

**Programma provvisorio del corso di Matematica Discreta**  
**Corso di Laurea in I.T.P.S. (Triennale)**  
**A.A. 2016–2017**  
**Dott. Vincenzo C. Nardoza**

*Obiettivi Formativi:* Acquisizione di nozioni di base per i successivi corsi, come formalismo logico, sistemi numerici, matrici, strutture astratte, grafi.

*Obiettivi Professionalizzanti:* Acquisizione di tecniche della matematica del discreto che possono essere utilizzate concretamente per modellare e risolvere problemi di natura informatica.

Contenuto del Programma:

(1) **Concetti di base.**

Operazioni elementari tra insiemi (unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano). Confronto tra insiemi (inclusione, uguaglianza). Gli insiemi numerici  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ . Proprietà delle operazioni elementari tra insiemi, leggi di De Morgan, complemento insiemistico. Coppie ordinate e prodotto cartesiano. Logica proposizionale, tavole di verità, connettivi logici. Contraddizione e tautologia. Relazione tra insiemistica e logica.

Relazioni. Funzioni. Funzioni iniettive e suriettive. Composizione di funzioni. Funzioni invertibili. Modelli di rappresentazione delle funzioni: tramite diagrammi di Venn, doppia riga, parole, occupazione. Interpretazione di iniettività e suriettività per ciascun modello. Principio di induzione matematica. Relazioni di equivalenza. Relazione di uguaglianza e relazione banale. Classi di equivalenza. Insieme quoziente. Trasversale. Proiezione canonica. Relazioni di ordine. Catene e ordine totale. Principio di buon ordinamento e insiemi ben ordinati.

(2) **Gli interi.**

Richiami sulle operazioni in  $\mathbb{Z}$ . Valore assoluto. Divisione euclidea. Divisibilità tra interi. MCD tra interi. Algoritmo euclideo per il MCD. Identità e coefficienti di Bezout. Tabella per il calcolo dei coefficienti di Bezout. Equazioni lineari diofantee. Numeri primi. Crivello di Eratostene. Teorema fondamentale dell'aritmetica. Elementi coprimi.

(3) **Elementi di calcolo combinatorio.**

Cardinalità di un insieme. Insiemi finiti. Tecniche elementari di enumerazione: principio della somma e del prodotto. Numero dei divisori di un intero assegnato. Cardinalità dell'insieme delle parti. Disposizioni semplici e con ripetizione. Permutazioni. Fattoriale. Numero di permutazioni su un insieme finito. Combinazioni semplici. Coefficiente binomiale e sue proprietà. Triangolo di Tartaglia. Formula analitica per il binomiale. Principio di Inclusione-Esclusione. Combinazioni con ripetizione. Principio dei cassetti semplice e generalizzato.

(4) **Aritmetica modulare.**

Congruenza modulo  $n$ . Inverso aritmetico modulo  $n$ . Congruenze Lineari. Prima formulazione del Teorema Cinese dei Resti. Trasversale canonico di  $\mathbb{Z}_n$ . Operazioni in  $\mathbb{Z}_n$ . Unità e divisori dello zero in  $\mathbb{Z}_n$ . Determinazione dell'inverso di un'unità di  $\mathbb{Z}_n$ . Funzione di Eulero. Teorema di Fermat-Eulero. Criteri di Divisibilità. Equazioni lineari in  $\mathbb{Z}_n$ . Cenni sulla crittografia a chiave pubblica. RSA.

(5) **Strutture algebriche astratte.**

**Gruppi.** Omomorfismi di gruppi. Nucleo e immagine di un omomorfismo di gruppi. Caratterizzazione dell'iniettività tramite il nucleo di un omomorfismo tra gruppi. Elementi periodici e aperiodici di un gruppo. Periodo di un elemento periodico e sue proprietà. Teorema di Lagrange per un gruppo abeliano finito. Struttura di un gruppo ciclico.

**Anelli.** Omomorfismi di anelli. Nucleo e immagine di un omomorfismo di anelli. Caratterizzazione dell'iniettività tramite il nucleo di un omomorfismo. Sottoanelli e ideali. Anelli quoziente modulo un ideale. Elementi invertibili in un anello. Unicità dell'inverso in un anello. Campi.

**Prodotti diretti.** Prodotti diretti di gruppi. Prodotti diretti di anelli. Seconda formulazione del Teorema Cinese dei Resti.

(6) **Gruppi simmetrici.** Gruppo delle permutazioni di un insieme finito. Orbite e cicli di una permutazione. Segno di una permutazione. Decomposizione di una permutazione in cicli disgiunti. Periodo di una permutazione

- (7) **Matrici e sistemi lineari.** Matrici. Matrici a coefficienti in un anello commutativo con unità. Operazioni tra matrici. Matrici quadrate. Trasformazioni elementari sulle righe di una matrice. Riduzione a forma normale di una matrice. Rango di una matrice. Teorema di Rouchè-Capelli. Sistemi lineari e metodo di riduzione di Gauss. Matrici invertibili. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile. Determinante di una matrice e sue proprietà.

- (8) **Reticoli e algebre di Boole**

**Funzioni booleane** Variabili booleane e funzioni booleane. Loro proprietà. Forma normale disgiuntiva. Forme minimali e mappa di Karnaugh.

**Reticoli** Omomorfismi e isomorfismi di posets. Massimo, minimo, elementi massimali, elementi minimali, maggioranti e minoranti, estremo superiore e estremo inferiore in un poset. Reticolo. Sottoreticoli. Omomorfismi e isomorfismi tra reticoli. Reticoli distributivi. Diamante e pentagono. Reticoli limitati. Reticoli complementati. Reticoli di Boole.

**Algebre di Boole** Assiomi di un'algebra di Boole. Atomi. Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole finite.

- (9) **Elementi di Teoria dei Grafi.**

Terminologia: Grafi semplici, diretti, grado, ordine, percorso, cammino, arco, ciclo. Primo teorema della teoria dei grafi. Classi notevoli di grafi: grafi vuoti, grafi completi, grafi regolari, grafi bipartiti, grafi bipartiti completi. Grafi connessi. Caratterizzazione dei grafi bipartiti. Grafi euleriani ed hamiltoniani. Teorema di Eulero. Problema dei ponti di Königsberg. Problemi sulla scacchiera. Alberi. Caratterizzazioni di un albero. Grafi pesati. Albero generatore di un grafo connesso. Algoritmo di Kruskal. Grafi planari. Proiezione stereografica. Isomorfismo di grafi e sottografi. Matrici di adiacenza e di incidenza di un grafo. Grafi planari. Grafi poligonali. Formula di Eulero. Non planarità di  $K_{3,3}$  e non risolubilità del problema dei servizi. Non planarità di  $K_5$ .

**Testo adottato:** G.M. Piacentini Cattaneo, "Matematica Discreta e applicazioni", Zanichelli Editore (2008).

**Testi consigliati:**

M. Bianchi, A. Gillio, "Introduzione alla Matematica Discreta", McGraw-Hill Editore, Seconda Edizione (2005)