Capitolo 4

Materiale didattico integrativo

L'analisi della varianza con due fattori (ANOVA a due vie)

Sommario

1. Gli effetti dei fattori nel caso di due fattori sperimentali: effetti principali e di interazione

Facciamo riferimento al caso di studio del Capitolo 4 e consideriamo, oltre alla temperatura, anche la quantità dell'additivo (espressa in percentuale rispetto alla quantità del materiale di lavorazione) che viene aggiunto al materiale di lavorazione e che favorisce la biodegradabilità dello shopper. Si stabiliscono 2 livelli per questo fattore:

LIVELLO 1: quantità 2%

LIVELLO 2: quantità 3%

Indichiamo come fattore A l'additivo e come fattore B la temperatura. In corrispondenza, indichiamo con a e b, rispettivamente, il numero dei livelli del fattore A e del fattore B. In questo caso a=2 e b=3 (v. caso di studio del Capitolo 4 e la Tabella 1).

Combinando i livelli del fattore A con quelli del fattore B, si hanno in tutto $a \times b$ combinazioni dei livelli che corrispondono ai trattamenti.

Si parla di **esperimento fattoriale completo** quando vengono considerati nell'esperimento tutti gli $a \times b$ trattamenti e cioè tutte le combinazioni dei livelli dei fattori. Per ogni trattamento si procede ad un certo numero n di prove sperimentali (n replicazioni), secondo il disegno randomizzato bilanciato. Si hanno pertanto in totale $n \times a \times b$ prove sperimentali (unità sperimentali) e quindi $n \times a \times b$ valori della variabile risposta, lo spessore dello shopper (in micron).

La conduzione corretta dell'esperimento garantisce che, all'interno di ogni trattamento, la variabilità della variabile risposta rifletta esclusivamente l'effetto di perturbazioni accidentali.

La Tabella 1 mostra le assunzioni relative all'esperimento con due fattori. Come si vede, abbiamo in tutto $(a+1) \times (b+1)$ popolazioni:

- $a \times b$=2×3=6 popolazioni corrispondenti ai possibili trattamenti;
- a=2 popolazioni corrispondenti ai livelli del fattore A senza considerare i tre livelli del fattore B (distribuzione marginale del fattore A; v. ultima colonna);
- b=3 popolazioni corrispondenti ai livelli del fattore B senza considerare i due livelli del fattore A (distribuzione marginale del fattore B; v. ultima riga);
- la popolazione complessiva della Y che risulta dalla *mistura* di tutte le $a \times b$ popolazioni (v. cella ultima a destra in basso).

Tabella 1 – Popolazioni dell'esperimento dell'esempio

Fattore A (% additivo)	Fattore B (Temperatura)			**Distribuzione marginale**
	Bassa (livello 1)	Media (livello 2)	Alta (livello 3)	
2% (livello 1)	$N(\mu_{11};\sigma^2)$	$N(\mu_{12};\sigma^2)$	$N(\mu_{13};\sigma^2)$	$N(\mu_{1\cdot};\sigma^2)$
3% (livello 2)	$N(\mu_{21};\sigma^2)$	$N(\mu_{22};\sigma^2)$	$N(\mu_{23};\sigma^2)$	$N(\mu_{2\cdot};\sigma^2)$
Distribuzione marginale	$N(\mu_{\cdot 1};\sigma^2)$	$N(\mu_{\cdot 2};\sigma^2)$	$N(\mu_{\cdot 3};\sigma^2)$	$N(\mu;\sigma^2)$

Le medie che compaiono nella tabella sopra, nel caso di disegno bilanciato sono:

$$\mu_{i\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij} \qquad \mu_{\cdot j} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{ij} \qquad \mu = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{i\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\mu_{\cdot j}$$

Indichiamo con Y_{ijk} la variabile casuale che rappresenta la variabile risposta in corrispondenza della prova k-esima (k=1,…,n) per il trattamento (i,j). Il modello generale è:

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{1}$$

con $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij};\sigma^2)$

Il parametro μ_{ij} è la parte sistematica mentre $Y_{ijk} - \mu_{ij} = \varepsilon_{ijk} \sim N(0;\sigma^2)$ è l'errore sperimentale.

In relazione ad un esperimento di questo tipo, consideriamo cinque diverse situazioni che corrispondono a differenti specificazione di μ_{ij} della (1).

Caso 1. I due fattori non hanno alcun effetto.

Caso 2. E' presente solo l'effetto del fattore riga.

Caso 3. E' presente solo l'effetto del fattore colonna.

Caso 4. E' presente l'effetto **additivo** dei due fattori.

Caso 5. E' presente l'effetto additivo e quello di **interazione** fra i due fattori.

