# INSIEMI - NUMERI

## Insiemi ed elementi

Un **insieme** è un raggruppamento di **oggetti**.
Ognuno di questi oggetti è detto **elemento** dell'insieme e diciamo che **appartiene** all'insieme.
Gli insiemi si indicano con lettere maiuscole *A, B, C…*
Gli elementi di un insieme si indicano con lettere minuscole *a, b c…*

**ESEMPIO**

- «Le pagine del libro di matematica» è un insieme,
- «Le torte più buone al mondo» **non** è un insieme.

# Insiemi ed elementi

Il simbolo:
- ∈ si legge *appartiene*,
- ∉ si legge *non appartiene*.

**ESEMPIO**

$A$ = {numeri interi maggiori di 3}
$A = \{4, 5, 6, 7, ...\}$
$5 \in A$,   $1 \notin A$.
In generale se $a$ è un numero intero:
$a \in A$ solo se $a > 3$.

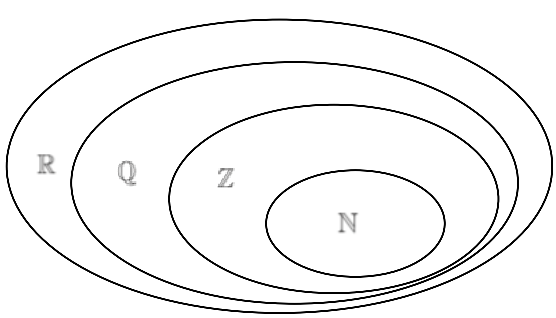
L'**insieme vuoto** è un qualsiasi insieme privo di elementi.
Si indica con il simbolo ∅.

**ESEMPIO**

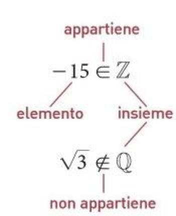
Sono l'insieme vuoto:
- «i triangoli con quattro lati»,
- «i numeri dispari divisibili per 2»,
- «i mesi con 40 giorni».

# Insiemi numerici

Gli insiemi numerici sono identificati con simboli particolari:
- $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri **naturali**,
- $\mathbb{Z}$ indica l'insieme dei numeri **interi**,
- $\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei numeri **razionali**,
- $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri **reali**.



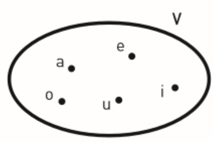
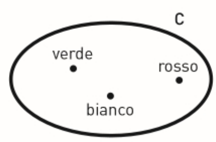
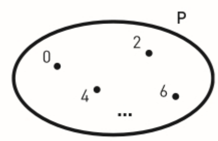

**ESEMPIO**



# Descrivere un insieme

Esistono vari modi per descrivere un insieme:
- fornire la **proprietà caratteristica,**
- **elencare** gli elementi che lo costituiscono,
- rappresentarlo graficamente con un **diagramma di Eulero-Venn**.

**ESEMPIO**

| **Proprietà caratteristica** | le vocali dell'alfabeto | i colori della bandiera italiana | i numeri pari |
|---|---|---|---|
| **Elencazione** | $V = \{a, e, i, o, u\}$ | $C = \{\text{verde, bianco, rosso}\}$ | $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ |
| **Diagramma di Venn** |   |   |   |

# Proprietà caratteristica con i simboli

**ESEMPIO**

Scriviamo mediante proprietà caratteristica, ma **con i simboli**, l'insieme *A* dei numeri interi maggiori di 3:

$$A = \{ n \in Z \mid n > 3 \}$$

che si legge *i numeri interi tali che (i numeri considerati) sono maggiori di tre.*

# Sottoinsiemi

**DEFINIZIONE**

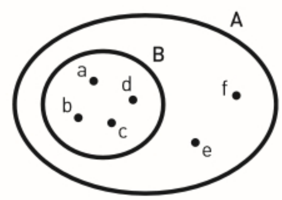
- Se ogni elemento di $B$ appartiene ad $A$, diciamo che $B$ è **sottoinsieme** di $A$; indichiamo questo con:

  $B \subseteq A$.

- Se $B$ è sottoinsieme di $A$ e almeno un elemento di $A$ non appartiene a $B$, diciamo che $B$ è incluso **strettamente** in $A$: indichiamo questo con:

  $B \subset A$.

**ESEMPIO**




$B \subset A$ perché $B \subseteq A$ e $f \in A$, ma $f \notin B$.

Il simbolo $\not\subset$ si usa per indicare che un insieme **non** è sottoinsieme di un altro.

# Unione

Dati gli insiemi *A* e *B* la loro **unione** è l'insieme $A \cup B$ formato dagli elementi che appartengono ad *A* **oppure** a *B.*

$$A \bigcup B = \{ x : x \in A \vee x \in B \}$$

$A = \{2, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$

$A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**ESEMPI** Unione di due insiemi

a. Se $A$ è l'insieme dei numeri pari e $B$ è l'insieme dei numeri dispari, abbiamo che $A \cup B = \mathbb{N}$.

b. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ perché $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

c. Se $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 5 \leq x \leq 10\}$, allora $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 10\}$.

Osserva che, come lo 0 è elemento neutro dell'addizione, analogamente l'insieme vuoto è «elemento neutro» dell'operazione di unione fra insiemi; infatti, qualsiasi sia l'insieme $A$, risulta:

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

# Intersezione

Dati gli insiemi *A* e *B* la loro **intersezione** è l'insieme $A \cap B$ formato dagli elementi che appartengono ad *A* **e** a *B.*

$$A \cap B = \{ x : x \in A \land x \in B \}$$

L'intersezione di due insiemi *A* e *B* può coincidere con *A* o *B*, se uno dei due insiemi è contenuto nell'altro: per esempio, se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$ (**Fig. 3**).
Se due insiemi *A* e *B* **non** hanno elementi in comune, allora la loro intersezione è l'insieme vuoto e i due insiemi si dicono **disgiunti** (**Fig. 4**).

