza", successivamente si apre una parentesi tonda e si scrivono i termini che si ottengono dividendo ciascun termine del polinomio di partenza per il MCD, si chiude la parentesi. Cioè:

$$2(x+1)[2a(x+1) : 2(x+1) - 4b(x+1) : 2(x+1)] =$$

ATTENTO! Le divisioni nella parentesi si svolgono mentalmente, infatti, in pratica, si scrive direttamente

$$2(x+1)(a - 2b)$$

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori:

a. $12a^3 - 6a^2b^2 + 9ab$; **b.** $5a(2x+y) - 3(2x+y)$.

a. Il fattore comune a tutti i termini è $3a$, che è il MCD dei tre monomi.

$$12a^3 - 6a^2b^2 + 9ab = \underbrace{3a}_{\text{mettiamo in evidenza } 3a = \text{MCD}(12a^3;\, 6a^2b^2;\, 9ab)} \cdot 4a^2 - 3a \cdot 2ab^2 + 3a \cdot 3b = \underbrace{3a}_{\text{fattore comune}} \cdot (4a^2 - 2ab^2 + 3b)$$

b. In questo caso, il fattore comune è un polinomio:

$$5a(2x+y) - 3(2x+y) = \underbrace{(2x+y)}_{\text{fattore comune}}(5a-3).$$

ESEMPIO

Consideriamo il polinomio $3ax + 3bx + ay + by$.

1. I primi due termini hanno in comune il fattore $3x$ e gli ultimi due il fattore y. Raccogliamo i fattori comuni:

$$3x(a+b) + y(a+b).$$

2. Ora il polinomio è la somma di due termini che hanno in comune il fattore $(a+b)$. Raccogliamo $(a+b)$:

$$(3x+y)(a+b).$$

Quindi: $3ax + 3bx + ay + by = (3x+y)(a+b)$.

Esempi guidati di raccoglimenti parziali

Scomporre $xa + 4\,ay + 2\,xb + 8b\,y =$

Osserviamo che non si può procedere con un raccoglimento totale perché il MCD tra tutti i termini è 1!

Osserviamo, però, che il 1° e 3° termine hanno un MCD diverso da 1 come anche il 2° e il 4°!

Cioè: $xa + 4a\,y + 2b\,x + 8b\,y =$

MCD= x MCD = 4y

In pratica si procede così: $x\,(xa{:}x + 2bx{:}x) + 4y\,(4ay{:}4y + 8by{:}4y) =$

ATTENTO! Le divisioni nella parentesi si svolgono mentalmente, infatti, in pratica, si scrive direttamente

$$x\,(a + 2b) + 4y\,(a + 2b) =$$

Possiamo ora procedere con il raccoglimento totale di (a+2b) e scrivere:

$$(a + 2b)\,(x + 4y)$$

Scomposizione con prodotti notevoli

Possiamo scomporre un polinomio in fattori se riusciamo a ricondurlo a uno dei prodotti notevoli che conosciamo.

Otteniamo quindi le seguenti regole:

$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$	quadrato di un binomio;
$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$	differenza di quadrati;
$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A+B)^3$	cubo di un binomio;
$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2$	quadrato di un trinomio.

Trinomio speciale

In generale, è vero che: $x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$.

$s = x_1 + x_2$ $\quad$ $p = x_1 \cdot x_2$

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori $x^2 + 5x + 6$, osservando che $5 = 2 + 3$ e $6 = 2 \cdot 3$.

$x^2 + 5x + 6 = \underline{x^2 + 2x} + \underline{3x + 2 \cdot 3} =$ raccogliamo parzialmente x nei primi due termini e 3 negli altri due

$x(x+2) + 3(x+2) =$ raccogliamo $x + 2$

$(x+2)(x+3)$

Trinomio speciale

Il metodo «somma e prodotto» può essere applicato anche se i coefficienti sono letterali oppure se il trinomio è del tipo $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$.

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori $6x^2 + 13x + 2$.

Consideriamo il prodotto $6 \cdot 2 = 12$ fra il coefficiente di x^2 e il termine noto. Fra le possibili coppie di numeri interi che moltiplicati danno 12, scegliamo $+1$ e $+12$ perché sommati danno $+13$, cioè il coefficiente di x. Questo permette di riscrivere il polinomio e di scomporlo con un raccoglimento parziale.

$$6x^2 + 13x + 2 = 6x^2 + 1x + 12x + 2 = x(6x+1) + 2(6x+1) = (6x+1)(x+2)$$

raccogliamo parzialmente x e 2 $\qquad$ raccogliamo $(6x + 1)$

Scomposizione con prodotti notevoli

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori: a. $x^6 - 6x^3 + 9$; **b.** $4a^2 - \frac{1}{81}$.

a. Abbiamo un trinomio in cui x^6 e 9 sono due quadrati e $-6x^3$ può essere un doppio prodotto. Proviamo allora a utilizzare la regola del quadrato di un binomio.

$$x^6 - 6x^3 + 9 = \overset{A^2}{(x^3)^2} + \overset{2AB}{2 \cdot x^3 \cdot (-3)} + \overset{B^2}{(-3)^2} = \overset{(A+B)^2}{(x^3 - 3)^2}$$

riconosciamo i due quadrati e verifichiamo il doppio prodotto

scriviamo il quadrato del binomio

Abbiamo considerato B negativo. Se invece prendiamo A negativo, otteniamo la scomposizione equivalente:

$$x^6 - 6x^3 + 9 = (-x^3 + 3)^2 = (3 - x^3)^2.$$

b. Il binomio è una differenza di due quadrati.

$$4a^2 - \frac{1}{81} = \overset{A^2}{(2a)^2} - \overset{B^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \overset{(A+B)(A-B)}{\left(2a + \frac{1}{9}\right)\left(2a - \frac{1}{9}\right)}$$

riconosciamo la differenza di quadrati

scriviamo i due fattori con somma e differenza

Se il divisore è un monomio

Un polinomio può essere diviso per un monomio non nullo quando esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo.

REGOLA

Un polinomio è divisibile per un monomio non nullo se e solo se lo è ognuno dei suoi termini.

ESEMPIO

Per eseguire la divisione, applichiamo la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione: dividiamo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

$$(a^4b^5 - 6a^3b^2) : (2a^2b^2) = (a^4b^5) : (2a^2b^2) - (6a^3b^2) : (2a^2b^2) = \frac{1}{2}a^2b^3 - 3a$$

proprietà distributiva → $(A + B) : C = A : C + B : C$

Nell'esempio, la divisione è possibile perché ognuno dei due termini del dividendo $a^4b^5 - 6a^3b^2$ è divisibile per il divisore $2a^2b^2$.

Divisibilità fra polinomi

DEFINIZIONE

Un polinomio A è **divisibile** per un polinomio B diverso dal polinomio nullo se esiste un polinomio Q che moltiplicato per B dà per prodotto A:

$$A : B = Q \quad \leftrightarrow \quad A = Q \cdot B.$$

Diciamo anche che *A* è **multiplo** di *B*.