Tali situazioni vengono di seguito formalizzate e rappresentate graficamente con riferimento ad un semplice esempio numerico. Verrà in particolare impiegato il grafico delle medie dei trattamenti in cui:

i) in ascissa sono riportati i livelli del fattore B (si ricorda che i livelli sono da intendersi misurati su scala nominale e quindi non è importante il loro ordinamento sull'asse ai fini dell'interpretazione dei diagrammi)[1];

ii) in ordinata viene riportata la media della variabile risposta per ogni trattamento μ_{ij};

iii) per ogni livello i del fattore A è tracciata una spezzata congiungente le medie μ_{ij}, $j=1,\ldots,b$.

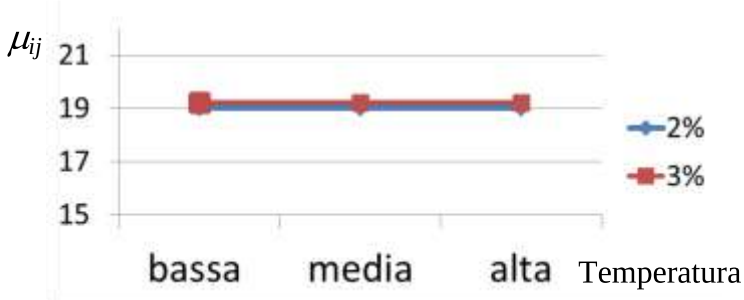
Caso 1. I due fattori non hanno alcun effetto.

Tutte le medie corrispondenti ai trattamenti sono uguali fra loro e uguali alle medie marginali e alla media generale.

Tabella delle medie

Quantità sostanza S	Temperatura			Marginale
	bassa	media	alta	
2%	19	19	19	19
3%	19	19	19	19
Marginale	19	19	19	19

Grafico delle medie



In tal caso vale $\mu_{ij} = \mu$ per cui, sostituendolo nella (1), si ricava:

$$(Y_{ijk} - \mu) = \varepsilon_{ijk} \tag{2}$$

La variabilità intorno alla media generale è dovuta solo a fattori accidentali (errore sperimentale).

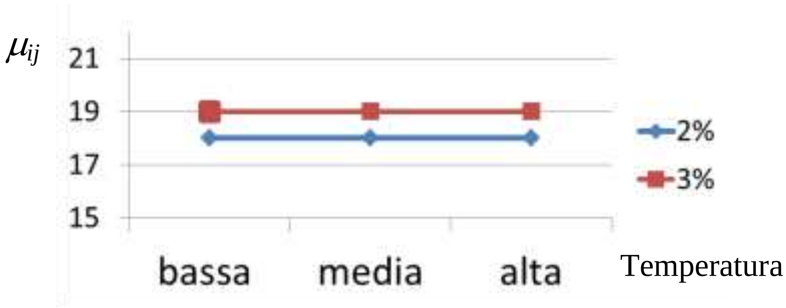
Caso 2. E' presente solo l'effetto del fattore riga (effetto principale del fattore riga).

Tabella delle medie

Quantità sostanza S	Temperatura			Marginale
	bassa	media	alta	
2%	18	18	18	18
3%	19	19	19	19
Marginale	18.5	18.5	18.5	18.5

[1] Dei due fattori, conviene riportare in ascissa quello col maggior numero di livelli (in questo caso il fattore B che ha 3 livelli mentre il fattore A ne ha 2).

Grafico delle medie



In tal caso vale: $\mu_{ij} = \mu + (\mu_{i}. - \mu)$ per cui, sostituendolo nella (1), si ha:

$$(Y_{ijk} - \mu) = (\mu_{i}. - \mu) + \varepsilon_{ijk} \tag{3}$$

La variabilità intorno alla media generale è dovuta:

i) a fattori accidentali (errore sperimentale);

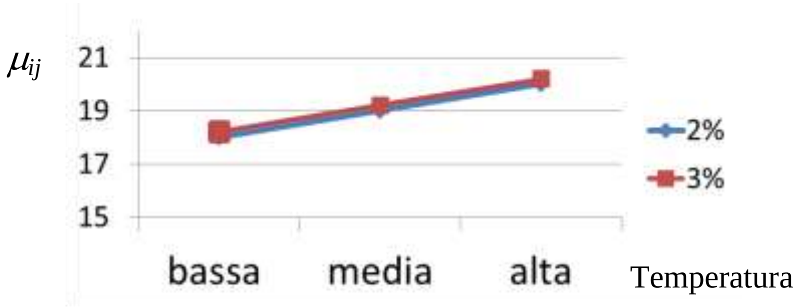
ii) all'effetto sistematico del fattore riga: $(\mu_{i}. - \mu) \neq 0$ per almeno un *i*.

Caso 3. E' presente solo l'effetto del fattore colonna (effetto principale del fattore colonna).