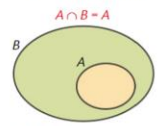



**Figura 3**

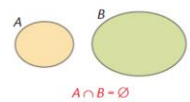



**Figura 4**

$A = \{2, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$

$A \cap B = \{6, 7\}$

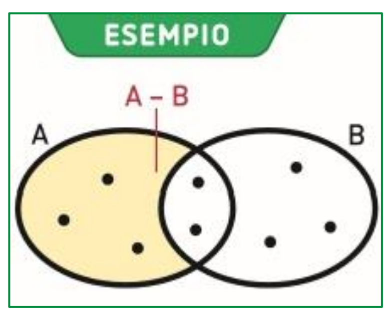
**ESEMPI** Intersezione di due insiemi

a. Se *A* è l'insieme dei numeri primi e *B* è l'insieme dei numeri pari, abbiamo che $A \cap B = \{2\}$ (perché 2 è l'unico numero primo pari).
b. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ perché $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
c. L'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri irrazionali non hanno elementi in comune: sono insiemi *disgiunti*, la cui intersezione è vuota.

# Differenza

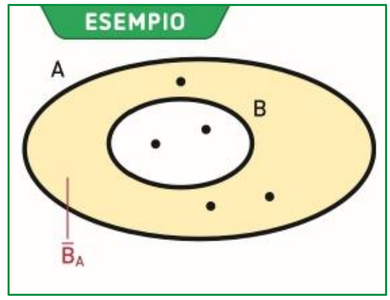
Dati gli insiemi *A* e *B*, la **differenza** *A* - *B* è l'insieme degli elementi che appartengono ad *A* ma **non** a *B*.

$A - B = \{ x \mid x \in A \ \text{e} \ x \notin B \}$



# Complementare di un insieme

Dati gli insiemi *A* e *B*, con $B \subseteq A$, **l'insieme complementare** di *B* rispetto ad *A* è $\overline{B}_A = A - B$.




Spesso dato un insieme *A* il suo complementare viene fatto rispetto ad generico insieme più ampio detto **insieme universo.** In questo caso fanno parte del complementare tutti gli elementi che non appartengono ad *A*.

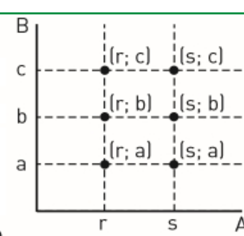
# Prodotto cartesiano di insiemi

Dati gli insiemi *A* e *B*, il **prodotto cartesiano** $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a\,;b)$, con $a \in A$ e $b \in B$.

$A \times B = \{ (a\,;b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$

ESEMPIO

► **Tracciamo il diagramma cartesiano di $A \times B$, con $A = \{r, s\}$ e $B = \{a, b, c\}$.**




Ogni coppia del prodotto cartesiano

$A \times B = \{(r; a), (r; b), (r; c), (s; a), (s; b), (s; c)\}$

è rappresentata da un punto.

# Numeri naturali

0, 1, 2, 3... sono numeri naturali e il loro insieme si indica con .

Si possono rappresentare su una retta orientata.


$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} - \{0\}$

L'insieme dei numeri naturali è ordinato:

- possiamo sempre confrontare due numeri naturali,
- esistono il precedente e il successivo di ogni numero naturale diverso da 0.

**ESEMPIO**

$3 < 5$, $7 > 2$, $4 \leq 4$, $8 \geq 1$

13

## Operazioni

**DEFINIZIONE**

**Potenza**

Se $a$ e $n$ sono numeri naturali:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$ se $n > 1$;
- $a^1 = a$;
- $a^0 = 1$ se $a \neq 0$.

Non si definisce $0^0$.

**ESEMPIO**

si legge: «tre alla quarta»

$3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ volte}} = 81$

$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$9^1 = 9$ $1^1 = 1$ $0^1 = 0$

$26^0 = 1$ $1^0 = 1$

# Espressioni letterali

**Traduci** dalle parole ai simboli

**ESEMPIO**

| Con le parole | Con i simboli |
|---|---|
| Il doppio di $a$ | $2a$ |
| Il triplo di $a$ | $3a$ |
| La metà di $a$ | $a : 2$ |
| La terza parte di $a$ | $a : 3$ |
| Il quadrato di $a$ | $a^2$ |
| Il cubo di $a$ | $a^3$ |

| Con le parole | Con i simboli |
|---|---|
| La somma tra $a$ e $b$ | $a + b$ |
| La differenza tra $a$ e $b$ | $a - b$ |
| Il prodotto tra $a$ e $b$ | $ab$ |
| Il quoziente tra $a$ e $b$ | $a : b$ |
| Il successivo di $a$ | $a + 1$ |
| Il precedente di $a$ | $a - 1,\ a \geq 1$ |

# Proprietà delle potenze

Il prodotto di più numeri naturali uguali fra loro si abbrevia mediante il simbolo di potenza.

Se a è un numero naturale e n è un numero naturale maggiore di 1, si pone

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \bullet a \bullet a \ldots \bullet a}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 1 \\ a & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

**$0^0$ non ha significato**.

**Proprietà delle potenze**

- $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$ — esempio: $3^4 \bullet 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ con m > n — esempio: $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$
- $(a^m)^n = a^{m \bullet n}$ — esempio: $(3^4)^2 = 3^{4 \bullet 2} = 3^8$
- $(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$ — esempio: $(2 \bullet 3)^4 = 2^4 \bullet 3^4$
- $(a : b)^n = a^n : b^n$ — esempio: $(8 : 2)^3 = 8^3 : 2^3$

# Multipli e divisori

| CON LE PAROLE | CON I SIMBOLI | ESEMPIO |
|---|---|---|
| Siano *a* e *b* due numeri naturali. | (*a*, *b*, *q* numeri naturali) | |
| •*a* è **multiplo** di *b* se esiste un numero naturale *q* che moltiplicato per *b* dà *a*; | $a = q \times b$ | $10 = 2 \times 5$<br>10 è multiplo di 2 |
| •*b*, diverso da 0, è **divisore** di *a* se la divisione fra *a* e *b* dà come resto 0. | $a : b = q$<br>resto=0 | 2 è divisore di 10 |

Un numero naturale diverso da 0 e da 1 è un **numero primo** se ha come divisori solo 1 e se stesso.