A è il polinomio **dividendo**, *B* è il **divisore**, *Q* è il **quoziente**.

ESEMPIO

$A = x^3 - 4x$ è divisibile per $B = x - 2$.

Infatti, il polinomio $Q = x^2 + 2x$ è tale che:

$$\underbrace{x^3 - 4x}_{A} = \underbrace{(x^2 + 2x)}_{Q} \cdot \underbrace{(x - 2)}_{B}.$$

Se il divisore è un polinomio

TEOREMA

Dati i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ in una sola variabile, con B non nullo e con grado di $B \leq$ grado di A, esistono *sempre* e *soltanto* due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

con grado di $R <$ grado di B e grado di $Q =$ grado di $A -$ grado di B.
Q è il polinomio **quoziente** e R il polinomio **resto**.

Il teorema vale anche se *R* = 0 e in questo caso:

$$\boldsymbol{A(x) = B(x) \cdot Q(x)}$$

Quindi, se *R* = 0, *A* è divisibile per *B* e diciamo che *A* è *scomposto nei fattori B e Q.*

Se il divisore è un polinomio

Se il dividendo o il divisore non sono polinomi ordinati, prima di costruire lo schema dobbiamo ordinarli secondo le potenze decrescenti della variabile. Quando poi il dividendo non è un polinomio completo, lasciamo uno spazio vuoto per i termini mancanti.

ESEMPIO

Eseguiamo la divisione

$(2x^2 - 5) : (1 + x)$,

dove:

- il dividendo è ordinato ma non è completo;
- il divisore non è ordinato.

spazio per i termini con x

divisore ordinato

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & & -5 & x+1 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & -2x & & 2x-2 \\ \cline{1-3}
 & -2x & -5 & \\
 & 2x & +2 & \\ \cline{1-3}
 & & -3 &
\end{array}
$$

Q

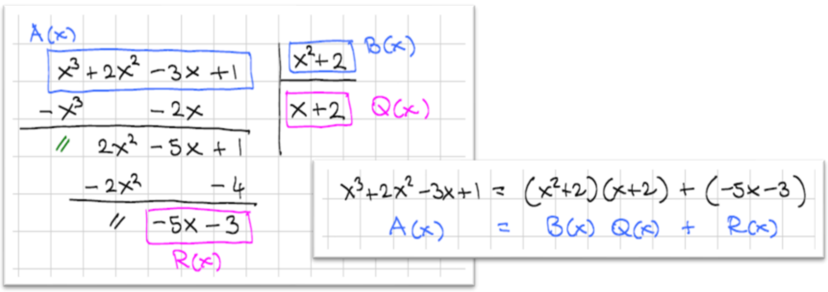
R

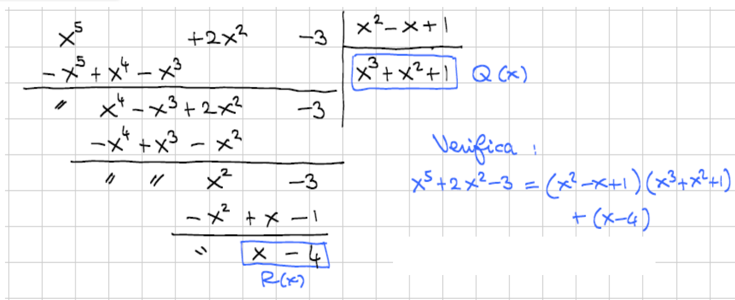
Esempio.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -2x^2 & +x & +1 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & -x^2 & & & x^2+x-2 \\ \cline{1-3}
 & x^3 & -3x^2 & +x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^2 & & +1 & \\
 & & 2x^2 & -2x & +2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +3 &
\end{array}
$$

Poi,

$$x^4 - 2x^2 + x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 2) - 2x + 3$$

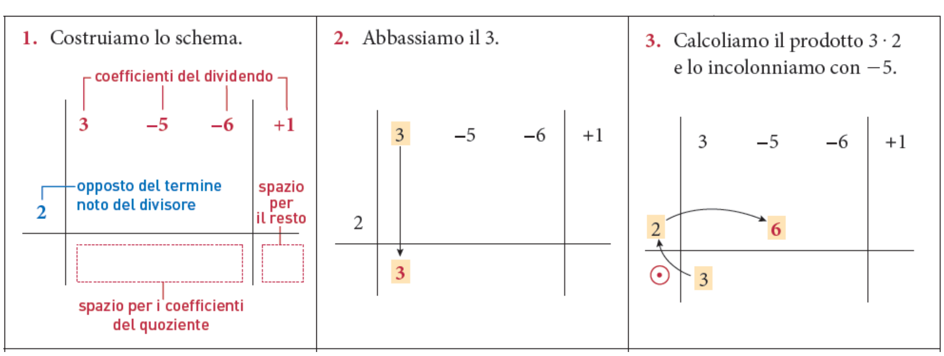




Regola di Ruffini

Se nella divisione $A(x) : B(x)$ il **divisore** $\boldsymbol{B(x)}$ è del tipo $x - a$, dove a è un numero reale, possiamo calcolare più velocemente quoziente e resto con una regola che usa soltanto i coefficienti numerici, detta **regola di Ruffini**.

Per esempio, eseguiamo la divisione $(3x^3 - 5x^2 - 6x + 1) : (x - 2)$



4. Sommiamo: $-5+6=1$.

	3	−5	−6	+1
2		6		
	3	1		

5. Ripetiamo il procedimento: $-6+(1 \cdot 2)=-4$.

	3	−5	−6	+1
2		6	2	
	3	1	−4	

6. Ripetiamo ancora il procedimento: $+1+(-4 \cdot 2)=-7$.

	3	−5	−6	+1
2		+6	2	−8
	3	1	−4	−7

I coefficienti del quoziente sono 3, 1, – 4. Il dividendo ha grado 3 e il divisore ha grado 1, quindi il quoziente ha grado 3 – 1 = 2.
Il quoziente è $Q = 3x^2 + x - 4$ e il resto è $R = -7$.

Confronto fra divisione in colonna e regola di Ruffini

ESEMPIO

Eseguiamo la divisione $(3x^2 - 7x - 10) : (x - 2)$ con i due metodi.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 - 7x - 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-3x^2 + 6x & 3x - 1 \\ \cline{1-1}
-\ x - 10 & \\
x - \ 2 & \\ \cline{1-1}
-12 &
\end{array}
$$

	3	−7	−10
2		6	−2
	3	−1	−12

Teorema di Ruffini

TEOREMA

Teorema di Ruffini

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - a$ *se e solo se* $P(a) = 0$.

Questo teorema serve per stabilire se c'è la divisibilità senza dover eseguire la divisione.

ESEMPIO

$P(x) = x^4 - 2x^3$ è divisibile per $x - 2$? Per stabilirlo calcoliamo:

$$P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 = 0.$$

Poiché $P(2) = 0$, per il teorema di Ruffini $P(x)$ è divisibile per $x - 2$.