Tabella delle medie

Quantità sostanza S	Temperatura			Marginale
	bassa	media	alta	
2%	18	19	20	19
3%	18	19	20	19
Marginale	18	19	20	19

Grafico delle medie



In tal caso vale: $\mu_{ij} = \mu + (\mu._{j} - \mu)$ per cui, sostituendolo nella (1), si ha:

$$(Y_{ijk} - \mu) = (\mu._{j} - \mu) + \varepsilon_{ijk} \tag{4}$$

La variabilità intorno alla media generale è dovuta:

i) a fattori accidentali (errore sperimentale);

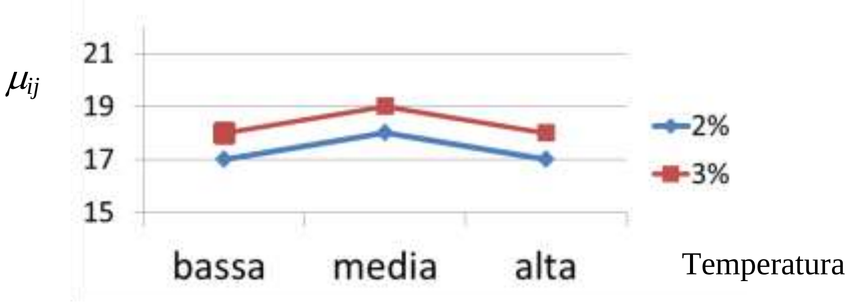
ii) all'effetto sistematico del fattore colonna: $(\mu._{j} - \mu) \neq 0$ per almeno un *j*.

Caso 4. E' presente l'effetto **additivo** dei due fattori (effetti principali dei due fattori).

Tabella delle medie

Quantità sostanza S	Temperatura			Marginale
	bassa	media	alta	
2%	17.0	18.0	17.0	17.3
3%	18.0	19.0	18.0	18.3
Marginale	17.5	18.5	17.5	17.8

Grafico delle medie



In tal caso vale: $\mu_{ij} = \mu + (\mu_{i}.-\mu) + (\mu._{j} - \mu)$ per cui, sostituendolo nella (1), si ha:

$$(Y_{ijk} - \mu) = (\mu_{i}.-\mu) + (\mu._{j} - \mu) + \varepsilon_{ijk} \tag{5}$$

La variabilità intorno alla media generale è dovuta:

i) a fattori accidentali (errore sperimentale);

ii) all'effetto sistematico del fattore riga: $(\mu_{i}.-\mu)\neq 0$ per almeno un i

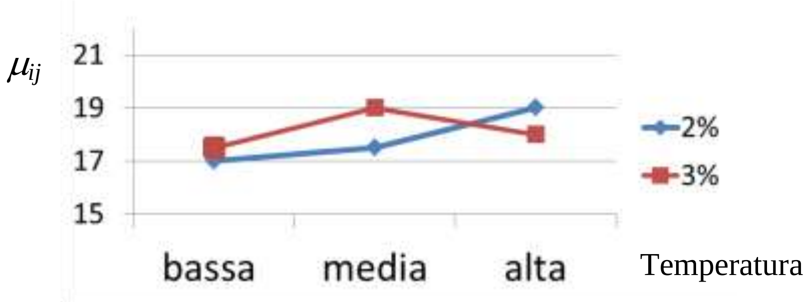
iii) all'effetto sistematico del fattore colonna: $(\mu._{j} - \mu)\neq 0$ per almeno un j.

Caso 5. E' presente anche l'effetto di **interazione** fra i due fattori.

Tabella delle medie

Quantità sostanza S	Temperatura			Marginale
	bassa	media	alta	
2%	17.0	17.5	19.0	17.8
3%	17.5	19.0	18.0	18.2
Marginale	17.3	18.3	18.5	18.0

Grafico delle medie



In tal caso vale: $\mu_{ij} = \mu + (\mu_{i}. - \mu) + (\mu._{j} - \mu) + [(\mu_{ij} - \mu_{i}.) - (\mu._{j} - \mu)]$ per cui, sostituendolo nella (1), si ha:

$$\left(Y_{ijk} - \mu\right) = (\mu_{i}. - \mu) + (\mu._{j} - \mu) + [(\mu_{ij} - \mu_{i}.) - (\mu._{j} - \mu)] + \varepsilon_{ijk} \qquad (6)$$

La variabilità intorno alla media generale è dovuta:

i) a fattori accidentali (errore sperimentale);

ii) all'effetto sistematico del fattore riga: $(\mu_{i}. - \mu) \neq 0$ per almeno un *i*

iii) all'effetto sistematico del fattore colonna: $(\mu._{j} - \mu) \neq 0$ per almeno un *j*;

iv) all'effetto di interazione: $(\mu_{ij} - \mu_{i}.) - (\mu._{j} - \mu) \neq 0$ per almeno un trattamento (*i*,*j*).

Nel caso di due fattori, lo sperimentatore è interessato quindi a indagare i seguenti effetti.