# Criteri di divisibilità

| Un numero naturale è divisibile per... | se e solo se... | Esempio |
|---|---|---|
| 2 | la cifra delle unità è pari | 1320 2714 316<br>0, 4, 6 divisibili per 2 |
| 3 | la somma delle cifre è divisibile per 3 | 3642 $3+6+4+2=15$ divisibile per 3 |
| 4 | termina con 00 o il numero formato dalle ultime due cifre è divisibile per 4 | 1600<br>2312 divisibile per 4 |
| 5 | la cifra delle unità è 0 o 5 | 290 1725 1200 |
| 9 | la somma delle cifre è divisibile per 9 | 2952 $2+9+5+2=18$ divisibile per 9 |
| 11 | la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari (o viceversa) è divisibile per 11 | $3+6+7=16$<br>35607 $16-5=11$ divisibile per 11<br>$5+0=5$ |
| 25 | termina con 00 o il numero formato dalle ultime due cifre è divisibile per 25 | 3700<br>7150 divisibile per 25 |
| 10, 100, 1000… | termina con 0, 00, 000… | 30 divisibile per 10<br>300 divisibile per 100<br>3000 divisibile per 1000 |

# MCD e mcm: definizione

**DEFINIZIONE**

Fra due numeri naturali diversi da 0:

- il **massimo comune divisore** (**MCD**) è il più grande fra i loro divisori comuni.
- il **minimo comune multiplo** (**mcm**) è il più piccolo fra i loro multipli comuni diversi da 0.

**ESEMPIO**

Consideriamo, per esempio, 12 e 18.

Divisori di 12: **1**, **2**, **3**, 4, **6**, 12.

divisori comuni

Divisori di 18: **1**, **2**, **3**, **6**, 9, 18.

MCD(12; 18) = **6**.

Consideriamo ancora 12 e 18.

Multipli di 12: 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, …

multipli comuni

Multipli di 18: 18, **36**, 54, **72**, 90, …

mcm(12; 18) = **36**.

# MCD e mcm: calcolo

**REGOLA**

Se scomponiamo in fattori primi due o più numeri naturali:

- il **MCD** è il prodotto dei *fattori comuni*, presi una sola volta, con l'*esponente minore*;
- il **mcm** è il prodotto di tutti i *fattori comuni e non comuni*, presi una sola volta, con l'*esponente maggiore*.

**ESEMPIO**

Per calcolare MCD e mcm di 120 e 140, scomponiamo i numeri in fattori primi.
Mettiamo poi i fattori in colonna.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$

$\text{MCD} = 2^2 \cdot 5$ — fattori comuni con l'esponente minore

$\text{mcm} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ — fattori comuni e non comuni con l'esponente maggiore

Il MCD è 20, il mcm è 840.

# Numeri interi

Per ogni numero naturale diverso da zero, consideriamo due numeri ottenuti facendo precedere il numero dal segno + e dal segno −.

$$1 \begin{array}{l} \nearrow +1 \\ \searrow -1 \end{array} \qquad 2 \begin{array}{l} \nearrow +2 \\ \searrow -2 \end{array} \qquad 3 \begin{array}{l} \nearrow +3 \\ \searrow -3 \end{array} \qquad 4 \begin{array}{l} \nearrow +4 \\ \searrow -4 \end{array} \qquad \dots$$

Chiamiamo **numeri interi** i numeri così ottenuti, uniti al numero zero, che per convenzione non ha segno.

L'insieme dei numeri interi viene indicato con è $\mathbb{Z}$ *insieme dei numeri relativi*.

L'**insieme Z** indica l'insieme dei numeri interi relativi, ossia l'insieme di tutti i numeri interi con segno positivo (+), negativo (-) o nullo. In particolare l'unico elemento con segno nullo dell'insieme Z è lo zero.

Volendo essere più precisi diremo che l'insieme Z è formato dall'unione:

- dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

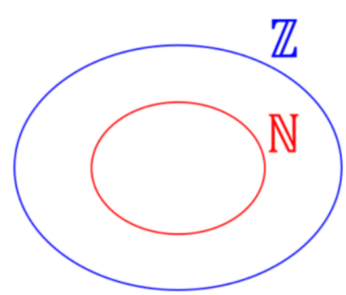
- dell'insieme $\mathbb{N}^-$ dei numeri interi negativi, ossia dei numeri naturali preceduti dal segno meno

$\mathbb{N}^- = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$

Pertanto

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-$$

L'insieme N dei numeri naturali è un sottoinsieme proprio dell'insieme Z, ossia $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$




22

# Numeri relativi

Un numero intero è **positivo** se ha segno +, **negativo** se ha segno −.

Indichiamo con:

- $Z^+$ l'insieme degli interi positivi $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $Z^-$ l'insieme degli interi negativi; $Z^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$
- $Z^*$ l'insieme degli interi non nulli.

Diciamo **opposti** i numeri con segno diverso ottenuti dallo stesso numero naturale. Si considera il numero 0 l'opposto di se stesso.

**ESEMPIO**

+21 e −21 sono opposti.

# Numeri concordi e discordi

Due interi diversi da zero sono:

- **concordi** se hanno lo stesso segno;
- **discordi** se hanno segno diverso.

**ESEMPIO**

concordi: $+8$ $+6$

discordi: $-7$ $+12$

discordi e opposti: $-9$ $+9$

Nell'insieme dei numeri interi possiamo indicare un numero positivo anche senza scrivere il segno. Per esempio, 12 indica sia il numero naturale 12, sia l'intero +12. Per questo, possiamo pensare a $\mathbb{N}$ come a un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Z}$.
In simboli:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

# Valore assoluto

Chiamiamo **valore assoluto** o **modulo** di un numero intero *a*, e lo indichiamo con $|a|$:

- il numero stesso, se è positivo o zero;
- l'opposto del numero, se il numero è negativo.

se *a* positivo o zero

$$|a| = \begin{cases} a \\ -a \end{cases}$$

se *a* negativo

Di solito, scriviamo il risultato del valore assoluto senza segno +.

Il valore assoluto di un numero intero è sempre positivo o è zero.