Scomposizione mediante la Regola di Ruffini

- Supponiamo di dover scomporre il polinomio dividendo x^3-3x-2.
- Ricordando che <u>dividendo</u> = <u>divisore</u> * quoziente, effettuiamo la scomposizione in due fasi:

1- calcolo del divisore - si cercano i divisori del termine noto del polinomio da scomporre (nel nostro esempio i divisori di -2 sono +/-1 e +/-2); per tentativi, tra i divisori si trova quello, che chiameremo a, che annulla il polinomio [nell'esempio, il valore che annulla il polinomio è a= -1, infatti P(-1)= $(-1)^3$-3(-1)-2 =0]; il divisore cercato sarà (x-a). [nel nostro esempio (x+1)] Attenzione al cambiamento di segno!.

2- calcolo del quoziente - per calcolare il quoziente applichiamo la Regola di Ruffini [nel nostro esempio calcoliamo (x^3-3x-2):(x+1) , che dà come risultato x^2-x-2]

- In conclusione x^3-3x-2 = (x+1)(x^2-x-2)

$$\left(2x^3+4x^2-x+5\right):(x-3)$$

Ordiniamo i coefficienti come nel prospetto,
Cambiando il segno del termine noto:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +2 & +4 & -1 & +5 \\ +3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +2 & +4 & -1 & +5 \\ +3 & & +6 & & \\ \hline & +2 & +10 & & \end{array}$$

Scriviamo il primo coefficiente sotto la linea orizzontale e moltiplichiamolo per +3; trascriviamo il risultato +6 sotto il secondo coefficiente +4 e sommiamo trascrivendo il risultato +10 sotto la linea orizzontale

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +2 & +4 & -1 & +5 \\ +3 & & +6 & +30 & +87 \\ \hline & +2 & +10 & +29 & +92 \end{array}$$

Moltiplichiamo ora anche +10 per +3 e trascriviamo il risultato +30, sotto il terzo coefficiente -1; sommiamo algebricamente e trascriviamo il risultato +29 sotto la linea orizzontale. Moltiplichiamo ancora +29 per +3 e trascriviamo il risultato + 87 sotto il termine noto +5; sommiamo algebricamente e trascriviamo il risultato +92 sotto la linea orizzontale

Il quoto della divisione sarà il polinomio $2x^2+10x+29$ con resto +92

Osserviamo che il grado del polinomio quoto è inferiore di 1 rispetto al grado del polinomio dividendo!

Decomporre $2x^7-x^6-2x^3+x^2$ come prodotto di polinomi irriducibili.

La decomposizione di un polinomio a coefficienti interi è un processo iterativo in cui a ogni passo si trova la radice più semplice possibile e si estrae il fattore associato di grado 1 utilizzando l'algoritmo di divisione. Questo ci permette di ridurre il lavoro al quoziente, che sarà di grado inferiore e quindi più facile da studiare.

1 Se il polinomio non ha termine noto, lo 0 è una radice e possiamo raccogliere una potenza di x come fattore comune:

$$2x^7-x^6-2x^3+x^2=x^2\,(\underbrace{2x^5-x^4-2x+1}_{\text{Studiamo il quoziente}})$$

2 Procediamo ad applicare il Teorema delle radici razionali per trovare le possibili radici razionali del polinomio risultante: $P_1(x)=2x^5-x^4-2x+1$

$$\operatorname{div}(1)=\{\pm1\},\quad \operatorname{div}(2)=\{\pm1,\pm2\}\rightarrow \text{Possibili radici: } \left\{\pm1,\pm\frac{1}{2}\right\}$$

Conosciamo diversi metodi per verificare se i nostri candidati sono effettivamente radici del polinomio: valutare $P[c]$ e dividere per $x-c$ per ogni candidato a radice c. Tuttavia, esiste una tecnica che combina entrambe le procedure in un algoritmo molto semplice, il **metodo di Ruffini**.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ \hline & 2 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \underbrace{(2x^4 - 2)}_{P_2(x)}$$

E si ripete il procedimento per $P_2(x)$ e per quelli successivi:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & & -2 & 0 & -2 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Siamo arrivati a

$$P(x) = x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-1)\,(x+1) \underbrace{(2x^2 + 2)}_{P_4(x)},$$

e possiamo verificare che $P_4(x)$ non ammette radici razionali.

Ricerca degli zeri di un polinomio

REGOLA

Zeri interi

Dato un polinomio con coefficienti interi, se un numero intero è zero del polinomio, allora quel numero è divisore del termine noto.

ESEMPIO

Consideriamo il polinomio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$.
I suoi zeri interi sono da cercare fra i divisori del termine noto 2: $\pm 1, \pm 2$.

Calcoliamo:

$$P(1) = -4; \quad \underline{P(-1) = \mathbf{0}}; \quad \underline{P(2) = \mathbf{0}}; \quad P(-2) = -28.$$

Gli zeri interi di $P(x)$ sono $\mathbf{-1}$ e $\mathbf{2}$.

Ricerca degli zeri di un polinomio

REGOLA

Zeri razionali

Dato un polinomio con coefficienti interi, un numero razionale che sia zero del polinomio è fra le frazioni che hanno:

- un divisore del termine noto a numeratore;
- un divisore del coefficiente del termine di grado massimo a denominatore.

ESEMPIO

Cerchiamo gli zeri razionali del polinomio dell'esempio precedente.

$$P(x) = \underbrace{3}_{\text{coefficiente del termine di grado massimo}}x^3 - 4x^2 - 5x + \underbrace{2}_{\text{termine noto}}$$

Gli zeri si trovano fra: $\pm\frac{1}{1}, \ \pm\frac{2}{1}, \ \pm\frac{1}{3}, \ \pm\frac{2}{3}$. divisori di 2: ±1, ±2; divisori di 3: ±1, ±3

Oltre ai quattro valori interi, già considerati, dobbiamo calcolare:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{0}; \quad P\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{9}; \quad P\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{9}; \quad P\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

L'unico zero razionale di $P(x)$, *oltre a* -1 *e* 2 (già trovati in precedenza), è $\frac{1}{3}$.

Si può dimostrare che gli zeri razionali di un polinomio possono essere al massimo tanti quanti il grado del polinomio.

Scomposizione con il metodo di Ruffini

Per scomporre in fattori un polinomio $P(x)$ seguendo il **metodo di Ruffini**:

- cerchiamo uno zero razionale a del polinomio;
- se lo troviamo, dividiamo $P(x)$ per $x - a$ con la regola di Ruffini, ottenendo il quoziente $Q(x)$ e come resto zero;
- scriviamo la scomposizione: $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$.

Scomposizione con il metodo di Ruffini

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ con il metodo di Ruffini.

Divisori del termine noto: ± 1; ± 3.