1) Se il fattore A produce un effetto sistematico. Ciò riguarda i valori delle medie dell'ultima colonna relative ai livelli del fattore A. Ci si chiede cioè se le medie sono uguali e si parla di **effetto principale** del fattore A (del fattore riga o effetto riga). Se $(\mu_{i}. - \mu) \neq 0$ per almeno un livello *i* significa che è presente l'effetto del fattore A.
2) Se il fattore B produce un effetto sistematico. Ciò riguarda i valori delle medie dell'ultima riga relative ai livelli del fattore B. Ci si chiede cioè se le medie sono uguali e si parla di effetto principale del fattore B (del fattore colonna o effetto colonna). Se $(\mu._{j} - \mu) \neq 0$ per almeno un livello *j* significa che è presente l'effetto del fattore B.
3) Se un qualche effetto deriva dall'avere impiegato congiuntamente i due fattori. Questo effetto è detto **interazione** fra i due fattori. Se $(\mu_{ij} - \mu_{i}.) - (\mu._{j} - \mu) \neq 0$ per almeno un trattamento (*i*,*j*) significa che è presente l'effetto di interazione

In corrispondenza dei 3) tipi di effetti, si sottopongono a verifica le seguenti ipotesi nulle.

1) H_0: $(\mu_{i}. - \mu) = 0$ *per ogni i* (assenza effetto principale del fattore A)
H_1: $(\mu_{i}. - \mu) \neq 0$ *per almeno un i*

2) H_0: $(\mu._{j} - \mu) = 0$ *per ogni j* (assenza effetto principale del fattore B)
H_1: $(\mu._{j} - \mu) \neq 0$ *per almeno un j*

3) H_0: $(\mu_{ij} - \mu_{i}.) - (\mu._{j} - \mu) = 0$ *per ogni trattamento* (*i*,*j*) (assenza di interazione)
H_1: $(\mu_{ij} - \mu_{i}.) - (\mu._{j} - \mu) \neq 0$ *per almeno un trattamento* (*i*,*j*)

E' inoltre possibile formulare un test globale sull'assenza simultanea di tutti i tre tipi di effetti (i due effetti principali e quello di interazione):

4) H_0: $(\mu_{ij} - \mu) = 0$ *per ogni trattamento* (i,j) (assenza di effetti dei trattamenti)
   H_1: $(\mu_{ij} - \mu) \neq 0$ *per almeno un trattamento* (i,j)

Indicando con y_{ijk} il valore osservato per la variabile risposta in corrispondenza della prova *k*-esima del trattamento (i,j), si scrive seguendo la (6) la scomposizione dei valori osservati:

$$\left(y_{ijk} - \bar{y}\right) = (\bar{y}_{i}. - \bar{y}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}) + (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i}. - \bar{y}_{.j} + \bar{y}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij}) \qquad (7)$$

dove, nel disegno bilanciato, è:

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}_{i}. = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \bar{y}_{ij} = \frac{1}{nb}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \bar{y}._{j} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{ij} = \frac{1}{na}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{nab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$$

Dalla (7), per le proprietà della media aritmetica, si ricava[2]:

$$\sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}\right)^2 = \sum_{ijk}\left(\bar{y}_{i}. - \bar{y}\right)^2 + \sum_{ijk}(\bar{y}._{j} - \bar{y})^2 + \sum_{ijk}(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i}. - \bar{y}._{j} + \bar{y})^2 + \sum_{ijk}\left(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij}\right)^2$$

che riscriviamo in sigle come:

sst=ssbr + ssbc + sster+ssw *(8)*

dove:

sst= $\sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}\right)^2$ è la devianza totale di tutti i *nab* valori

ssbr = $\sum_{ijk}\left(\bar{y}_{i}. - \bar{y}\right)^2 = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{y}_{i}. - \bar{y}\right)^2$ è la devianza fra (*between*) le medie di riga

ssbc = $\sum_{ijk}\left(\bar{y}._{j} - \bar{y}\right)^2 = an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{y}._{j} - \bar{y}\right)^2$ è la devianza fra (*between*) le medie di colonna

sster= $\sum_{ijk}(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i}. - \bar{y}._{j} + \bar{y})^2$ è la devianza dovuta all'interazione fra i due fattori

ssw = $\sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{ij}\right)^2$ è la devianza interna ai trattamenti (devianza residua di questo modello) che contiene solo gli effetti di cause accidentali.

[2] Per semplicità si esprime in modo compatto la sommatoria rispetto a *i, j, k* .

Inoltre:

sstrat=(ssbr + ssbc + sster) = $\sum_{ijk}\left(\bar{y}_{ij}-\bar{y}\right)^2$

è la devianza fra le medie di tutti i trattamenti.

Si sottolinea che la grandezza *ssw* può **essere calcolate soltanto se *n*>1** e cioè se si hanno più di una replicazione per trattamento (*i*,*j*). Inoltre, dalla devianza interna *ssw* si ricava la stima da stimatore corretto (sia sotto H_0 sia sotto H_1) di σ^2 è:

$$msw=\frac{ssw}{ab(n-1)} \qquad (9)$$

Dalle grandezze *ssbr, ssbc, sster, ssw* e *sstrat* si ricavano i dati per la conduzione dei test delle ipotesi sopra indicati. In corrispondenza di ognuno dei test 1)-4) indichiamo qui di seguito le grandezze utilizzate.

In assenza degli effetti via via specificati in 1)-4) (ovvero se H0 è vera), si ha:

1) $F_{[1],oss}=\dfrac{\dfrac{ssbr}{a-1}}{\dfrac{ssw}{ab(n-1)}}$ è la determinazione di una v.c *F* di Fisher con (a–1),(nab–ab) g.d.l.

2) $F_{[2],oss}=\dfrac{\dfrac{ssbc}{b-1}}{\dfrac{ssw}{ab(n-1)}}$ è la determinazione di una v.c *F* di Fisher con (b–1),(nab–ab) g.d.l.

3) $F_{[3],oss}=\dfrac{\dfrac{sster}{(a-1)(b-1)}}{\dfrac{ssw}{ab(n-1)}}$ è la determinazione di una v.c *F* di Fisher con ((a–1)(b–1)),(nab–ab) g.d.l.

Infine, con riferimento alla verifica simultanea di tutte e tre le ipotesi (assenza di effetti principali e di interazione) si usa:

4) $F_{[4],oss}=\dfrac{\dfrac{sstrat}{ab-1}}{\dfrac{ssw}{ab(n-1)}}$ è la determinazione di una v.c *F* di Fisher con (ab–1),(nab–ab) g.d.l.

La statistica test è costruita rapportando (numeratore) una grandezza che può contenere gli effetti dei fattori (oltre agli effetti dell’errore sperimentale), ad una grandezza (denominatore) che contiene solo gli effetti dell'errore sperimentale (qualunque sia l'ipotesi vera), che è la stima della varianza dell'errore sperimentale.

In tutti i casi, il ragionamento da fare per il rifiuto dell'ipotesi nulla rimane quello illustrato nel Paragrafo 4.2.4 del testo per l'ANOVA a una via: la zona di rifiuto è collocata per valori elevati della v.c. *F* di Fisher.

Analogamente all'ANOVA a una via si ottiene anche in questo caso una tavola dell'ANOVA come la seguente.

Tabella 2 – Tavola dell'ANOVA nel modello con interazione

Effetti	Devianza	Gradi di libertà	Varianza	F osservato	*p-value (p-level)*
Fattore riga	*ssbr*	$a-1$	*msbr*=*ssbr*/(a–1)	*msbr/msw*	
Fattore colonna	*ssbc*	$b-1$	*msbc*=*ssbc*/(b–1)	*msbc/msw*	
Interazione	*sster*	$(a-1)(b-1)$	*mster*=*sster*/((a–1)(b–1))	*mster/msw*	
Totale trattamenti	*sstrat*	*ab–1*	*mstrat*=*sstrat*/(*ab*–1)	*mstrat/msw*	
Interna (residua)	*ssw*	*nab–ab*	*msw*=*ssw*/(*nab*–*ab*)		
Totale	*sst*	*nab*–1			

Tuttavia, come illustrato in Tabella 4, si può seguire uno schema gerarchico nella verifica delle ipotesi.

In particolare (v. punto iii della Tabella 4), se l'interazione non risulta significativa (l'ipotesi nulla per il test 3 non viene rifiutata), è ragionevole ipotizzare il modello a soli effetti principali che è (v. Caso 4):

$$\left(Y_{ijk}-\mu\right)=(\mu_{i}.-\mu)+(\mu._{j}-\mu)+\varepsilon_{ijk} \tag{10}$$

In corrispondenza si avrà la seguente scomposizione sui dati osservati:

$$\left(y_{ijk}-\bar{y}\right)=(\bar{y}_{i}.-\bar{y})+(\bar{y}._{j}-\bar{y})+(y_{ijk}-\bar{y}_{i}.-\bar{y}._{j}+\bar{y}) \tag{11}$$

Nel caso di assenza di interazione, la grandezza $(\bar{y}_{i}.-\bar{y})+(\bar{y}._{j}-\bar{y})$ ingloba gli eventuali effetti dei fattori (effetti additivi) mentre la componente accidentale è espressa da $(y_{ijk}-\bar{y}_{i}.-\bar{y}._{j}+\bar{y})$.

La scomposizione della devianza sarà allora:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}_{i}.-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{y}._{j}-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{i}.-\bar{y}._{j}+\bar{y})^2 \tag{12}$$

ovvero:

sst=ssbr + ssbc + ssres

Si noti che *ssres=sster+ssw* della scomposizione (8). In pratica, poiché l'effetto di interazione non è risultato significativo, esso viene attribuito a cause accidentali (all'errore sperimentale) e quindi inglobato nel residuo del modello.

Il modello a soli effetti additivi è un modello più parsimonioso (con un minor numero di parametri) rispetto a quello che contiene anche l'interazione. Di conseguenza, la stima di σ^2 sarà più efficiente perché basata su un maggiore numero di osservazioni: precisamente, alla devianza di errore sono associati $nab–a–b+1$ gradi di libertà, anziché $nab–ab$ del modello con interazione[3]. La stima di σ^2 è in questo caso data da *msres* (v. Tabella 3).