**ESEMPIO**

$|+5| = 5, \qquad |0| = 0, \qquad |-16| = 16.$

Il valore assoluto di un numero reale $a$ è, per definizione, il numero reale $|a|$ dato da:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geqslant 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Dalla definizione derivano immediatamente le seguenti proprietà, valide per tutti $a \in \mathbb{R}$:

- $|a| \geqslant 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow$ a$= 0$,
- $a \leqslant |a|$
- $|a| \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leqslant a \leqslant b.$
- $|-a| = |a|$
- $a^2 = |a|^2$.
- $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad |a| = |b|.$

**Occhio!** $5^2 = (-5)^2 = 25$, ma $5 \neq -5$

Con i punti precedenti possiamo dimostrare che il valore assoluto rispetta il prodotto, ma in generale per la somma abbiamo solo delle disuguaglianze:

- $|ab| = |a|\,|b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
- $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

26

# Frazioni

**DEFINIZIONE**

Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri naturali, con *il secondo diverso da zero*.

Il primo numero è il **numeratore** della frazione, il secondo è il **denominatore**.

**ESEMPIO**

$\frac{3}{4}$ è una frazione (3 numeratore, 4 denominatore)

$\frac{5}{0}$ **non** è una frazione

**DEFINIZIONE**

Due **frazioni**, $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$, sono **equivalenti** se e solo se:

$m \cdot q = n \cdot p$.

**ESEMPIO**

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ equivalenti $2 \cdot 4 = 8 \cdot 1$

$\frac{1}{2} \neq \frac{4}{10}$ non equivalenti $1 \cdot 10 \neq 2 \cdot 4$

Una frazione si dice ridotta ai minimi termini se il numeratore e il denominatore sono primi tra loro.

Ogni numero razionale può essere espresso da infinite frazioni equivalenti, ma ogni frazione rappresenta un unico numero razionale.

Si chiama **numero razionale assoluto** ogni **sottoinsieme di frazioni equivalenti**.

L'insieme dei numeri razionali assoluti viene indicato con ***Q***

# Potenze con esponente positivo o nullo

**DEFINIZIONE**

Dati la frazione $\frac{a}{b}$ e il numero naturale $n$, la **potenza** $n$-esima di $\frac{a}{b}$ è la frazione con numeratore $a^n$ e denominatore $b^n$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } b \neq 0.$$

**ESEMPIO**

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{12^2}{5^2} = \frac{144}{25}$$

distribuiamo l'esponente

Nell'insieme dei razionali valgono le *cinque proprietà delle potenze*.

**ESEMPIO**

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\text{prima proprietà delle potenze}} : \overbrace{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3}^{\text{terza proprietà delle potenze}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10} : \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

seconda proprietà delle potenze

definizione di potenza

# Potenze con esponente negativo

Nei numeri razionali si possono eseguire anche potenze con esponente negativo, che hanno sempre significato se la base è diversa da 0.

**DEFINIZIONE**

$$q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n,$$

dove $q$ è un numero razionale e $q \neq 0$, $n$ è un numero naturale.
Esprimiamo il numero razionale $q$ nella forma $\frac{a}{b}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

con $a, b \neq 0$.

**ESEMPIO**

- $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- $(-4)^{-2} = \left(\frac{1}{-4}\right)^2 = +\frac{1}{16}$
- $\left(+\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(+\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

Anche in questo caso valgono le *cinque proprietà delle potenze*.

$$7^{-7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{7^7} \cdot \frac{1}{7^5} = \frac{1}{7^{12}}$$

$$7^{-7} \cdot \underbrace{(7^{-1})^5}_{\text{potenza di potenza}} = 7^{-7} \cdot 7^{-5} = 7^{-12} = \frac{1}{7^{12}}$$

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$7^{-3} : 7^{-12} = 7^{-3-(-12)} = 7^{-3+12} = 7^9$$

In alternativa

$$\frac{1}{7^3} : \frac{1}{7^{12}} = \frac{1}{7^3} \cdot 7^{12} = 7^{12-3} = 7^9$$

$$2^{3^2} = 2^9 = 2^{(3^2)} \qquad \underbrace{(2^3)^2}_{\text{POTENZA DI POTENZA}} = 2^6$$

$$(12^{-12} : 4^{-4}) \cdot 3^{-3} = \left(\frac{1}{12^{12}} : \frac{1}{4^4}\right) \cdot \frac{1}{3^3} =$$

$$= \frac{1}{12^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{(3 \cdot 4)^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{12}} \cdot \frac{1}{4^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{1}{3^{15}} \cdot \frac{1}{4^8} = 3^{-15} \cdot 4^{-8} = 3^{-15} \cdot 2^{-16}$$

30

# Numeri decimali

In un **numero decimale** distinguiamo:

- la **parte intera**, cioè quella prima della virgola;
- la **parte decimale**, cioè quella dopo la virgola, costituita da decimi, centesimi, millesimi…

Tutte le frazioni che hanno come denominatore una potenza di 10 si chiamano **frazioni decimali**.

Con la stessa scrittura decimale possiamo rappresentare anche tutte le frazioni equivalenti a una frazione decimale.

**ESEMPIO**

$\frac{29}{4}$ è equivalente a $\frac{725}{100}$ e la sua forma decimale è ancora 7,25.

# Decimali semplici e misti

Un numero decimale periodico è:

- **semplice** se le cifre si ripetono subito dopo la virgola;
- **misto** se le cifre si ripetono ma non subito dopo la virgola.

Chiamiamo **periodo** il gruppo di cifre che si ripete e **antiperiodo** il gruppo di cifre decimali che precede il periodo.

**ESEMPIO**

$$\frac{41}{11} = 41:11 = \underbrace{3,7272\ldots}_{\text{numero decimale periodico semplice}} = 3,\overbrace{\overline{72}}^{\text{periodo}}$$

$$\frac{58}{45} = 58:45 = \overbrace{1,2888\ldots}^{\text{numero decimale periodico misto}} = 1,\underbrace{2}_{\text{antiperiodo}}\overbrace{\overline{8}}^{\text{periodo}}$$

# Dal numero decimale alla frazione

Anche un **numero decimale periodico** può essere sempre trasformato in una frazione.