Calcoliamo: $P(+1) = 2$; $P(-1) = 0$; ... quando troviamo uno zero ci fermiamo

Deduciamo che $(x + 1)$ è divisore di $P(x)$. Eseguiamo quindi la divisione:

$(x^3 + 4x^2 - 3) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & +4 & 0 & -3 \\ -1 & & -1 & -3 & +3 \\ \hline & 1 & +3 & -3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad Q(x) = x^2 + 3x - 3;\ R = 0.$$

Abbiamo la scomposizione: $x^3 + 4x^2 - 3 = (x + 1)(x^2 + 3x - 3)$.

Somma o differenza di cubi

REGOLA

La somma e la differenza di cubi si scompongono in:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2), \qquad A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

ESEMPIO

a. $\frac{x^3}{27} - \frac{y^3}{125} = \overset{A^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^3} - \overset{B^3}{\left(\frac{y}{5}\right)^3} = \left(\overset{A}{\frac{x}{3}} - \overset{B}{\frac{y}{5}}\right)\left[\overset{A^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} + \overset{A}{\frac{x}{3}} \cdot \overset{B}{\frac{y}{5}} + \overset{B^2}{\left(\frac{y}{5}\right)^2}\right] =$

$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{15} + \frac{y^2}{25}\right)$

b. $z^6 + 1 = \overset{A^3}{(z^2)^3} + \overset{B^3}{1^3} = (\overset{A}{z^2} + \overset{B}{1})[\overset{A^2}{(z^2)^2} - \overset{A}{z^2} \cdot \overset{B}{1} + \overset{B^2}{1^2}] = (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1)$

Trinomi del tipo $A^2 - AB + B^2$ e $A^2 + AB + B^2$ vengono anche chiamati **falsi quadrati** perché assomigliano a dei quadrati di binomi, ma non lo sono, per la mancanza del doppio prodotto. I falsi quadrati sono *irriducibili*.

$$a^4-b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)\boxed{(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$= (a-b)\boxed{(a^3+a^2b+ab^2+b^3)} \leftarrow \text{STESSA COSA}$$

$$a^6-b^6 = (a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$$
$$= (a^3-b^3)(a^3+b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$= (a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$$

$$a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$$

MCD e mcm di polinomi

DEFINIZIONE

Chiamiamo:

- **massimo comune divisore** (MCD) di due o più polinomi un polinomio che divide tutti i polinomi e ha il grado massimo possibile;
- **minimo comune multiplo** (mcm) di due o più polinomi un polinomio che è divisibile per tutti i polinomi e ha il grado minimo possibile.

ESEMPIO

Dati i polinomi, scomposti in fattori,

$$xy(x+7)^4 \text{ e } x^3(x+7)^6(y-9)^2,$$

abbiamo:

$$\text{MCD} = x(x+7)^4;$$

$$\text{mcm} = x^3y(x+7)^6(y-9)^2.$$

MCD e mcm di polinomi

Il **MCD** fra due o più polinomi è il prodotto dei loro fattori irriducibili comuni, presi una sola volta con l'esponente minore.
Il **mcm** è il prodotto dei fattori irriducibili comuni e non comuni, presi una sola volta con l'esponente maggiore.

ESEMPIO

Calcoliamo MCD e mcm di: $10x^2+20x+10$, $20x^2-20$, $2x^3+6x^2+6x+2$.

Scomponiamo i polinomi in fattori irriducibili e mettiamo in colonna i fattori:

$$10x^2+20x+10 = 10(x^2+2x+1) = \quad 2\cdot 5\cdot (x+1)^2$$

$$20x^2-20 = 20(x^2-1) = \quad 2^2\cdot 5\cdot (x+1)\cdot(x-1)$$

$$2x^3+6x^2+6x+2 = 2(x^3+3x^2+3x+1) = \quad 2\cdot (x+1)^3$$

i fattori comuni con l'esponente minore $\quad \text{MCD} = 2\cdot(x+1)$

tutti i fattori (comuni e non comuni) con l'esponente maggiore $\quad \text{mcm} = 2^2\cdot 5\cdot (x+1)^3\cdot(x-1)$

Quadro riassuntivo dei metodi di scomposizione

- Raccoglimento a fattore comune;
- Raccoglimenti parziali;
- Binomi:
  Differenza di quadrati $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$
  Differenza di cubi $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
  Somma di cubi $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- Trinomi:
  Trinomio quadrato di binomio $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
  Trinomio di 2° gr. ordinato con primo coefficiente uguale ad 1
  Regola della somma e del prodotto.
- Quadrinomi
  Quadrinomio cubo di binomio $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$
- Polinomi di ennesimo grado
  Scomposizione con la Regola di Ruffini

Scomponiamo il polinomio $(x^2+1)^2-4y^2$.

$$(x^2+1)^2-4y^2=\underbrace{(x^2+1)^2}_{A^2}-\underbrace{(2y)^2}_{B^2}=[\underbrace{(x^2+1)}_{A}-\underbrace{(2y)}_{B}][\underbrace{(x^2+1)}_{A}+\underbrace{(2y)}_{B}]=(x^2+1-2y)(x^2+1+2y)$$

$$x^4-x^3=x^3(x-1)$$
$$2x^4+4x^3+x=x(2x^3+4x^2+1)$$
$$18x^5y-9x^4y+\frac{3}{2}x^3y^2=3x^3y\left(6x^2-3x+\frac{1}{2}y\right)$$
$$(2x^2-y)^2-2x(2x^2-y)=(2x^2-y)(2x^2-y-2x)$$

Scomponiamo il polinomio x^4-x^2+2x-1.

$$x^4\underbrace{-x^2+2x-1}_{\text{raccogliendo }-1,\text{ si riconosce un quadrato}}=x^4-(x^2-2x+1)=\underbrace{(x^2)^2-(x-1)^2}_{\text{riconoscendo una differenza di quadrati}}=\underbrace{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}_{\text{scomponendo come differenza di quadrati}}$$

$$ax+by+bx+ay=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$
$$2x-6y+x^2-3xy=2(x-3y)+x(x-3y)=(x-3y)(2+x)$$
$$3x^2-3xy+3xz-2x+2y-2z=3x(x-y+z)-2(x-y+z)=(x-y+z)(3x-2)$$

Scomponiamo il polinomio $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$.

