Capitolo 4

Materiale didattico integrativo

Caratteristiche della distribuzione di S e conseguenze sull'S-chart con limiti 3-sigma

1. La distribuzione di *S*

Si consideri un campione casuale semplice di n unità (X_1, X_2, ..., X_n) estratto da una popolazione normale dove X ha media μ_0 e varianza σ_0^2. In tal caso si ha:

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{1}$$

dove

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} \qquad\qquad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \tag{2}$$

Pertanto ricorrendo alla distribuzione χ^2_{n-1} abbiamo ad esempio, per un dato valore g:

$$P(S^2 > g) = P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)\,g}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\chi^2_{n-1} > \frac{(n-1)\,g}{\sigma_0^2}\right) \tag{3}$$

Posta $S = \sqrt{S^2}$ la radice quadrata positiva di S^2, dalla (3) si ricava:

$$P(S > \sqrt{g}) = P\left(S^2 > g\right) = P\left(\chi^2_{n-1} > \frac{(n-1)\,g}{\sigma^2}\right)$$

La distribuzione di S è ovviamente legata a quella di S^2 ma non ha l'asimmetria di questa in quanto l'operazione di radice quadrata la riduce. Si confrontino i grafici di Figura 1.

2. La distribuzione di *S* e i limiti 3-sigma

L'impiego dei limiti 3-sigma porta ad ottenere probabilità di falso allarme diverse a destra e a sinistra, probabilità che cambiano al variare della dimensione campionaria. Si ricorda che anche la linea centrale dell'S chart dipende dalla dimensione campionaria attraverso la costante c_4.

Le probabilità di falso allarme associate ai due limiti di controllo sono le seguenti:

$$\begin{aligned} P(S > UCL \mid \sigma = \sigma_0) &= P(S^2 > UCL^2 \mid \sigma = \sigma_0) \\ &= P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} > \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2}\right) = P\left(\chi^2_{n-1} > \frac{(n-1)UCL^2}{\sigma_0^2}\right) \end{aligned}$$

$$P(S < LCL \mid \sigma = \sigma_0) = P(S^2 < LCL^2 \mid \sigma = \sigma_0)$$

$$= P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} < \frac{(n-1)\,LCL^2}{\sigma_0^2} \right) = P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)\,LCL^2}{\sigma_0^2} \right)$$

dove si ricorda che:

$$LCL = c_4\sigma_0 - 3\sigma_0\sqrt{1-c_4^2} \qquad\qquad UCL = c_4\sigma_0 + 3\sigma_0\sqrt{1-c_4^2}$$

Come si vede dalla tabella seguente, le probabilità associate ai limiti 3-sigma variano al variare della numerosità campionaria e la probabilità di falso allarme (alfa) si mantiene superiore a 0.0027.

Tabella 1 – Probabilità associate ai limiti 3-sigma di un S-chart

n	c_4	LC	LCL	P(S<LCL)	UCL	P(S>UCL)	alfa
3	0.886227	5.3174	0	0	13.6559	0.00563	0.0056
4	0.921318	5.5279	0	0	12.5265	0.00447	0.0045
5	0.939986	5.6399	0	0	11.7818	0.00390	0.0039
6	0.951533	5.7092	0.1734	5.98E-08	11.2450	0.00355	0.0035
7	0.959369	5.7562	0.6774	9.06E-06	10.8350	0.00331	0.0033
8	0.965031	5.7902	1.0717	3.67E-05	10.5087	0.00313	0.0032
9	0.969311	5.8159	1.3908	7.49E-05	10.2410	0.00299	0.0031
10	0.972659	5.8360	1.6557	1.17E-04	10.0162	0.00288	0.0030
11	0.975350	5.8521	1.8802	1.58E-04	9.8240	0.00279	0.0030

Figura 1 – Confronto fra distribuzione di S^2 e di S con n=8

S^2 (n=8) con limiti probabilistici con probabilità di falso allarme 0,00135 sotto LCL e 0,00135 sopra UCL

S (n=8) con limiti 3-sigma