La scomposizione della devianza e i relativi test delle ipotesi per il modello a soli effetti principali sono descritti nella Tabella 3. Si tratta in pratica di mettere a verifica solo le ipotesi relative agli effetti principali dei due fattori.

Tabella 3 – Tavola dell'ANOVA nel modello a soli effetti principali (effetti additivi)

Effetti	Devianza	Gradi di libertà	Varianza	F osservato	*p-value (p-level)*
Fattore riga	*ssbr*	$a–1$	*msbr=ssbr/*(a–1)	*msbr/msres*	
Fattore colonna	*ssbc*	$b–1$	*msbc =ssbc/*(b–1)	*msbc/msres*	
Residua	*ssres*	$nab–a–b+1$	*msres= ssres/*($nab–a–b+1$)		
Totale	*sst*	$nab–1$	*sst/*($nab–1$)		

Tabella 4 – Fasi dell'ANOVA con due fattori sperimentali

Fasi per condurre un'ANOVA con due fattori sperimentali	
i)	Effettuare il test 4). Se l'ipotesi non viene rifiutata si può passare alla conduzione di un esperimento con altri trattamenti. Ma se si ritiene che gli effetti, corrispondenti ai trattamenti scelti nell'esperimento, siano presenti e che il test non sia stato in grado di metterlo in evidenza: (1) si potrà aumentare *n* per ottenere una stima più precisa di σ^2 oppure (ii) si potrà condurre un esperimento con gli stessi trattamenti ma includendo altri fattori, se si pensa che ci siano fattori intervenienti che non sono stati considerati;. Se invece l'ipotesi nulla relativa al test 4) viene rifiutata, allora, si passa alla fase ii).
ii)	Effettuare il test 3) relativo all'interazione. Se l'ipotesi di assenza di interazione non viene rifiutata, si procede al passo iii) altrimenti si passa alla fase iv).
iii)	Si passa ad un modello a soli effetti additivi. Si effettuano i due test sugli effetti principali dei due fattori. Se si rifiuta una o ambedue le ipotesi di assenza di effetti, si passa alla fase iv.
iv)	Si passa alle analisi *post-hoc* per le medie relative ad ogni coppia di trattamenti (medie μ_{ij}) se l'interazione è presente (v. punto ii). Si passa all'analisi post hoc per coppie di medie separatamente per i fattori (medie $\mu_{i.}$ e $\mu_{.j}$) se sono presenti solo gli effetti principali (v. punto iii).

[3] Come si vede, i gradi di libertà associati alla componente residua sono la somma dei gradi di libertà che nel modello completo erano associati a *ssw* e a *sster*.

Vediamo ora una esemplificazione. Si tratta di un modello completo: con effetti principali e di interazione. Un esempio di modello con i soli effetti principali verrà presentato più avanti quando si parlerà del controllo locale (v. Paragrafo seguente).

I dati relativi all'esperimento, sempre riferito agli shoppers biodegradabili sono riportati nella Tabella 5. Le replicazioni per ogni trattamento sono n=4 per un totale di nab=24 unità, dove a=2 livelli del fattore riga (% di sostanza aggiunta: 2% e 3%) e b=3 livelli del fattore B (temperatura: bassa, media, alta).

Le medie per ogni trattamento e quelle marginali di riga e colonna nonché la media generale sono riportate in Tabella 6.

Il grafico di Figura 1 mostra la probabile presenza sia degli effetti dei due fattori sia dell'interazione. Riguardo a quest'ultima, infatti, si noti che al variare della temperatura da Media a Alta, lo spessore medio aumenta col livello 3% mentre diminuisce col livello 2%.

La tavola dell'ANOVA (Tabella 7) mostra che sia gli effetti principali sia l'interazione sono statisticamente significativi, posto il livello α=0.05. I *p-value*, infatti, sono tutti minori di 0.05. Si ricava, inoltre, una stima della varianza di errore pari a circa 0.010.

Tabella 5 – Dati dell'esempio (spessore in micron)

Fattore A sostanza aggiunta (%)	Fattore B (temperatura)		
	Bassa	Media	Alta
2%	18.4	18.8	19.0
	18.5	18.7	18.9
	18.5	18.9	18.9
	18.6	18.9	18.9
3%	18.8	19.0	19.1
	18.9	19.1	19.2
	19.0	19.2	19.0
	18.9	19.1	18.8

Tabella 6 – Medie dei trattamenti (spessore in micron)

Fattore A sostanza aggiunta (%)	Fattore B (temperatura)			Marginale
	Bassa	Media	Alta	
2%	18.500	18.825	18.925	18.750
3%	18.900	19.100	19.025	19.008
Marginale	18.700	18.963	18.975	18.879