Osserviamo che due termini del polinomio sono due cubi:

$$\underbrace{8x^3}_{(2x)^3}-12x^2y+6xy^2\underbrace{-y^3}_{(-y)^3}$$

Inoltre:

$3(2x)^2(-y)=-12x^2y$ e $3(2x)(-y)^2=6xy^2$

Pertanto, in base alla formula

$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$

con $A=2x$ e $B=-y$, abbiamo che:

$$8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=[(2x)+(-y)]^3=$$
$$=(2x-y)^3$$

$$8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)[4x^2-6xy+9y^2]$$
$$\frac{64}{125}x^3+1=\left(\frac{4}{5}x\right)^3+1^3=\left(\frac{4}{5}x+1\right)\left[\frac{16}{25}x^2-\frac{4}{5}x+1\right]$$
$$\frac{1}{8}x^6-1=\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3-1^3=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1\right]$$

Scomponiamo i seguenti polinomi riconducendoli a somme o differenze di cubi:

a. $27a^3+8$ **b.** $1000-m^3$

a. $27a^3+8=(3a)^3+2^3=(3a+2)[(3a)^2-(3a)\cdot 2+2^2]=(3a+2)(9a^2-6a+4)$

$A^3-B^3=(A-B)\ (A^2+A\cdot B+B^2)$

b. $1000-m^3=10^3-m^3=(10-m)(10^2+10\cdot m+m^2)=(10-m)(100+10m+m^2)$

$A^3-B^3=(A-B)\ (A^2+A\cdot B+B^2)$

Passi	Esempi
1. Raccogli il M.C.D. fra i termini del polinomio (se il polinomio è a coefficienti interi e il M.C.D. è diverso da 1).	$\underbrace{3x^2y+2xy^2}_{\text{Il M.C.D. fra i termini è } xy} = \underbrace{xy(3x+2y)}_{\text{raccogliendo il fattore } xy}$
2. Osserva il polinomio che resta da scomporre. • Se è un *binomio* potrebbe essere: – la differenza di due quadrati; – la somma o la differenza di due cubi. I binomi di secondo grado che sono somme di due quadrati (quelli del tipo A^2+B^2) sono irriducibili. • Se è un *trinomio* potrebbe essere lo sviluppo del quadrato di un binomio o un trinomio di secondo grado.	$\underbrace{5a^2x-45b^2x}_{\text{è possibile raccogliere } 5x} = 5x\underbrace{(a^2-9b\ 2)}_{\text{binomio: è una differenza di quadrati}}=5x(a-3b)(a+3b)$ $\underbrace{t^5-t^2}_{\text{è possibile raccogliere } t^2} = t^2\cdot\underbrace{(t^3-1)}_{\text{binomio: è una differenza di cubi}} = t^2(t-1)\underbrace{(t^2+t+1)}_{\text{irriducibile (falso quadrato di 2° grado)}}$ $\underbrace{x^4-4x^3+3x^2}_{\text{è possibile raccogliere } x^2}=x^2\underbrace{(x^2-4x+3)}_{\text{trinomio di 2° grado scomponibile}}=x^2(x-1)(x-3)$ $\underbrace{2x^2-12ax+18a^2}_{\text{è possibile raccogliere 2}} = \underbrace{2(x^2-6ax+9a^2)}_{\text{trinomio: è un quadrato}}=2(x-3a)^2$

• Se è un *quadrinomio* potrebbe essere: – il cubo di un binomio; – la differenza di due quadrati di cui uno è il quadrato di un binomio.	$\underbrace{8a^3+12a^2+6a+1}_{\text{quadrinomio: è un cubo}}=(2a+1)^3$ $\underbrace{a^2+2ab+b^2-x^2}_{\text{quadrinomio}} = \underbrace{(a+b)^2-x^2}_{\text{differenza di due quadrati}}=(a+b-x)(a+b+x)$
• Se ha *sei* termini potrebbe essere: – il quadrato di un trinomio; – la differenza dei quadrati di due binomi.	$\underbrace{a^2+2ab+b^2-x^2-4xy-4y^2}_{\text{sei termini}}=\underbrace{(a+b)^2-(x+2y)^2}_{\text{differenza di due quadrati}}=$ $=(a+b+x+2y)(a+b-x-2y)$
• Se il polinomio da scomporre non rientra nei casi precedenti, si può cercare di effettuare degli opportuni *raccoglimenti parziali*, che consentano poi di eseguire un *raccoglimento totale*, oppure di applicare il *teorema* e la regola di *Ruffini*.	$\underbrace{x^2-y^2}_{\text{differenza di quadrati}}+\underbrace{ax+ay}_{\text{è possibile raccogliere } a}=\underbrace{(x-y)(x+y)+a(x+y)}_{\text{è possibile raccogliere } (x+y)}=(x+y)(x-y+a)$ x^3-x^2+2 ammette come zero $x=-1$; dividendo il polinomio dato per $(x+1)$ si ottiene la scomposizione: $x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-2x+2)$
3. Dopo aver trovato una scomposizione del polinomio, verifica se i fattori della scomposizione sono ulteriormente scomponibili, in modo da ottenere una scomposizione in fattori irriducibili.	$x^6-y^6=\underbrace{(x^3)^2-(y^3)^2}_{\text{differenza di quadrati}} = \underbrace{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}_{\text{differenza e somma di cubi}}=$ $=(x-y)\underbrace{(x^2+xy+y^2)}_{\text{irriducibile}}(x+y)\underbrace{(x^2-xy+y^2)}_{\text{irriducibile}}$

Verifica: Scomponi i seguenti polinomi in fattori

1° $27x^2-9x^4+18x^6-9x^8$

2° $8x^6-y^6$

3° $2ax+2ab+3x+3b$

4° $4ba^2-8ab^2+4b^3$

5° $x^4-10x^2y^2+25y^4$

6° $x^2-11x+30$

7° x^8-16b^4

Soluzioni

1°
$9x^2 * (3-x^2+2x^4-x^6)$

2°
$(2x^2-y^2) *$
$(4x^4+2x^2y^2+y^4)$

3°
$2a(x+b)+3(x+b)=$
$= (x+b) * (2a+3)$

4°
$4b * (a^2-2ab+b^2)=$
$= 4b * (a-b)^2$

5°
$(x^2-5y^2)^2$

6°
$(x-5) * (x-6)$

7°
$(x^4-4b^2) * (x^4+4b^2)=$
$=(x^2-2b) * (x^2+2b) * (x^4+4b^2)$

Definizione di frazione algebrica

DEFINIZIONE	ESEMPIO
Una **frazione algebrica** $\frac{A}{B}$ è il quoziente tra i polinomi A e B, con B diverso dal polinomio nullo.	$\frac{a+b}{a^2-b^2}$ è una frazione algebrica, con $a^2-b^2 \neq 0$.

Ogni polinomio può essere considerato una frazione algebrica con denominatore 1.
L'*insieme delle frazioni algebriche è un ampliamento dell'insieme dei polinomi.*

Condizioni di esistenza

Una frazione algebrica non può avere il denominatore uguale a 0.

Le **condizioni di esistenza** (C.E.) di una frazione algebrica indicano l'insieme dei valori che si possono attribuire alle lettere, per non far perdere significato alla frazione.

Per determinare le C.E. di una frazione algebrica, occorre determinare i valori che annullano il denominatore e poi scartarli.

ESEMPIO

Le C.E. di $\frac{5a}{a^2-1}$ sono $a \neq \pm 1$. Infatti:

$$a^2-1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad (a-1)(a+1) \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{C.E.: } a \neq 1 \wedge a \neq -1.$$

Frazioni algebriche come funzioni

Se in una frazione algebrica compare una sola variabile *x*, allora *la frazione è una funzione f*(*x*) di quella variabile e ha per **dominio** il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ indicato dalle condizioni di esistenza.