**REGOLA**

In una frazione che genera un numero decimale periodico:

- il **numeratore** è la differenza fra il numero scritto senza virgola e il numero formato dalle cifre non periodiche;
- il **denominatore** ha come cifre tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

**ESEMPIO**

$$4,\underbrace{\overline{52}}_{\text{2 cifre}} = \frac{452-4}{\underbrace{99}_{\text{2 nove}}} = \frac{448}{99}$$

$$0,\overset{\text{1 cifra}}{2}\underbrace{\overline{58}}_{\text{2 cifre}} = \frac{258-25}{\underbrace{9}_{\text{1 nove}}\underbrace{00}_{\text{2 zeri}}} = \frac{233}{900}$$

Dunque, **a ogni numero razionale corrisponde un numero decimale**, **finito o periodico**, **e viceversa.**

# Numeri razionali e irrazionali

Chiamiamo **numero irrazionale** ogni numero che può essere rappresentato da un numero decimale illimitato non periodico.

**ESEMPIO**

Sono numeri irrazionali:

$\sqrt[3]{5} = 1,709\ldots;$

$\pi = 3,141\ldots;$

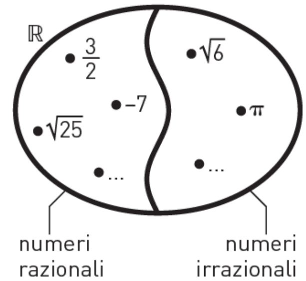
$1,010\,010\,001\,000\,01\ldots$

È un **numero razionale** ogni numero che può essere rappresentato dal rapporto di due numeri interi.

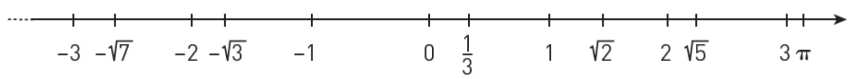
# Numeri reali

È un **numero reale** ogni numero che sia razionale o irrazionale.

L'**insieme dei numeri reali** si indica con $\mathbb{R}$.




Tutti i numeri reali si possono ordinatamente rappresentare sulla retta orientata.




La **radice quadrata** è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza con esponente 2.

| DEFINIZIONE | ESEMPIO |
|---|---|
| La **radice quadrata** di un numero reale $a \geq 0$ è il numero $b \geq 0$ che elevato al quadrato dà $a$. <br> $\boldsymbol{b = \sqrt{a} \leftrightarrow b^2 = a, \quad \text{con } a \geq 0,\ b \geq 0.}$ | $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0} = 0$; <br> $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; <br> $\sqrt{-3}$ non esiste. |

La **radice cubica** è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza con esponente 3.

| DEFINIZIONE | ESEMPIO |
|---|---|
| La **radice cubica** di un numero $a$ qualsiasi è il numero $b$ che elevato al cubo dà $a$. Per indicare l'operazione di radice cubica, usiamo il simbolo $\sqrt[3]{\ }$. <br> $\boldsymbol{b = \sqrt[3]{a} \leftrightarrow b^3 = a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.}$ | $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{-1} = -1$; <br> $\sqrt[3]{-64} = -4$; $\sqrt[3]{0} = 0$; <br> $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$. |

# Radici $n$-esime

La **radice $n$-esima** è definita come l'operazione inversa dell'elevamento a potenza con esponente naturale $n$ diverso da 0.

**DEFINIZIONE**

La **radice $n$-esima** del numero reale $a$, con $n$ numero naturale diverso da 0:

- se $n$ è pari, esiste solo per $a \geq 0$; è il numero reale $b \geq 0$ tale che $b^n = a$;
- se $n$ è dispari, esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$; è il numero $b \in \mathbb{R}$ tale che $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a \begin{cases} \text{se } n \text{ è pari: } a \geq 0,\ b \geq 0; \\ \text{se } n \text{ è dispari: } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0.$$

L'espressione $\sqrt[n]{a}$ è detta **radicale**: $n$ è l'**indice** del radicale, $a$ è il **radicando**.

# Condizioni di esistenza

Si può dimostrare che:

- se $n$ è pari, $\sqrt[n]{a}$ esiste per ogni $a \geq 0$; — $n$ pari, C.E.: $a \geq 0$
- se $n$ è dispari, $\sqrt[n]{a}$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$. — $n$ dispari, C.E.: $\forall a \in \mathbb{R}$

**ESEMPIO**

**Studiamo le condizioni di esistenza di $\sqrt[4]{x-1}$ e $\sqrt[5]{7-y}$.**

$\sqrt[4]{x-1} \rightarrow$ C.E.: $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$.

il radicando deve essere positivo o nullo

$\sqrt[5]{7-y} \rightarrow$ C.E.: $\forall y \in \mathbb{R}$.

il radicando può avere segno qualsiasi

Il **radicale con indice $n$** di un'espressione letterale:
- è sempre positivo o nullo se $n$ è pari;
- ha lo stesso segno del radicando se $n$ è dispari.

**ESEMPIO**

**Studiamo il segno di $\sqrt[8]{2-a}$ e $\sqrt[7]{b-3}$.**

$\sqrt[8]{2-a} \rightarrow$ C.E.: $2-a \geq 0 \rightarrow a \leq 2$.

Per $a<2$, $\sqrt[8]{2-a}>0$;

per $a=2$, $\sqrt[8]{2-a}=0$.

$\sqrt[7]{b-3} \rightarrow$ C.E.: $\forall b \in \mathbb{R}$.

Per $b>3$, $\sqrt[7]{b-3}>0$;

per $b=3$, $\sqrt[7]{b-3}=0$;

per $b<3$, $\sqrt[7]{b-3}<0$.

# Proprietà invariantiva dei radicali

Due radicali sono **equivalenti** se rappresentano lo stesso numero reale.

**TEOREMA**

**Proprietà invariantiva**

Considerato un radicale il cui *radicando è positivo o nullo*, se moltiplichiamo l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale diverso da 0, otteniamo un radicale equivalente.

$$\sqrt[n]{a^p}=\sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}}, \text{ con } a \geq 0 \text{ e } m, n, p \in \mathbb{N}-\{0\}.$$

**ESEMPIO**

$\sqrt[5]{2}=\sqrt[5 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}}=\sqrt[15]{8}$;

$\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3 \cdot 2]{5^{2 \cdot 2}}=\sqrt[6]{625}$.

# Semplificazione di radicali

Un radicale con radicando positivo o nullo in cui indice ed esponente hanno un fattore comune si può **semplificare** dividendo indice e esponente per il fattore comune.

**ESEMPIO**

Semplifichiamo se possibile: $\sqrt[21]{5^{14}}$; $\sqrt[6]{121}$.

- $\sqrt[21]{5^{14}} = \sqrt[3 \cdot 7]{5^{2 \cdot 7}} = \sqrt[3]{5^2}$

  $\sqrt[3]{5^2}$ non è semplificabile perché l'indice 3 e l'esponente 2 del radicando sono numeri primi tra loro, quindi $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ è irriducibile.
- $\sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{11^2} = \sqrt[3]{11}$

  $\sqrt[3]{11}$ è irriducibile.

Se i radicali sono **espressioni letterali**, il radicale semplificato deve avere:
- le stesse condizioni di esistenza del radicale iniziale;
- lo stesso segno del radicale iniziale.

In generale:
- se $n$ è pari, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$;
- se $n$ è dispari, $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Esempi $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{8} = \boxed{2}$ è l'unico $x>0$ t.c. $x^3=8$

$\sqrt{4} = \boxed{2}$ è l'unico $x>0$ t.c. $x^2=4$

**ESEMPIO**

Il radicale $\sqrt[4]{x^4}$:
- esiste sempre, perché $x^4 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- è sempre positivo o nullo per la definizione di radice $n$-esima.

Nella semplificazione dobbiamo allora usare il valore assoluto:

$$\sqrt[4]{x^4} = |x|.$$

Se non considerassimo il valore assoluto di $x$, per ogni $x < 0$ il secondo membro dell'uguaglianza sarebbe negativo e il primo positivo, quindi l'uguaglianza sarebbe falsa.

# Semplificazione di espressioni letterali

Se indice e esponente del radicando non sono uguali, di caso in caso valutiamo se utilizzare il valore assoluto nella semplificazione.

**ESEMPIO**

**a.** $\sqrt[6]{x^8} = \sqrt[3]{x^4}$. I due radicali esistono $\forall x \in \mathbb{R}$ e sono positivi o nulli.

**b.** $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$. Entrambi i radicali esistono solo se $x \geq 0$ e sono positivi o nulli.

**c.** $\sqrt[8]{x^4} = \sqrt{|x|}$.

Abbiamo usato il valore assoluto per garantire che anche il radicale semplificato esista $\forall x \in \mathbb{R}$, come il radicale iniziale.
Entrambi i radicali sono positivi o nulli.

**d.** $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$.

I due radicali esistono $\forall x \in \mathbb{R}$; il valore assoluto è necessario per far sì che anche il secondo radicale non sia negativo.

**e.** $\sqrt[15]{x^5} = \sqrt[3]{x}$. Entrambi i radicali esistono $\forall x \in \mathbb{R}$ e hanno lo stesso segno, quello di $x$.

# Riduzione di radicali allo stesso indice

Usando la **proprietà invariantiva**, possiamo trasformare radicali con indici diversi in radicali con lo stesso indice. Di solito si usa, come indice comune, il **mcm** fra gli indici.

**ESEMPIO**

**Riduciamo allo stesso indice: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{2}$.**

Calcoliamo il minimo comune multiplo degli indici: $\text{mcm}(2; 3; 5) = 30$.

Trasformiamo ogni radicale in un radicale con indice 30, applicando la proprietà invariantiva.

Dobbiamo elevare ogni radicando all'esponente che otteniamo dividendo il mcm degli indici per l'indice del radicale da trasformare:

$\sqrt[2]{3} = \sqrt[30]{3^{15}}$; $\quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[30]{5^{10}}$; $\quad \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{6}}$.

$30 : 2 = 15 \qquad 30 : 3 = 10 \qquad 30 : 5 = 6$

# Confronto di radicali

Se due radicali hanno lo **stesso indice**, è maggiore quello che ha radicando maggiore.

Se due radicali invece **non hanno lo stesso indice**, possiamo confrontarli considerando radicali equivalenti con lo stesso indice.

**ESEMPIO**

**Confrontiamo** $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$.

Trasformiamo i radicali in radicali equivalenti che hanno come indice il minimo comune multiplo degli indici, ovvero $\text{mcm}(2; 3; 4) = 12$:

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \underline{\sqrt[12]{64}}; \quad \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \underline{\sqrt[12]{256}}; \quad \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \underline{\sqrt[12]{27}}.$$

Confrontiamo i radicali ottenuti.

$\sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{256}$ perché $27 < 64 < 256$, quindi: $\sqrt[4]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$.

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

## Potenza con esponente razionale

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{e} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} \qquad (\text{se } \frac{m}{n} > 0)$$

Esempi :

$$3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4} \qquad (a+b)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{(a+b)^3}$$

$$2^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \qquad (\frac{3}{4})^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(\frac{4}{3})^3}$$

47

- Se $a > 0$,

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a, \ \text{ e } \ b > 0.$$

- Se $a < 0$ e $n$ dispari,

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a.$$

**Fate attenzione!** Se $a > 0$ e $n$ pari, $a$ ha due radici $n$-esime: $\sqrt[n]{a}$ e $-\sqrt[n]{a}$.

Ad esempio, 4 ha due radici quadrate: $-2$ e 2, ma $\sqrt{4}$ denota sempre la radice positiva $\sqrt{4} = 2$.

Scrivere $\sqrt{4} = \pm 2$ **non è corretto!**

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^8 = \left(\sqrt[6]{3}\right)^8 = \sqrt[6]{3^8} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}}\right)^8 = 3^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8} = 3^{\frac{8}{6}} = 3^{1+\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{27} = \sqrt[12]{2^6}\,\sqrt[12]{2^4}\,\sqrt[12]{3^9} = \sqrt[12]{2^{10}3^9}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}}{\sqrt[12]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{12}}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \ \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \ \sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}} \to \text{mcm}\,(2,3,4) = 12$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6}, \ 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{2^4}, \ 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{3^9}$$

Si possono *sommare o sottrarre* solo radicali con lo stesso indice e radicando: $c\sqrt[n]{a} + d\sqrt[n]{a} = (c+d)\sqrt[n]{a}$.

$$2\sqrt{2} + \sqrt[4]{2^6} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

48

# Razionalizzazione

1° caso

Se il denominatore della frazione è un radicale quadratico irriducibile, cioè se è del tipo :

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

Il fattore razionalizzante è $\sqrt{b}$ e quindi si ha :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

49

2° caso

Se il denominatore della frazione è un radicale irriducibile di indice qualunque, cioè se è del tipo :

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$$

Il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$

e quindi si ha :

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

50

## Esempi

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$$

$$\frac{6}{5\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\sqrt[5]{2^2}}=\frac{3\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{3\sqrt[5]{4}}{2}$$

$$\frac{a^2}{8\sqrt[7]{a^4}}=\frac{a^2\sqrt[7]{a^3}}{8\sqrt[7]{a^4}\sqrt[7]{a^3}}=\frac{a^2\sqrt[7]{a^3}}{8\sqrt[7]{a^7}}=\frac{a^2\sqrt[7]{a^3}}{8a}=\frac{a\sqrt[7]{a^3}}{8}$$



3° caso

Se il denominatore della frazione è la somma algebrica di due radicali quadratici, cioè se è del tipo :

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$$

il fattore razionalizzante è $\sqrt{b}\mp\sqrt{c}$

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$$

Si applica un analogo procedimento se la frazione è del tipo :

$$\frac{a}{\sqrt{b}\pm c}=\frac{a(\sqrt{b}\mp c)}{(\sqrt{b}\pm c)(\sqrt{b}\mp c)}=\frac{a(\sqrt{b}\mp c)}{b-c^2}$$

Oppure se :

$$\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}=\frac{a(b\mp\sqrt{c})}{(b\pm\sqrt{c})(b\mp\sqrt{c})}=\frac{a(b\mp\sqrt{c})}{b^2-c}$$



Esempi

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\frac{4\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3}=\frac{4\sqrt{5}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2}=\frac{2(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

$$\frac{4}{3-\sqrt{7}}=\frac{4(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{4(3+\sqrt{7})}{9-7}=\frac{4(3+\sqrt{7})}{2}=2(3+\sqrt{7})$$

5° caso

Se, infine, il denominatore della frazione è la somma algebrica di due radicali cubici, cioè se è del tipo :

$$\frac{c}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$$

allora, ricordando i prodotti notevoli, il fattore razionalizzante è:

$$(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

$$\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{2}\,(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})}{(1+\sqrt[3]{4})(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2})} = \frac{2\,(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{2^5})}{1+4} = \frac{2\,(\sqrt[3]{2}-2+2\sqrt[3]{4})}{5}.$$

55

# Radicali doppi

Si chiama radicale quadratico doppio ogni espressione della forma :

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Esempio

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-21}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-21}}{2}} = \sqrt{\frac{5+2}{2}} + \sqrt{\frac{5-2}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \text{Razionalizzando } \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$$

E' evidente che ha senso applicare queste formule SOLO se $a^2$ - b risulta un quadrato perfetto.

56

**Esercizio 1.1.** Siano $a, b > 0$. Semplifica il più possibile le seguenti espressioni

$$(1)\ \frac{3^3+9^2}{6^2} \qquad (2)\ \frac{6^3}{6^3-3^4} \qquad (3)\ \frac{(2a+b)^2-b(b-4a)}{2ab+4b^2}$$

$$(4)\ \frac{a^2(2^3b^{-2})}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)^{-2}} - 2\left(\frac{b}{(a^2 2^{-1})^2}\right)^{-2}$$

**Esercizio 1.2.** Calcola il valore numerico delle seguenti espressioni

$$(1)\ \sqrt{7-2\sqrt{6}}\,\sqrt{7+2\sqrt{6}} \qquad (2)\ \sqrt[3]{4-4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{4+4\sqrt{5}} \qquad (3)\ \sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

**Esercizio 1.3.** Siano $a, b > 0$. Semplifica le seguenti espressioni:

$$(1)\ \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^{12}}{a^{18}}}} \qquad (2)\ \frac{\sqrt[3]{-8a^3b^{-2}}}{\sqrt[6]{64(-a)^2}} \qquad (3)\ \sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[3]{a^5}\,\sqrt[6]{a^{-2}}$$

$$(4)\ \sqrt[3]{\sqrt{ab}}\,\sqrt{a\sqrt[3]{b}} \qquad (5)\ \sqrt{4a^4+5a^2-\sqrt{a^4}} \qquad (6)\ \frac{\sqrt[4]{a^3}\,a^{-2}\,\sqrt[3]{b}}{b^{\frac{-2}{3}}\,\sqrt[4]{a}\,a^{\frac{1}{2}}}$$



**Esercizio 1.4.** Siano $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$. Raggruppare le seguenti espressioni sotto un unico radicale:

$$(1)\ \sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt[n]{a}}} \qquad (2)\ \sqrt[4]{a}\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} \qquad (3)\ a\sqrt{a}(\sqrt[3]{a})^{-2}$$

$$(4)\ \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{a}}{2\sqrt{a}}}\right)^{-3} \qquad (5)\ \frac{\sqrt[3]{-3a}}{2^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(-a)^2}} \qquad (6)\ \frac{\sqrt[n]{2}\sqrt{a^n}}{\sqrt{n}}$$

**Esercizio 1.5.** Scrivi le seguenti quantità come un'unica frazione senza radicali nel denominatore:

$$(1)\ \frac{9}{\sqrt[3]{2}\,(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} \qquad (2)\ \frac{1}{1+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad (3)\ \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$$

$$(4)\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}} \qquad (5)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{2}}$$

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.1:** (1) $3$, (2) $\frac{8}{5}$, (3) $\frac{2a}{b}$, (4) $0$

**Esercizio 1.2:** (1) $5$, (2) $-4$, (3) $1$

**Esercizio 1.3:** (1) $\frac{1}{a}$, (2) $-\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, (3) $a^2\sqrt[12]{a}$, (4) $\sqrt[3]{a^2b}$, (5) $2a\sqrt{1+a^2}$, (6) $\frac{b}{a^2}$.

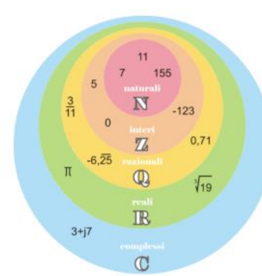
**Esercizio 1.4:** (1) $\sqrt[6n]{a^{3n+1}}$, (2) $\sqrt{a}$, (3) $\sqrt[6]{a^5}$, (4) $\sqrt[3]{8a^2}$, (5) $-\sqrt[3]{\frac{3}{4a}}$, (6) $\sqrt[2n]{\frac{4a^{n^2}}{n^n}}$

**Esercizio 1.5:** (1) $\frac{\sqrt[3]{4}\,(13+4\sqrt{10})}{2}$, (2) $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt[3]{4}-1}{4}$, (3) $2+2\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$,

(4) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{6}+1)}{10}$, (5) $-\frac{\sqrt[3]{9}+4\sqrt[3]{6}+4\sqrt[3]{4}}{13}$

59

# Numeri reali




- Naturali $(\mathbb{N})$ : $0, 1, 2, 3, \ldots$
- Interi $(\mathbb{Z})$ : $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$
- Razionali $(\mathbb{Q})$ : l'insieme dei numeri razionali è costituito da tutti quei numeri che possono essere scritti come una frazione $\frac{p}{q}$, con $p, q$ interi e $q \neq 0$.

  Calcolando l'espressione decimale di un numero razionale dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene un numero intero o un numero decimale esatto o periodico: $0.2, -0.35, 0.\hat{3} = 0.333..., 4.99\widehat{89} = 4.99898989...$

  È vero anche il reciproco: qualsiasi numero decimale di questo tipo può essere scritto come una frazione di numeri interi.

  $$2.3\hat{1} = \frac{231-23}{90} = \frac{104}{45}$$

- Irrazionali $(\mathbb{I})$ : I numeri irrazionali sono quelli che non possono essere scritti come frazioni di numeri interi. La loro espressione decimale è infinita e non periodica: $0.246810...$, $\pi = 3.1415926...$, $e = 2.7182818...$, $\sqrt{2} = 1.41421...$

  In generale, se $n \in \mathbb{N}$ non è un quadrato perfetto, $\sqrt{n}$ è irrazionale.

  Se $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{I}$, allora $a+b$ e $ab$ sono irrazionali. Perciò, numeri come $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $1-\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}\ldots$ sono irrazionali.

- Reali $(\mathbb{R})$ : l'insieme dei numeri reali è costituito dai numeri razionali e dai numeri irrazionali.

# Notazione scientifica

Un numero è in notazione scientifica se è scritto nella forma

a ∗10k

dove a è un numero reale con una sola cifra diversa da zero prima della virgola e k è un numero intero.

Un numero in **notazione scientifica** è espresso con il prodotto tra:

- un *numero decimale d* maggiore o uguale a 1 e minore di 10, detto *coefficiente*;
- una *potenza di* 10.

**ESEMPIO**

$$2{,}6 \cdot 10^{-3} \quad \text{e} \quad 5{,}4 \cdot 10^{12}$$

sono in notazione scientifica.

$$0{,}6 \cdot 10^{2} \quad \text{e} \quad 41 \cdot 10^{-3}$$

non sono in notazione scientifica perché

$0{,}6 < 1$ e $41 > 10$.

# Notazione scientifica

Per scrivere un numero in notazione scientifica, dobbiamo *spostare la virgola* fino a ottenere un numero decimale *d* tale che $1 \le d < 10$.

Se spostiamo la virgola di *n* posti:

- a sinistra, la potenza di 10 per cui viene moltiplicato *d* è $10^{n}$;
- a destra, la potenza di 10 per cui viene moltiplicato *d* è $10^{-n}$.

**ESEMPIO**

$3\,240\,000 = 3{,}24 \cdot 10^{6}$

virgola a sinistra di 6 posti

$0{,}000038 = 3{,}8 \cdot 10^{-5}$

virgola a destra di 5 posti

# LOGICA

Un **enunciato** logico, o **proposizione**, è una frase a cui possiamo attribuire con certezza un valore di verità:
o **vero** (V), oppure **falso** (F).

**ESEMPIO**
Sono enunciati logici:
*A*: «2 + 3 = 5», cha ha valore di verità V,
*B*: «Napoleone è nato nel 2009», cha ha valore di verità F.

**Non** è un enunciato logico:
«Meglio le vacanze al mare che al lago».

# Negazione

Dato un enunciato *A*, la **negazione** di *A* è l'enunciato che è vero se *A* è falso, è falso se *A* è vero.

La indichiamo con $\overline{A}$, che leggiamo «non *A*».

TAVOLA DI VERITÀ

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

# Congiunzione

Dati gli enunciati *A* e *B*, la **congiunzione** di *A* e *B* è l'enunciato che è vero se *A* e *B* sono entrambi veri, altrimenti è falso.

Lo indichiamo con $A \wedge B$ , che leggiamo «*A* e *B*».

TAVOLA DI VERITÀ

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

# Disgiunzione inclusiva

Dati gli enunciati *A* e *B*, la **disgiunzione inclusiva** di *A* e *B* è l'enunciato che è falso se *A* e *B* sono entrambi falsi, altrimenti è vero.

Lo indichiamo con $A \vee B$, che leggiamo «*A* o *B*».

TAVOLA DI VERITÀ

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

# Disgiunzione esclusiva

Dati gli enunciati *A* e *B*, la **disgiunzione esclusiva** di *A* e *B* è l'enunciato che è vero se è *A* vero e *B* falso oppure se è *A* falso e *B* vero, altrimenti è falso.

Lo indichiamo con $A \dot{\vee} B$ , che leggiamo «o *A* o *B*».

TAVOLA DI VERITÀ

| $A$ | $B$ | $A \dot{\vee} B$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

# BIBLIOGRAFIA


- Bergamini, Barozzi *Matematica multimediale* © Zanichelli 2019-2020
- Pellery, 2006 – *Algebra* – SEI
- Leonardo Sasso, Claudio Zanone *Colori della matematica* Petrini
- Vacca, Artuso, Barreca, 2005 - *Progetto modulare di algebra* - ed. Atlas