Figura 1 – Grafico delle medie dei trattamenti dell'esempio in Tabelle 5 e 6

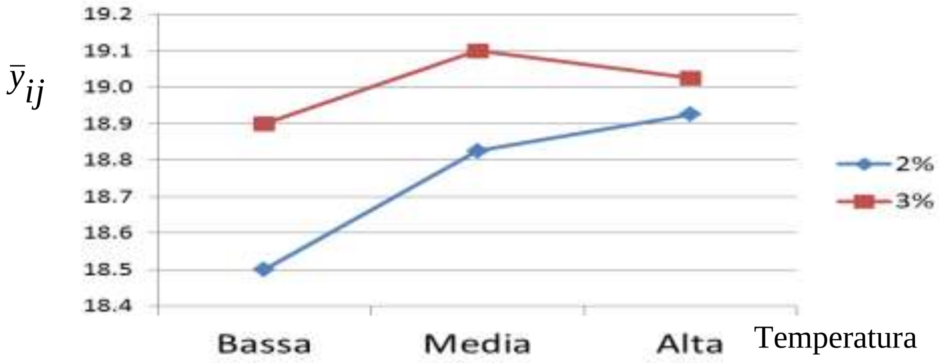


Tabella 7 – ANOVA *table* relativa ai dati di Tabella 5

Effetti	Devianza	gdl	Varianza	F oss.	*p-value*
Fattore riga (% sostanza aggiunta)	0.4004	1	0.40042	39.493	0.000006
Fattore colonna (temperatura)	0.3858	2	0.19292	19.027	0.000036
Interazione fra fattori	0.0908	2	0.04542	4.479	0.026371
Totale trattamenti	0.8771	5	0.17542	17.301	0.000003
Devianza interna	0.1825	18	0.01014		
Devianza totale	1.0596	23			

2. Il controllo locale: il fattore blocco

Talvolta, nella conduzione di un esperimento, oltre ai fattori oggetto di studio possono agire cause sistematiche collaterali ad opera di fattori dei quali non interessa esaminare gli effetti e che non interagiscono coi fattori sperimentali (assenza di interazione), ma che comunque influenzano il valore della variabile risposta. Si tratta di fattori detti **sub-sperimentali**. Diventa necessario in questi casi identificare ed isolare gli effetti di questi fattori che, altrimenti, rischierebbero di essere compresi (erroneamente) in quella che risulta essere la componente di errore del modello determinando una sovrastima dei suoi effetti (sovrastima della varianza dell'errore e quindi del denominatore dell'F di Fisher relativo ai vari test).

In pratica, il fattore sub-sperimentale provoca una **stratificazione** delle unità in conseguenza dei suoi diversi livelli. Le unità sperimentali interne ad uno stesso strato detto **blocco** sono da ritenersi più simili fra loro e diverse da quelle appartenenti ad un altro blocco. La randomizzazione (l'assegnazione casuale ai trattamenti) avviene quindi all'interno di ogni blocco.

Teoricamente, i blocchi rappresentano effetti che dovrebbero essere eliminati o (isolati nell'analisi) piuttosto che studiati e quindi ci si aspetta che il fattore blocco non interagisca col fattore sperimentale. L'ANOVA in questo caso viene svolta con un modello a soli effetti principali (effetti additivi dei due fattori). E infatti col termine blocco si intende un livello di un fattore sub-sperimentale ad effetto additivo rispetto ai livelli del fattore sperimentale. In assenza di interazione, e quindi dovendo studiare tenere conto solo degli effetti additivi, si può procedere all'esperimento con una sola replicazione per ogni combinazione *livello-blocco*$\times$*livello-fattore sperimentale*. Tuttavia se l'esperimento non è eccessivamente oneroso in termini di costi e tempo, si può prevedere una numerosità campionaria superiore. D'altra parte possono anche presentarsi delle situazioni inattese e quindi avere più prove per ogni combinazione di *livello-blocco*$\times$*livello-fattore sperimentale* consentirebbe di controllare l'effettiva assenza di interazione.

A fini esplicativi, vediamo ancora un esempio relativo allo spessore degli shopper biodegradabili.

Allo scopo di rispecchiare il più possibile le condizioni operative, l'esperimento ha utilizzato le due linee di produzione funzionanti presso l'azienda. E' quindi ragionevole supporre che, nonostante si tratti di due processi di produzione identici (stesso tipo di macchinari, stesse tarature, ecc.), i prodotti che escono dalla medesima linea di produzione siano fra loro più simili. Il fattore blocco è pertanto rappresentato dalla linea di produzione individuata dai due livelli LINEA 1 e LINEA 2. Il fattore sperimentale è rappresentato dalla temperatura con i livelli: Bassa, Media, Alta.

I dati relativi all'esperimento sono presentati nella Tabella 8. Come si vede, ogni blocco presenta **tutti** i trattamenti del fattore sperimentale. La Tabella 9 riporta le medie dei trattamenti che sono poi rappresentate nel grafico di Figura 2.

La Figura 2 mostra la probabile assenza di interazione fra fattore blocco e fattore sperimentale, come atteso mentre appare probabile la presenza di un effetto dovuto al fattore blocco poiché le medie corrispondenti al livello LINEA 2 sono sistematicamente superiori a quelle ottenute per LINEA 1.

E' comunque buona norma verificare l'assenza di interazione e quindi prima procediamo ai test come riportato in Tabella 2. Si lascia l'esercizio allo studente; ad ogni modo, con α=0.05 si accetta l'ipotesi di assenza di interazione.

Tabella 8 – Dati dell'esempio di disegno blocchi (spessore in micron)

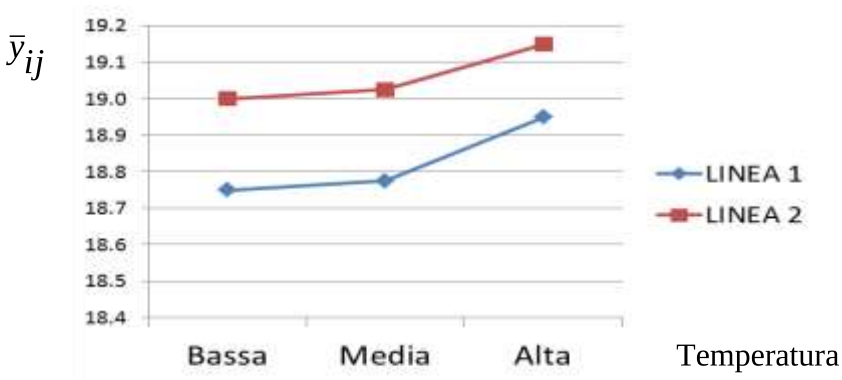
Fattore blocco (linea prod.).	Fattore sperimentale (temperatura)		
	Bassa	Media	Alta
	18.7	18.8	18.9
Linea 1	18.6	18.7	18.8
	18.8	18.9	19.1
	18.9	18.7	19.0
	18.9	18.9	19.0
Linea 2	19.0	19.0	19.1
	19.0	19.1	19.2

19.1	19.1	19.3

Tabella 9 – Medie dei trattamenti (spessore in micron)

Fattore blocco	Fattore B (temperatura)			Marginale
	Bassa	Media	Alta	
LINEA 1	18.750	18.775	18.950	18.825
LINEA 2	19.000	19.025	19.150	19.058
Marginale	18.875	18.900	19.050	18.942

Figura 2 – Grafico delle medie (v. Tabella 9)



La Tabella 10 mostra i risultati dell'ANOVA con i soli effetti principali del fattore sperimentale e del fattore blocco. Come si vede, i due fattori hanno effetti significativi. E' importante quindi esplicitare nel modello anche il fattore blocco, altrimenti i suoi effetti andrebbero a inglobarsi nella variabilità residua.

Tabella 10 – Tavola dell'ANOVA relativa all'esempio di Tabella 8

Effetti	Devianza	gdl	Varianza	F oss.	*p-value*
Fattore riga (fattore blocco: linea produttiva)	0.3267	1	0.3267	28.6131	0.0000
Fattore colonna (temperatura)	0.1433	2	0.0717	6.2774	0.0085
Devianza residua	0.2283	20	0.0114		
Devianza totale	0.6983	23	0.0304		

Come si vede dalla Tabella 11, infatti, se non consideriamo nel modello l'effetto della linea di produzione (e cioè si condure una ANOVA a una via col solo fattore Temperatura), la stima della

variabilità residua si inflaziona determinando un valore non significativo dell'F di Fisher relativo all'effetto del fattore sperimentale (la temperatura) che è quello che vogliamo misurare.
In particolare, si può verificare facilmente che la devianza residua in Tabella 11 è pari alla somma della devianza residua e di quella dovuta al fattore blocco riportate in Tabella 10: 0.555=0.2283+0.3267.

Tabella 11 – Tavola dell'ANOVA relativa all'esempio di Tabella 8 senza considerare il fattore blocco

Effetti	Devianza	gdl	Varianza	F oss.	*p-value*
Temperatura	0.1433	2	0.0717	2.7117	0.0935
Devianza residua	0.5550	21	0.0264		
Devianza totale	0.6983	23	0.0304		

3. Conclusioni

A conclusione di questo paragrafo vogliamo fare alcune osservazioni riguardo una importante assunzione fatte nel presentare l'analisi della varianza: medesimo numero di replicazioni per ogni trattamento.
I disegni sperimentali che hanno lo **stesso numero di replicazioni** per ogni trattamento si dicono **bilanciati**. Il bilanciamento facilita lo svolgimento e l'interpretazione dell'analisi della varianza in quanto consente di costruire i semplici test *F* qui descritti. Dal momento che l'esperimento viene pianificato, è quindi preferibile optare per un disegno bilanciato, e quindi la teoria qui presentata ha, senz'altro, valenza generale.

Si ricorda, inoltre che la validità dell'ipotesi di **normalità** dei residui dovrebbe essere controllata, una volta stimato il modello, anche mediante semplici supporti grafici quali il *normal q-q plot* dei residui[4].

[4] Non approfondiamo l'argomento ma si ricorda che dovrebbe essere controllata anche l'ipotesi di omoschedasticità.