ESEMPIO

$\frac{x^2}{1-x}$ è una funzione $f(x)$.

Le condizioni di esistenza della frazione sono:

$$\text{C.E.: } x \neq 1,$$

quindi il dominio della funzione è:

$$D: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}.$$

Zeri di una frazione algebrica

I valori che annullano la frazione algebrica sono gli **zeri della funzione**. Per determinarli dobbiamo trovare i valori che annullano il numeratore ma non il denominatore.

ESEMPIO

Troviamo gli zeri di $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{x^2-9}$.

C.E.: $x^2 - 9 \neq 0 \rightarrow (x-3)(x+3) \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$

Gli zeri si ottengono ponendo:

- $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$;
- $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$.

$x = -1$ è l'unico zero della funzione, perché $x = 3$ non appartiene al dominio della funzione.

Proprietà invariantiva

Due frazioni algebriche sono **equivalenti** se hanno le stesse condizioni di esistenza e se assumono valori numerici uguali per qualsiasi valore, permesso dalle C.E., attribuito alle lettere.

Per passare da una frazione algebrica a una equivalente applichiamo la **proprietà invariantiva**, cioè moltiplichiamo o dividiamo numeratore e denominatore per uno stesso polinomio diverso dal polinomio nullo.

ESEMPIO

$$\frac{a-1}{a} \overset{\cdot(a+1)}{\underset{\cdot(a+1)}{=}} \frac{(a-1)(a+1)}{a(a+1)} = \frac{a^2-1}{a^2+a}, \qquad \text{C.E.: } \underbrace{a \neq 0 \wedge a \neq -1}_{\text{la frazione equivalente non ha le stesse C.E. di quella iniziale}}.$$

$\dfrac{a-1}{a}$ e $\dfrac{a^2-1}{a^2+a}$ sono equivalenti, ma solo se $a \neq 0$ e $a \neq -1$.

Semplificazione

Applicando la proprietà invariantiva, possiamo semplificare una frazione algebrica per **ridurla ai minimi termini**.
È necessario scomporre in fattori in numeratore e il denominatore e poi dividere ciascuno di essi per i fattori comuni, dopo averli posti diversi da 0.

La semplificazione è possibile soltanto dividendo per i **fattori** comuni.

Non possiamo semplificare addendi.

ESEMPIO

$\frac{\cancel{a}+1}{\cancel{a}+b}$ è **sbagliato**. Per capirlo, puoi pensare all'analoga frazione numerica

$\frac{3+1}{3+2}=\frac{4}{5}$. Semplificando il numero 3, otterresti $\frac{\cancel{3}+1}{\cancel{3}+2}=\frac{1}{2}$ e non $\frac{4}{5}$!

Riduzione allo stesso denominatore

La proprietà invariantiva serve anche per ridurre più frazioni algebriche allo stesso denominatore. È necessario determinare il mcm dei denominatori.

ESEMPIO

Riduciamo a denominatore comune $\frac{x+3}{x^2}$ e $\frac{2}{xy}$.

Determiniamo le C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Calcoliamo il mcm dei denominatori x^2 e xy: x^2y.

Moltiplichiamo poi il numeratore e il denominatore di ogni frazione per il fattore ottenuto dividendo il mcm per il denominatore.

$$\frac{x+3}{x^2} \overset{\cdot y}{\underset{\cdot y}{=}} \frac{(x+3)y}{x^2y}; \qquad \frac{2}{xy} \overset{\cdot x}{\underset{\cdot x}{=}} \frac{2x}{x^2y}.$$

Addizione e sottrazione

DEFINIZIONE

La **somma** algebrica di frazioni algebriche con lo stesso denominatore è una frazione algebrica in cui:

- il *numeratore* è la somma algebrica dei numeratori;
- il *denominatore* è lo stesso denominatore.

In simboli: $\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$.

Per sommare **frazioni algebriche con denominatore diverso:**

- si calcola il mcm dei denominatori e si scrivono le C.E.;
- si riducono le frazioni al minimo comune denominatore;
- si sommano i numeratori come si fa per le frazioni numeriche.

Addizione e sottrazione

	Frazioni numeriche	Frazioni algebriche
Vogliamo calcolare la somma delle frazioni.	$\frac{5}{6} - \frac{4}{15} =$	$\frac{1}{2x} + \frac{x-1}{x^2+3x} =$
Scomponiamo in fattori i denominatori.	$\frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{4}{3 \cdot 5} =$	$\frac{1}{2x} + \frac{x-1}{x(x+3)} =$
Scriviamo le C.E. e calcoliamo il denominatore comune.	$\text{mcm} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	C.E.: $x \neq 0 \wedge x \neq -3$ $\text{mcm} = 2x(x+3)$
Riduciamo allo stesso denominatore.	$\frac{5 \cdot 5 - 4 \cdot 2}{30} =$	$\frac{1 \cdot (x+3) + (x-1) \cdot 2}{2x(x+3)} =$
Sommiamo i numeratori ottenuti.	$\frac{25-8}{30} = \frac{17}{30}$	$\frac{x+3+2x-2}{2x(x+3)} = \frac{3x+1}{2x(x+3)}$

Moltiplicazione

DEFINIZIONE

Il **prodotto** di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica in cui:

- il *numeratore* è il prodotto dei numeratori;
- il *denominatore* è il prodotto dei denominatori.

In simboli: $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$.

Come per le frazioni numeriche, prima di moltiplicare conviene scomporre i numeratori e i denominatori e semplificare il più possibile.

Moltiplicazione

Vediamo un esempio di moltiplicazione tra frazioni algebriche.

	Frazioni numeriche	Frazioni algebriche
Vogliamo calcolare il prodotto delle frazioni.	$\frac{40}{21}\cdot\frac{14}{25}=$	$\frac{5y}{y^4-y^3}\cdot\frac{y^2-1}{10y+10}=$
Scomponiamo in fattori i numeratori e i denominatori e scriviamo le C.E.	$\frac{2^3\cdot 5}{3\cdot 7}\cdot\frac{2\cdot 7}{5^2}=$	$\frac{5y}{y^3(y-1)}\cdot\frac{(y-1)(y+1)}{10(y+1)}=$ C.E.: $y\neq 0 \ \wedge \ y\neq\pm 1$
Semplifichiamo.	$\frac{2^3\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{7}}\cdot\frac{2\cdot\cancel{7}}{5^{\cancel{2}}}=$	$\frac{\cancel{5}\cancel{y}}{y^{\cancel{3}2}\cancel{(y-1)}}\cdot\frac{\cancel{(y-1)}\cancel{(y+1)}}{{}_2\cancel{10}\cancel{(y+1)}}$
Moltiplichiamo	$\frac{2^4}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}$	$\frac{1}{2y^2}$

Divisione

DEFINIZIONE

Il **quoziente** di due frazioni algebriche è una frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione per la reciproca della seconda.

In simboli: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$.

Nel calcolo del quoziente di due frazioni algebriche, le C.E. sono quelle delle due frazioni, e cioè $B \neq 0$ e $D \neq 0$, alle quali dobbiamo aggiungere anche la condizione che il divisore sia diverso da 0, quindi $C \neq 0$.

ESEMPIO

Semplifichiamo la seguente espressione.

scomponiamo in fattori

$$\frac{x-2}{x^2+x} : \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{x-2}{x(x+1)} : \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} = \frac{\cancel{x-2}}{x(\cancel{x+1})} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}$$

moltiplichiamo per il reciproco del divisore

C.E.: $\underbrace{x \neq 0 \wedge x \neq -1}_{\text{C.E. delle frazioni}} \wedge \underbrace{x \neq 2 \wedge x \neq -2}_{\text{divisore} \neq 0}$

Potenza

DEFINIZIONE

La **potenza** di una frazione algebrica è una frazione algebrica in cui:

- il *numeratore* è la potenza del numeratore;
- il *denominatore* è la potenza del denominatore.

In simboli: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Se l'esponente è 0, nelle C.E. dobbiamo imporre diverso da 0 anche il numeratore, perché la potenza con esponente 0 è definita solo se la base è non nulla. Se l'esponente è negativo, si può calcolare la potenza utilizzando l'uguaglianza: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $n \in \mathbb{N}$ e C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Nelle C.E. dobbiamo porre diverso da 0 anche il numeratore perché utilizziamo la frazione reciproca.

Esempio

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+1}-\frac{x-1}{x^2-1}$$

Innanzitutto fattorizziamo i denominatori:

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

Per convertire le frazioni a denominatore comune, si calcola il minimo comune multiplo, che si ottiene come prodotto dei fattori non comuni e dei fattori comuni con l'esponente maggiore. In questo caso,

$$\text{m.c.m }(x^2+2x+1, x^2-1)=(x+1)^2(x-1).$$

Operiamo e semplifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x^2+2x+1}-\frac{x-1}{x^2-1}&=\frac{2x+3}{(x+1)^2}-\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{(2x+3)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2(x-1)}\\&=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{x+2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

ESEMPIO Addizioni e sottrazioni tra frazioni algebriche con denominatori diversi

Calcoliamo:

$$\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{2-x}-\frac{1}{x+2}$$

$\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{2-x}-\frac{1}{x+2}=$ Scomponiamo i denominatori C.E.: $x\neq\pm2$

$=\frac{6x}{(x-2)(x+2)}+\frac{3}{2-x}-\frac{1}{x+2}=$ Nota che i fattori colorati in rosso sono opposti.

$=\frac{6x}{(x-2)(x+2)}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}=$ Trasformiamo il denominatore della seconda frazione algebrica nell'opposto, cambiando il segno davanti alla frazione.

$=\frac{6x-3(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$ Calcolando la somma algebrica

$=\frac{2x-4}{(x-2)(x+2)}=$ Svolgendo i calcoli al numeratore

$=\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{2}{x+2}$ Scomponendo il numeratore e semplificando

ESEMPI Moltiplicazioni tra frazioni algebriche

a. $\frac{x^2-4}{x^2+x}\cdot\frac{x^3-x}{x^2-4x+4}=$

$=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)}\cdot\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)^2}=$ Scomponendo numeratori e denominatori C.E.: $x\neq-1\wedge x\neq0\wedge x\neq2$

$=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{x}(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x-2)^{\cancel{2}}}=$ Semplificando «in croce»

$=\frac{(x+2)(x-1)}{x-2}$ Moltiplicando i numeratori e i denominatori

b. $\frac{6a-6}{a}\cdot\frac{3a^2}{12a-12}=\frac{\cancel{6}\cancel{(a-1)}}{\cancel{a}}\cdot\frac{3a^{\cancel{2}}}{\cancel{6}\cdot2\cdot\cancel{(a-1)}}=\frac{3a}{2}$ C.E.: $a\neq0\wedge a\neq1$

c. $(6p-18)\cdot\frac{2}{5p-15}=\frac{6\cancel{(p-3)}}{1}\cdot\frac{2}{5\cancel{(p-3)}}=\frac{12}{5}$ C.E.: $p\neq3$

Esempio 1.25. $\frac{x^2+x}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{x+x+2}{x-1}=\frac{2x+2}{x-1}.$

Esempio 1.26. $\frac{3x(x+2)}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x+2}=\frac{3x\cancel{(x+2)}}{x+1}\cdot\frac{x-1}{\cancel{x+2}}=\frac{3x(x-1)}{x+1}=\frac{3x^2-3x}{x+1}.$

Esempio 1.27. $\frac{x^2-1}{x^3+1}=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}=\frac{x-1}{x^2-x+1}.$

ESEMPI Divisioni tra frazioni algebriche

a. $\dfrac{3a^2-12}{a+1} : \dfrac{3a+6}{a^2-1} =$ C.E.: $\underbrace{a \neq \pm 1}_{\text{denominatori} \neq 0} \wedge \underbrace{a \neq -2}_{\text{divisore} \neq 0}$

$= \dfrac{3a^2-12}{a+1} \cdot \dfrac{a^2-1}{3a+6} =$ Trasformando la divisione in una moltiplicazione

$= \dfrac{3(a-2)(a+2)}{a+1} \cdot \dfrac{(a-1)(a+1)}{3(a+2)} =$ Scomponendo numeratori e denominatori

$= \dfrac{\cancel{3}(a-2)\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+1)}} \cdot \dfrac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{\cancel{3}\cancel{(a+2)}} =$ Semplificando «in croce»

$= (a-2)(a-1) = a^2 - 3a + 2$ Calcolando il prodotto dei numeratori e il prodotto dei denominatori

b. $\dfrac{x^2-5x+4}{x+2} : (x^2-3x+2) =$ C.E.: $\underbrace{x \neq -2}_{\text{denominatore} \neq 0} \wedge \underbrace{x \neq 1 \wedge x \neq 2}_{\text{divisore} \neq 0}$

$= \dfrac{x^2-5x+4}{x+2} \cdot \dfrac{1}{x^2-3x+2} =$ Trasformando la divisione in moltiplicazione

$= \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{x+2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{(x-1)}(x-2)} =$ Scomponendo e semplificando

$= \dfrac{x-4}{x^2-4}$ Eseguendo la moltiplicazione

Esegui le seguenti operazioni e semplifica, se possibile, i risultati ottenuti:

a. $\dfrac{3m}{m^2-4} + \dfrac{m+4}{4-m^2}$ b. $\dfrac{2x^2}{x^2-1} + \dfrac{3x}{2x+2}$

a. $\dfrac{3m}{m^2-4} + \dfrac{m+4}{4-m^2} =$ Osserva che $4 - m^2 = -(m^2-4)$ C.E.: $m \neq \pm 2$

$= \dfrac{3m}{m^2-4} - \dfrac{m+4}{m^2-4} =$ Ora hai la differenza di due frazioni algebriche con lo stesso denominatore

$= \dfrac{\dots\dots}{m^2-4} =$ Il risultato ottenuto si può semplificare

$= \dfrac{2(\dots\dots)}{(m-\dots)(m+\dots)} = \dfrac{\dots\dots}{m+2}$

b. $\dfrac{2x^2}{x^2-1} + \dfrac{3x}{2x+2} =$ Scomponi i denominatori

$= \dfrac{2x^2}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{3x}{2(\dots\dots)} =$ Le C.E. sono $x \neq \pm 1$ e il m.c.m. dei denominatori è $2(x-1)(x+1)$

$= \dfrac{2x^2 \cdot \dots + 3x(\dots\dots)}{2(x-1)(x+1)} =$ Svolgi i calcoli

$= \dfrac{\dots\dots}{2(x-1)(x+1)}$

Esegui la moltiplicazione $\dfrac{a^4-16}{a^2+2a} \cdot \dfrac{a^4}{a^4+8a^2+16}$.

$\dfrac{a^4-16}{a^2+2a} \cdot \dfrac{a^4}{a^4+8a^2+16} =$

$= \dfrac{(a-2)(a+2)(\dots\dots)}{a(\dots\dots)} \cdot \dfrac{a^4}{(\dots\dots)^2} =$ Scomponendo in fattori C.E.: $a \neq -2 \wedge a \neq 0$

$= \dfrac{(a-2)\cancel{(a+2)}\cancel{(\dots\dots)}}{\cancel{a}\cancel{(\dots\dots)}} \cdot \dfrac{\cancel{a} \cdot a^3}{(\dots\dots)^{\cancel{2}}} =$ Semplificando

$= \dfrac{a^3(a-2)}{}$ Eseguendo la moltiplicazione

Semplifichiamo l'espressione $\left(\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^4-2x^3+x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}+1\right)$.

Eseguiamo i calcoli seguendo le note regole di priorità sullo svolgimento delle operazioni: svolgeremo quindi anzitutto le somme algebriche all'interno delle parentesi tonde, quindi la moltiplicazione.

$$\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{x^4-2x^3+x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+1\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{x}{x^2(x-1)^2}\right]\cdot\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+1\right)=$$ Scomponendo i denominatori
C.E.: $x\neq 0 \wedge x\neq \pm 1$

$$=\frac{x^2(x-1)+x(x+1)}{x^2(x-1)^2(x+1)}\cdot\frac{x\cancel{-1}+x^2\cancel{+1}}{x^2+1}=$$ Eseguendo le somme algebriche tra parentesi

$$=\frac{x^3\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}+x}{x^2(x-1)^2(x+1)}\cdot\frac{x+x^2}{x^2+1}=$$ Svolgendo i calcoli ai numeratori

$$=\frac{\cancel{x}\cancel{(x^2+1)}}{x^{\cancel{2}}(x-1)^2\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x^2+1)}}=$$ Scomponendo e semplificando «in croce»

$$=\frac{1}{(x-1)^2}$$ Eseguendo la moltiplicazione

Esegui la divisione $\dfrac{1-x}{x^2-4}:\dfrac{x^2-1}{x^2+4x+4}$.

Completa la seguente traccia di soluzione.

$$\frac{1-x}{x^2-4}:\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}=$$ C.E.: $\underbrace{x\neq\pm2}_{\text{denominatori}\neq 0} \wedge \underbrace{x\neq\pm1}_{\text{divisore}\neq 0}$

$$=\frac{1-x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2-1}=$$ Trasformando la divisione in moltiplicazione

$$=\frac{1-x}{(x-2)(\ldots\ldots)}\cdot\frac{(\ldots\ldots)^2}{(x-1)(\ldots\ldots)}=$$ Scomponendo in fattori

$$=\frac{-(x-1)}{(x-2)(\ldots\ldots)}\cdot\frac{(\ldots\ldots)^2}{(x-1)(\ldots\ldots)}=$$ Poiché $1-x=-(x-1)$

$$=\frac{-\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(\ldots\ldots)}}\cdot\frac{(\ldots\ldots)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(\ldots\ldots)}=$$ Semplificando

$$=-\frac{\ldots\ldots}{(x-2)(\ldots\ldots)}$$ Eseguendo la moltiplicazione

Semplifichiamo l'espressione $\left(\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{1}{2x^2+4x+2}\right):\left(\dfrac{2x+4}{x^2+x}\right)^2$.

$$\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{2x^2+4x+2}\right):\left(\frac{2x+4}{x^2+x}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}\right]:\left[\frac{2(x+2)}{x(x+1)}\right]^2=$$ Scomponendo ovunque possibile
C.E.: $x\neq-2 \wedge x\neq-1 \wedge x\neq 0$

$$=\frac{2(x+1)-x}{2x(x+1)^2}:\frac{4(x+2)^2}{x^2(x+1)^2}=$$ Eseguendo i calcoli nelle tonde

$$=\frac{x+2}{2x(x+1)^2}:\frac{4(x+2)^2}{x^2(x+1)^2}=$$ Eseguendo il calcolo al numeratore della prima frazione

$$=\frac{\cancel{x+2}}{2\cancel{x}\cancel{(x+1)^2}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)^2}}{4(x+2)^{\cancel{2}}}=$$ Trasformando la divisione in moltiplicazione e semplificando

$$=\frac{x}{8(x+2)}$$ Eseguendo la moltiplicazione

Semplifichiamo l'espressione $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}$.

$$\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right):\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$

La linea di frazione equivale al simbolo di divisione

$$=\frac{x^2-1}{x^2}:\frac{x+1}{x}=$$

Eseguendo i calcoli dentro le parentesi tonde
C.E.: $x\neq -1 \ \wedge \ x\neq 0$

$$=\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{x+1}=$$

Trasformando la divisione in moltiplicazione

$$=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{x^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x+1}}=$$

Scomponendo e semplificando

$$=\frac{x-1}{x}$$

Eseguendo la moltiplicazione

Esercizio 2.1. Decomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili:

(1) $-x^5+2x^3+8x$ (2) $4x^3-2x^2-12x+6$
(3) $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1$ (4) $6x^4+13x^3+15x^2+9x+2$

Esercizio 2.1: (1) $-x(x-2)(x+2)(x^2+2)$, (2) $2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(2x-1)$, (3) $(x+1)(x^2+1)^2$, (4) $(2x+1)(3x+2)(x^2+x+1)$

Esercizio 2.5. Opera e semplifica le seguenti espressioni:

(1) $\dfrac{x+4}{x^2-2x-3}-\dfrac{1-2x}{x^3-7x-6}$ (2) $1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1-x}{x^2-x}$

(3) $\dfrac{2}{3(2-x)}+\dfrac{x}{2x+4}+\dfrac{7x+2}{6(x^2-4)}$

Esercizio 2.5: (1) $\dfrac{x+7}{(x+2)(x-3)}$, (2) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, (3) $\dfrac{1+x}{2(x+2)}$

BIBLIOGRAFIA

- Bergamini, Barozzi *Matematica multimediale* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas