

CAPITOLO 4 - Controllo statistico della qualità dei prodotti e dei processi produttivi

Paragrafo 4.3.1-4.3.5 Control chart per variabili

4

Parte I: concetti generali sul controllo on line^(*)

- 1) Distinzione fra cause accidentali (o comuni) e cause sistematiche (o speciali) di variabilità del processo (della misura di qualità)
- 2) Scopo e concetti base del monitoraggio on line
- 3) La tecnica dei control chart con l'esempio di monitoraggio della media di processo mediante l'*x-bar* chart (*\bar{x} chart*)

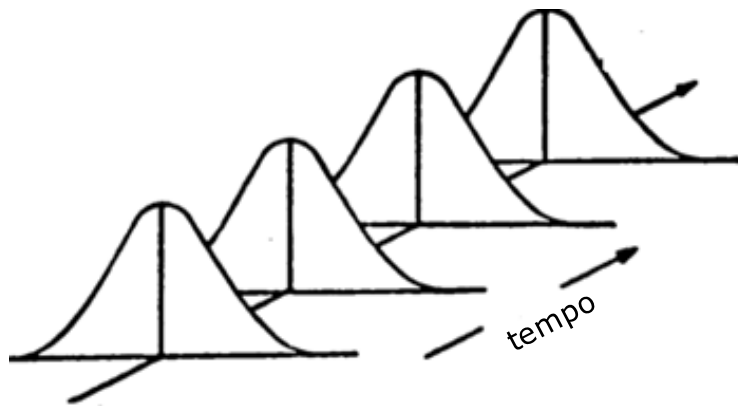
(*) *on line*: in corso di produzione

Cause comuni (accidentali): la variabilità naturale

X : misura di qualità (es. peso dei palloni da calcio)

La variabilità **naturale** indica l'effetto cumulato di un gran numero di piccole cause inevitabili (cause **comuni**) che si comportano come cause accidentali.

Nel processo **sotto controllo** sono in atto solo **cause comuni**

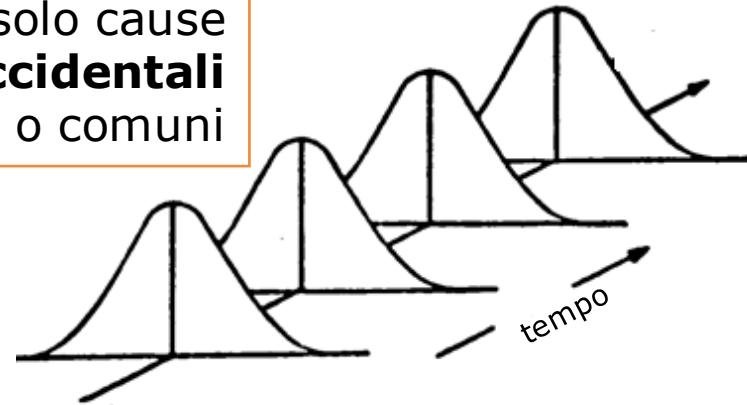


Processo sotto controllo:
distribuzione $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
stabile nel tempo

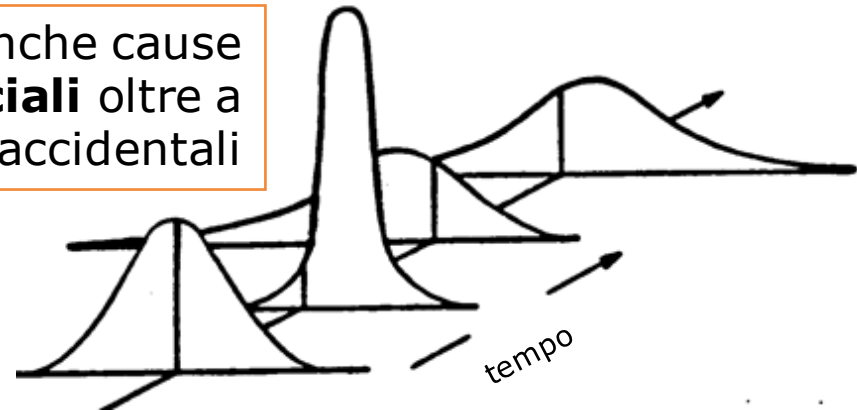
Cause comuni (accidentali) e cause speciali

Nel corso del tempo possono intervenire malfunzionamenti che determinano variazioni dei valori dei parametri (**cause speciali** o **sistematiche**).

solo cause
accidentali
o comuni



anche cause
speciali oltre a
quelle accidentali



Si parla di **assignable** o **special causes** per quei malfunzionamenti che possono essere attribuiti a specifici elementi o fattori del processo.

Scopo del monitoraggio on line

Segnalare tempestivamente se sono in azione **cause sistematiche** oltre alle **cause accidentali** (o così assimilabili, che determinano la variabilità naturale del processo).

Infatti, la causa speciale determina uno **shift**(*) nei parametri (o in un solo parametro) che può compromettere le prestazioni (la capacità) del processo.

Riconoscere tempestivamente se sono in atto cause speciali consente di intervenire tempestivamente sul processo, per eliminare il malfunzionamento e ripristinare le condizioni operative (riportare i parametri ai valori originari).

(*) **shift**: cambiamento del valore del parametro

Monitoraggio online e statistica

Il monitoraggio on line è un controllo **statistico** di processo che si esplica attraverso la tecnica dei **test delle ipotesi** sui parametri di processo.

Il test è **continuo nel tempo** e utilizza un supporto grafico chiamato **control chart**.

Vediamo subito la tecnica presentando il monitoraggio della **media** di processo.

Test delle ipotesi sulla media

Richiamo di concetti: test sulla media con varianza nota σ_0^2

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

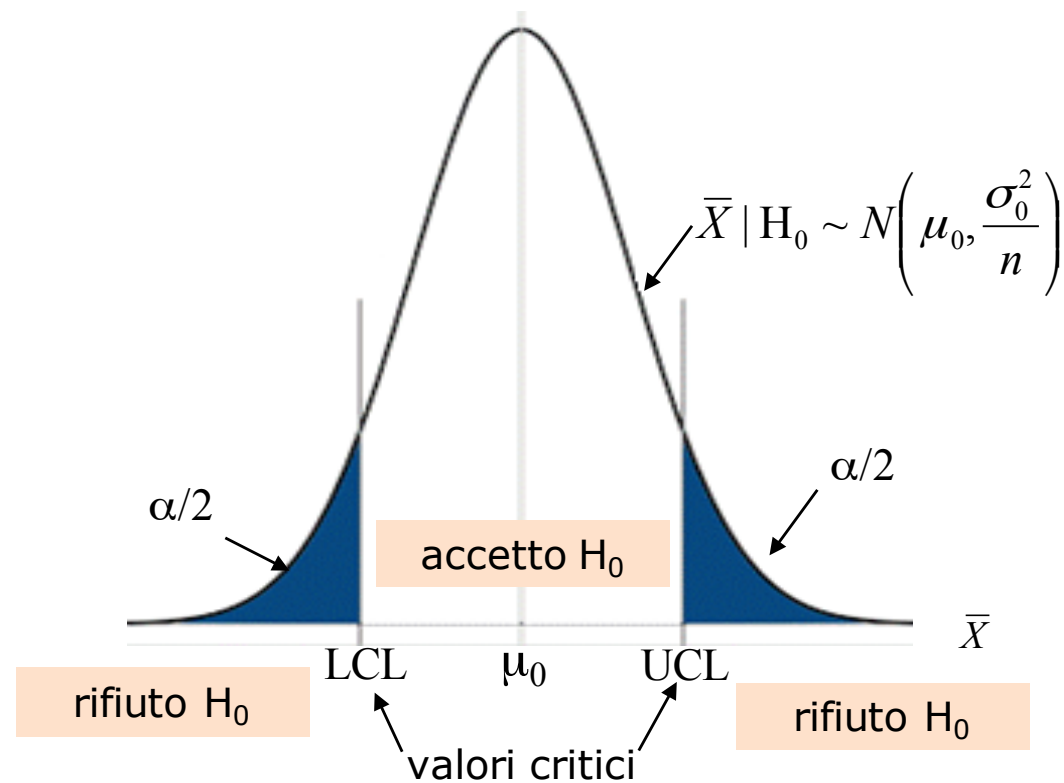
α prob. errore I tipo

\bar{X} : media campionaria

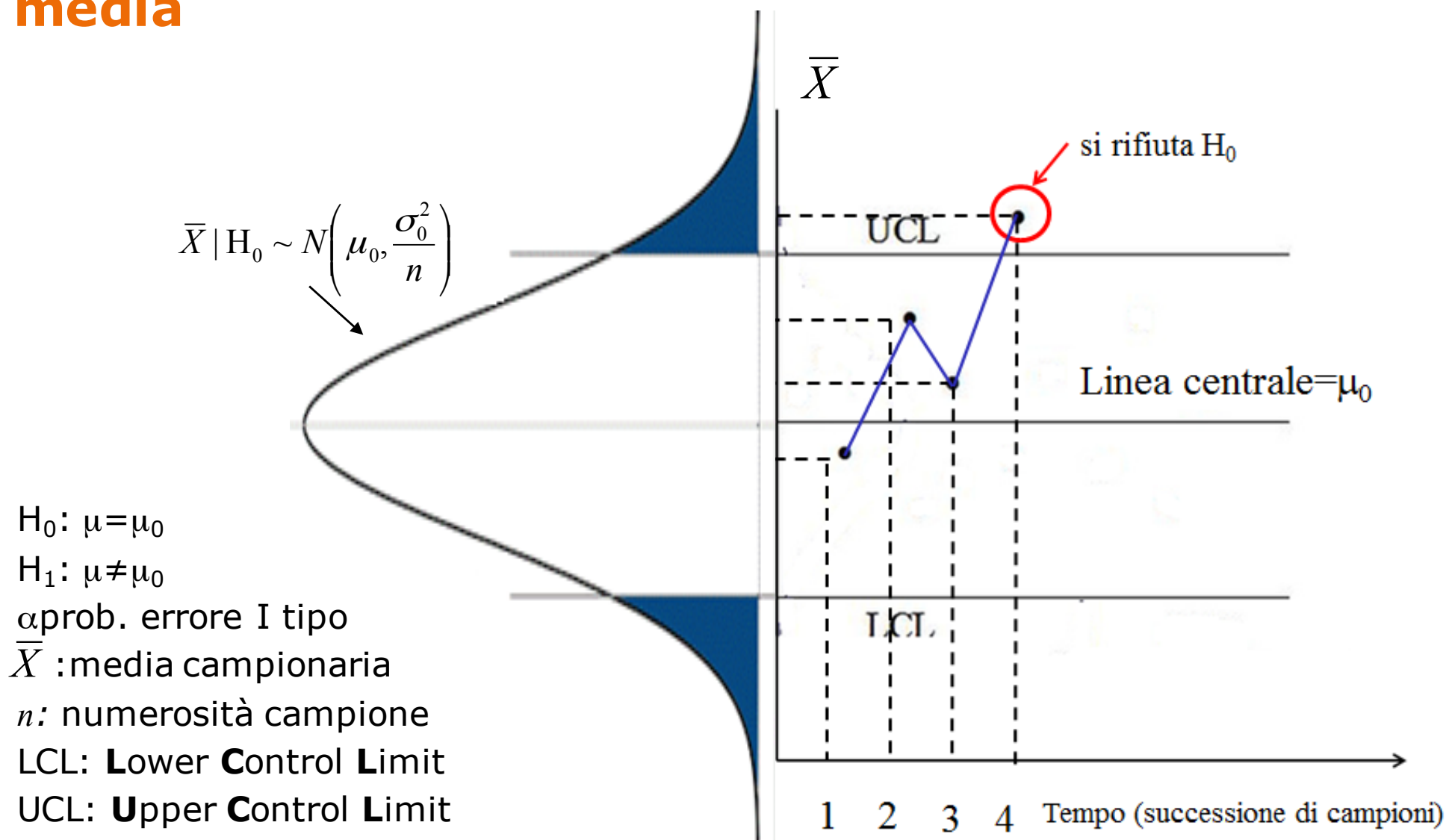
n : numerosità campione

LCL: lower control chart

UCL: upper control chart



***x-bar* chart: control chart per il test continuo sulla media**



Come è fatto un control chart

in **ascissa**: **gli indicatori di successivi campioni** (causali semplici, di dimensione n) di prodotti estratti dalla produzione del processo (si rispetta l'ordine cronologico di estrazione);

in **ordinata**: la scala per i valori della statistica (es. media campionaria) calcolata sui successivi campioni (es. il peso medio degli n palloni del campione i -esimo).

una linea centrale che rappresenta il **valore atteso** della statistica (es. media campionaria) per il processo **sotto controllo** (H_0 vera)

due linee orizzontali (limiti di controllo) che rappresentano i valori critici del test con riferimento a: α , n e H_0

i punti che rappresentano i valori della statistica (es. la media) nei successivi campioni

una spezzata che unisce i punti per meglio leggere il grafico

I limiti di controllo del control chart e la probabilità di falso allarme

I limiti di controllo **UCL** e **LCL** sono i **valori critici** del test corrispondenti a n e α

Il valore α indica la probabilità dell'errore di I tipo.

In questo caso α è detta **probabilità di falso allarme**:
probabilità di affermare che il processo è andato fuori controllo (rifiuto H_0) quando in realtà il processo è sotto controllo (H_0 vera)

Ai fini dell'efficacia operativa del control-chart:

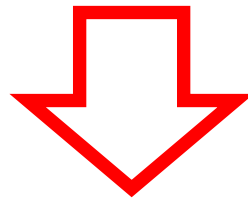
- UCL e LCL devono essere **facili da ricordare**
- devono determinare un valore α **molto basso**.

Perché vogliamo un valore molto basso per α ?

Nel caso si abbia un punto **fuori** dai limiti di controllo, si **rifiuta** H_0 e si ritiene che il valore del parametro sia **cambiato**.

Si **bloccherà** il processo e si andrà a cercare il malfunzionamento.

Si ha tuttavia una probabilità α di bloccare il processo **senza motivo** (α : probabilità di **falso allarme**).



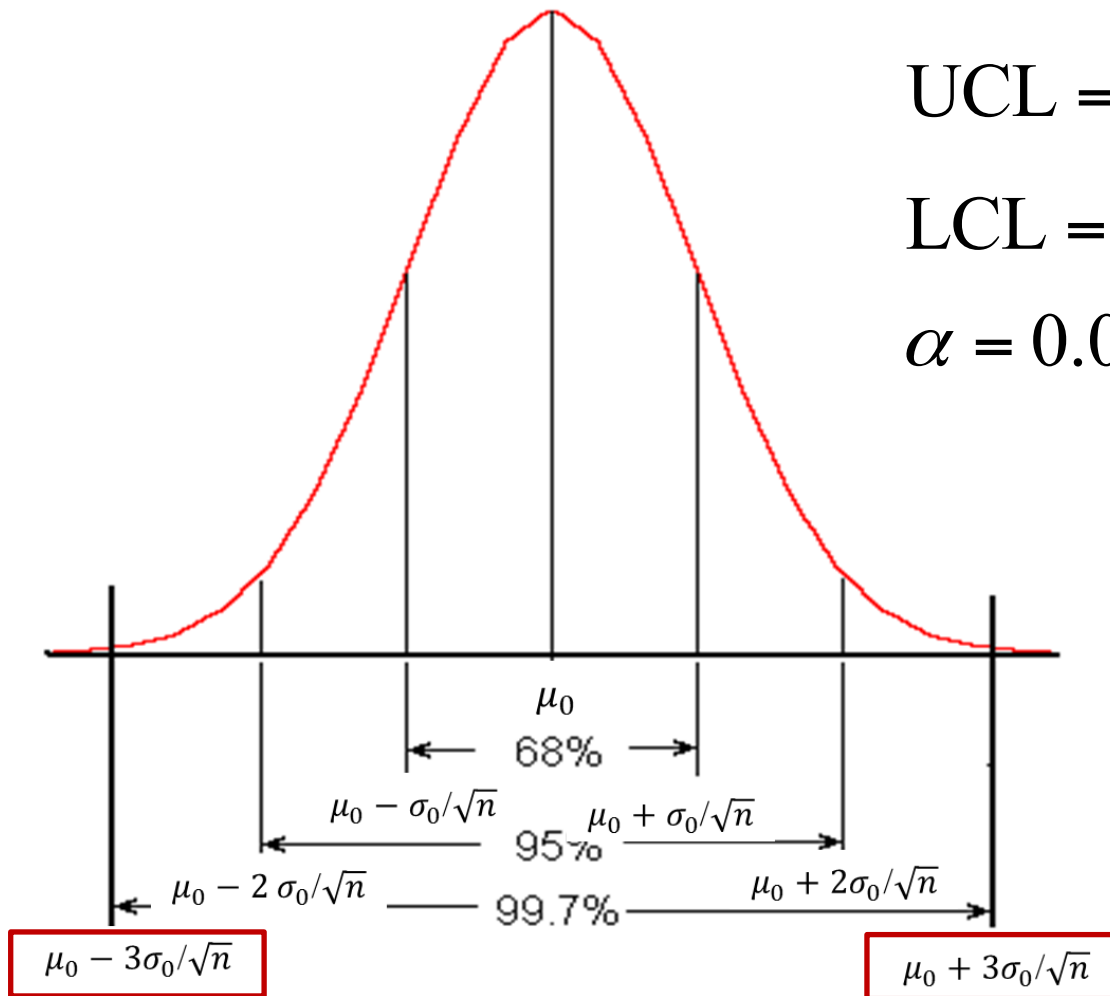
È pertanto **necessario** stabilire un valore
 α **molto basso**

Scelta dei limiti di controllo per l' *x-bar* chart: i limiti 3-sigma

$$UCL = \mu_0 + 3\sigma_0 / \sqrt{n}$$

$$LCL = \mu_0 - 3\sigma_0 / \sqrt{n}$$

$$\alpha = 0.0027$$



Limiti di controllo dell' *x-bar* chart e limiti di tolleranza naturale

Limiti di controllo (LCL, UCL)

- si riferiscono alla distribuzione campionaria di \bar{X} (e quindi dipendono da n)
- sono valori critici di un test delle ipotesi con $\alpha=0.0027$

$$\begin{matrix} \text{UCL} \\ \text{LCL} \end{matrix} = \mu_0 \pm \frac{3\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Limiti di tolleranza naturale (LNTL, UNTL)

- si riferiscono alla distribuzione della misura di qualità X
- servono per indicare l'ampiezza dell'intervallo di tolleranza naturale definito come quell'intervallo, centrato sulla media, che contiene il 99.73% della produzione

$$\begin{matrix} \text{UNTL} \\ \text{LNTL} \end{matrix} = \mu_0 \pm 3\sigma_0$$

Che cosa abbiamo visto fino qui

1. Significato di cause speciali e cause comuni
2. Scopo del monitoraggio on-line
3. Il monitoraggio on-line mediante controllo statistico di processo (metodologia del test delle ipotesi)
4. Il control chart per la media (\bar{x} -bar chart)
5. Concetto di falso allarme
6. Differenza fra limiti di controllo dell' \bar{x} -bar chart e limiti di tolleranza naturale

Fine parte I

Parte II - Control chart per variabili

1. Control chart per variabili e per attributi
2. Control chart per variabili con $n > 1$. Monitoraggio della media (*\bar{x} -bar chart*)
3. Control chart per variabili con $n > 1$. Monitoraggio della variabilità: *S-chart*
4. La lettura del control chart e il concetto di *sotto controllo statistico*
5. I campioni o sottogruppi razionali
6. Dimensione campionaria e frequenza di campionamento
7. L'ipotesi di normalità

La tecnica dei control chart



Walter Shewhart
(1891-1967)

Sviluppò la tecnica delle control chart (carte di controllo) presso i Bell Telephone Laboratories alla fine degli anni 20 del XX secolo.

Le carte di controllo sono strumenti utilizzabili quando il fenomeno da controllare è caratterizzato da un'elevata ripetibilità nel tempo

Tipi di control chart

Control chart per variabili

Si usano quando la misura di qualità è di tipo continuo (es. una misura fisica come peso, lunghezza, resistenza, ecc.).

In questo caso il modello distributivo usato è quello normale

Control chart per attributi

Si usano quando la misura di qualità è data da:

- conformità/non conformità del prodotto (variabile dicotomica)
- numero di difettosità sul prodotto (variabile conteggio)

In questi casi si usano modelli distributivi binomiale e Poisson.

Vedremo solo i control chart per variabili

Control chart per variabili

Processo sotto controllo: $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

Monitoraggio della media di processo

x-bar chart (in parte già visto)

Monitoraggio della variabilità di processo

S chart

***X-bar* chart (monitoraggio della media): LC, LCL, UCL**

Processo sotto controllo: $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

Numerosità campionaria $n > 1$ di ogni campione i

X_{ij} : v.c. peso del pallone j ($j=1, \dots, n; n > 1$) del campione i

$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$: media campionaria per il campione i

$E(\bar{X}_i | \text{processo sotto controllo}) = \mu_0$

$Var(\bar{X}_i | \text{processo sotto controllo}) = \frac{\sigma_0^2}{n}$

Linea centrale: $LC = \mu_0$

$$\begin{array}{l} \text{UCL} \\ \text{LCL} \end{array} = LC \pm 3 \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$$

Deviazione standard
della media
campionaria

Esempio di calcolo di LC, LCL, UCL di un \bar{x} -bar chart

Produzione palloni da calcio.

Misura di qualità X : peso del pallone (in g.).

Processo sotto controllo $X \sim N(430, 12.25)$ da cui $\sigma_0 = 3.5$.

Dimensione campione $n = 5$.

$$LC = 430$$

$$\begin{array}{l} \text{UCL} \\ \text{LCL} \end{array} = 430 \pm 3 \times \frac{3.5}{\sqrt{5}} = \begin{array}{l} 434.7 \\ 425.3 \end{array}$$

S-chart (monitoraggio di σ): LC, LCL, UCL

Processo sotto controllo: $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

X_{ij} : peso del pallone j ($j=1, \dots, n$; $n>1$) del campione i

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \quad \leftarrow \text{deviazione standard campionaria}$$

$$E(S_i \mid \text{processo sotto controllo}) = c_4 \sigma_0$$

$$\text{Var}(S_i \mid \text{processo sotto controllo}) = (1 - c_4^2) \sigma_0^2$$

$$\begin{array}{ll} \text{Linea centrale } LC = c_4 \sigma_0 & \begin{array}{l} \text{UCL} \\ \text{LCL} \end{array} = LC \pm 3\sigma_0 \sqrt{(1 - c_4^2)} \end{array}$$

c_4 è una costante tabulata il cui valore dipende da n ed è calcolata sotto l'ipotesi di normalità di X

Esempio di calcolo di LC, LCL, UCL di un *S-chart*

n	c_4
2	0.798
3	0.886
4	0.921
5	0.940
6	0.952
7	0.959

Valori della costante c_4
(arrotondati al terzo
decimale)

Produzione palloni da calcio. Misura di qualità X : peso del pallone (in g.).

Processo sotto controllo $X \sim N(430, 12.25)$ da cui $\sigma_0 = 3.5$.

Dimensione campione $n = 5$.

$$LC = 3.5 \times 0.94 = 3.29$$

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= 3.29 + 3 \times 3.5 \sqrt{(1 - 0.94^2)} = 6.87 \\ \text{LCL} &= 3.29 - 3 \times 3.5 \sqrt{(1 - 0.94^2)} = -0.29 \Rightarrow 0 \end{aligned}$$

Per $n < 6$ si ha $LCL < 0$ e quindi LCL viene impostato a 0 poiché $S_i \geq 0$

I limiti di controllo dei control chart

I limiti di controllo per \bar{x} -chart, S -chart sono detti: «limiti 3-sigma»

Valore atteso della statistica $\pm 3 \times \text{SIGMA}$ della statistica

dove **SIGMA**: è la **deviazione** standard della statistica.

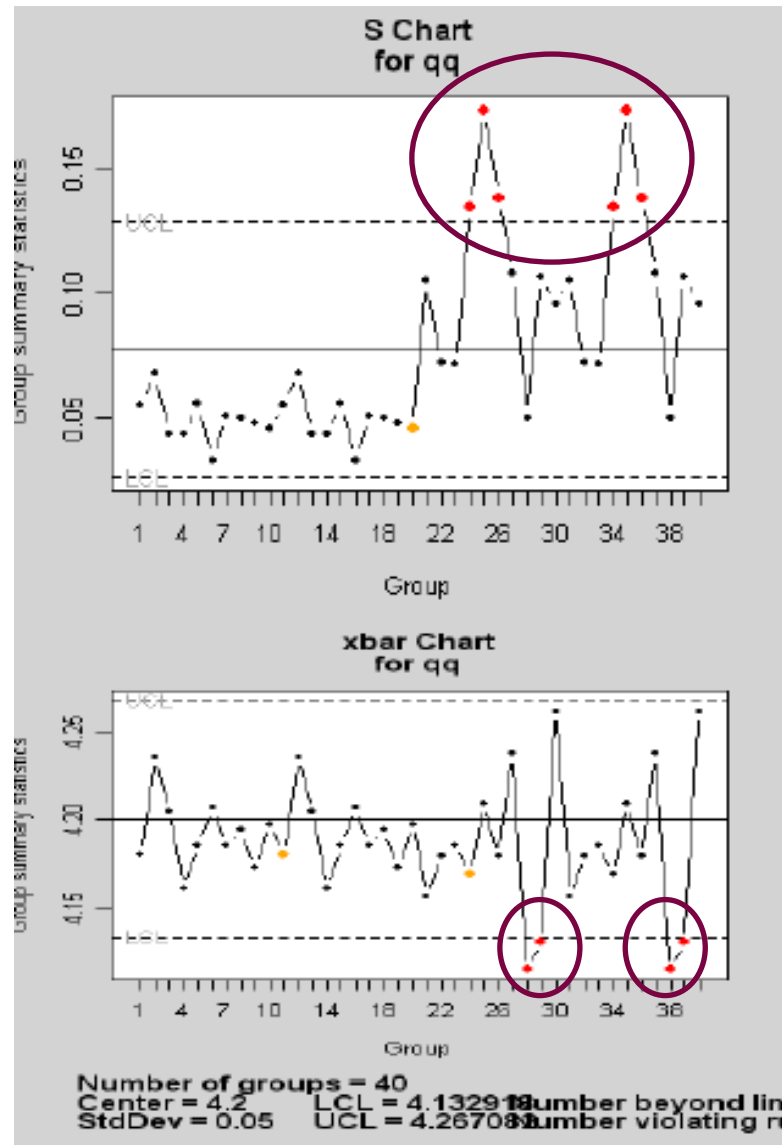
Nel caso dell' \bar{x} -chart (la distribuzione della media campionaria è simmetrica) tali limiti hanno **sempre** la probabilità di falso allarme uguale a 0.0027 **equiripartita** esternamente a LCL e UCL.

Nel caso dell' S -chart (la distribuzione della deviazione standard campionaria è asimmetrica) tali limiti hanno una probabilità di falso allarme che **dipende** da n e che **non è equiripartita** esternamente a LCL e UCL (v. materiale online di approfondimento)

Impostazione e utilizzo del control chart: fasi

1. Si sceglie la dimensione campionaria n
2. Si impostano i due control chart (\bar{x} e S) calcolando LC, UCL, LCL in funzione dei parametri di processo e di n .
3. Si procede all'estrazione del campione mentre il processo lavora.
4. Man mano che si estrae un campione, si calcolano su questo media e deviazione standard e si riportano i valori sui rispettivi control chart
5. Si interpretano i grafici guardando **prima** all' S -chart e **poi** all' \bar{x} -bar chart.
6. Se ci sono punti fuori limite si interrompe il processo e si va a cercare la causa del malfunzionamento. Altrimenti si procede nell'estrazione del successivo campione ... e così via.

Uso congiunto di S-chart e *x-bar* chart



x-bar chart

Si potrebbe pensare che la media sia cambiata perché ci sono punti fuori limite.

S-chart

ci mostra che c'è stato un aumento della standard deviation

E' necessario prima accertarsi che non è cambiato il valore σ_0 che entra nel calcolo dei limiti di controllo dell'*x-bar* chart.

Se è cambiato il valore di σ_0 , allora i limiti di controllo dell'*x-bar* chart non sono più validi.

Letture di un control chart

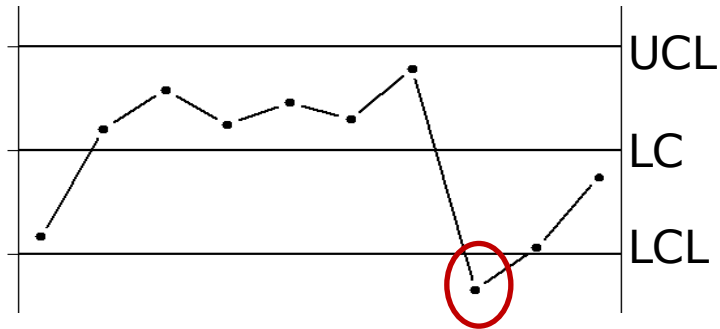
Il control chart è in pratica un test delle ipotesi. Se il punto cade fuori dai limiti di controllo si conclude che il processo è andato fuori controllo (per la media, per la varianza o per tutti e due i parametri).

TUTTAVIA, nella lettura del control chart, si deve tener conto anche dell'**andamento della spezzata dei punti rispetto al tempo** (rispetto alla successione temporale dei campioni). Certi andamenti possono indurre sospetti di presenza di malfunzionamenti.

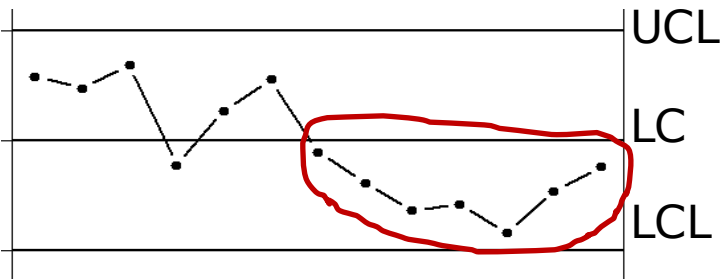
Già negli anni '50 sono stati forniti dei criteri per l'interpretazione del control chart (Western Electric).

Suggerimenti provengono inoltre da organizzazioni come l'American Society for Quality (ASQ).

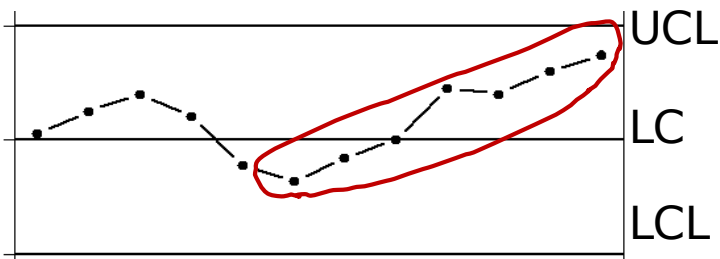
Alcuni andamenti sospetti in un control chart



Punto fuori dai limiti di controllo. Si rifiuta l'ipotesi nulla e si conclude che il valore del parametro è cambiato. È l'impiego del control chart come test delle ipotesi (già visto)



Sequenza di valori sopra o sotto la linea centrale. Una sequenza di 7 o più punti consecutivi deve ritenersi sospetta.



Sequenza di valori in diminuzione o in aumento. Una sequenza di 7 o più punti consecutivi deve ritenersi sospetta.

La dimensione temporale nei control chart

È importante ricordare che i dati riportati su un control chart provengono da un processo produttivo che **lavora nel tempo**

I dati riportati sul control chart seguono la sequenza cronologica dei campioni estratti dalla produzione che via via esce dal processo.

I dati riportati sul control chart formano una **serie storica** e i dati di un processo sotto controllo riportati su un control chart assumono la forma di una **serie storica di livello costante** (v. **Capitolo 7**).

Esempio numerico (peso palloni in g.). Impostazione dei control chart

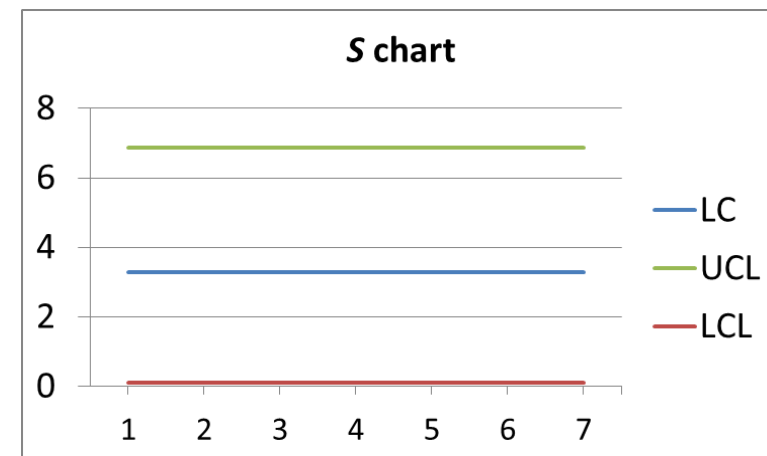
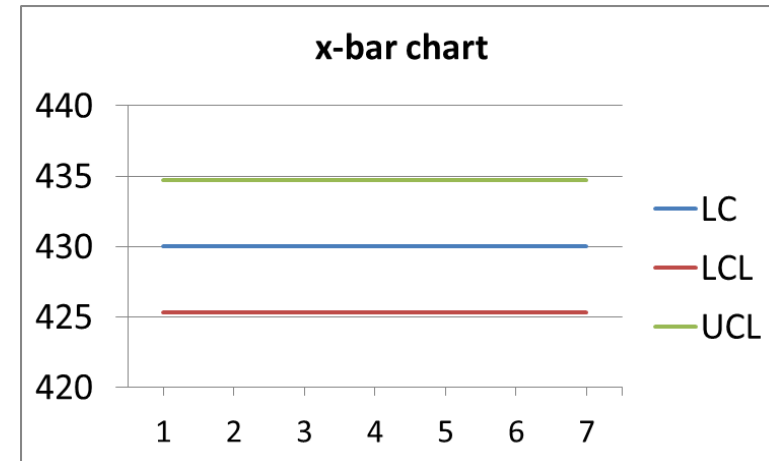
Processo sotto controllo: $X \sim N(430, 12.25)$; $n=5$

$$LC = 430$$

$$\begin{aligned} UCL &= 430 + 3 \times \frac{3.5}{\sqrt{5}} = 434.7 \\ LCL &= 430 - 3 \times \frac{3.5}{\sqrt{5}} = 425.3 \end{aligned}$$

$$LC = 3.5 \times 0.94 = 3.29$$

$$\begin{aligned} UCL &= 3.29 + 3 \times 3.5 \sqrt{(1 - 0.94^2)} = 6.87 \\ LCL &= 3.29 - 3 \times 3.5 \sqrt{(1 - 0.94^2)} = -0.29 \Rightarrow 0 \end{aligned}$$



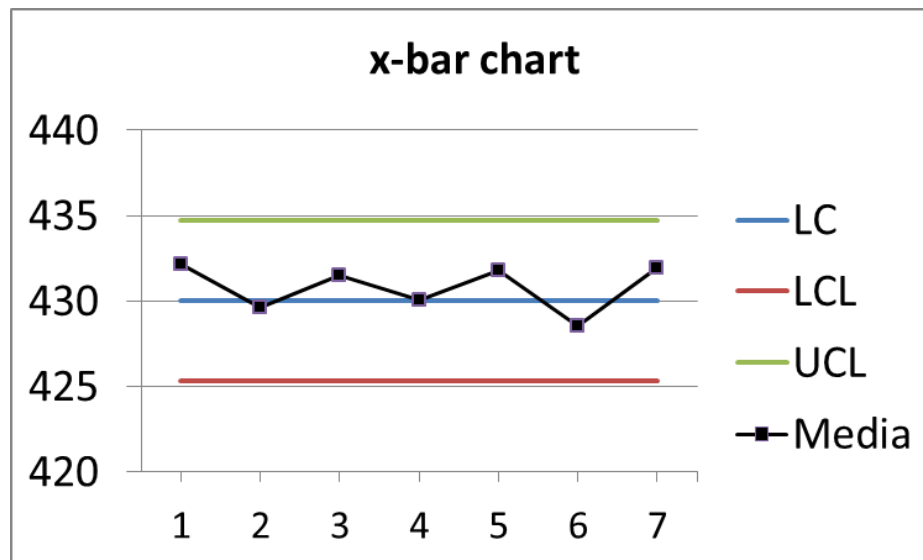
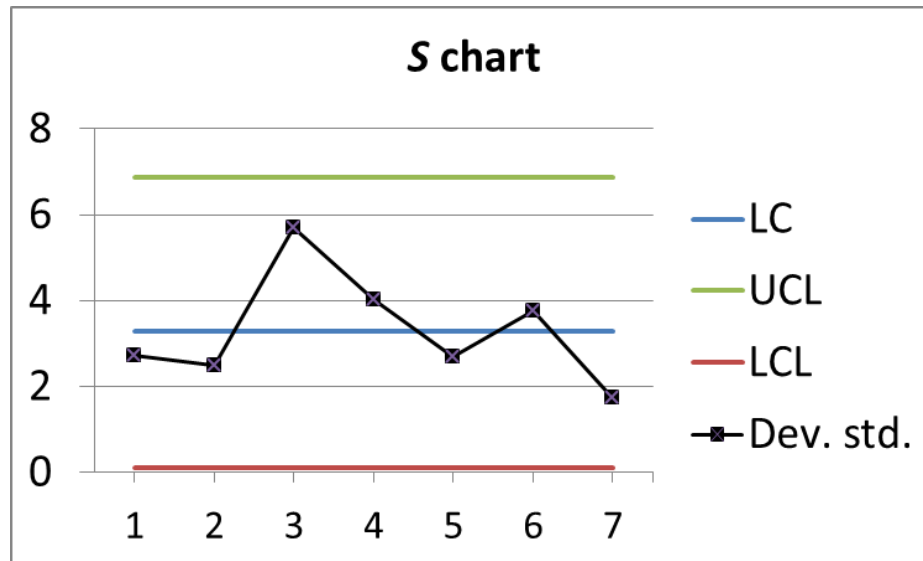
Esempio numerico con 7 campioni estratti. Calcolo di media e deviazione standard.

N. campione	Unità campionaria					Media	Deviazione standard
	1	2	3	4	5		
1	429.2	431.3	436.6	431.4	432.3	432.2	2.730
2	427.4	429.5	429.8	433.7	427.8	429.6	2.497
3	438.4	433.3	422.8	430.2	432.7	431.5	5.694
4	427.4	425.2	431.3	435.7	430.8	430.1	4.018
5	435.5	431.7	430.9	428.1	432.8	431.8	2.702
6	430.5	425.5	430.1	432.9	423.8	428.6	3.775
7	430.2	434.1	433.0	430.1	432.1	431.9	1.748

$$\bar{X}_4 = \frac{427.4 + 425.2 + 431.3 + 435.7 + 430.8}{5} = 430.1$$

$$S_4 = \sqrt{\frac{(427.4 - 430.1)^2 + (425.2 - 430.1)^2 + (431.3 - 430.1)^2 + (435.7 - 430.1)^2 + (430.8 - 430.1)^2}{5 - 1}} = 4.018$$

Si riportano i dati sui rispettivi control chart



Il processo
appare **sotto
controllo
statistico**

Sotto controllo e sotto controllo statistico

Processo sotto controllo (in senso proprio): è stato definito come quel processo che mantiene stabili nel tempo i valori dei parametri.

Processo sotto controllo statistico: il processo per il quale il control chart non evidenzia segnali di fuori controllo. Di fatto noi non sapremo mai se il processo è sotto controllo ma solo se lo è nel **senso statistico**.

Il control-chart ha, come qualunque test delle ipotesi, dei margini di errore: la probabilità di non osservare un segnale quando c'è stato lo *shift* è la probabilità dell'errore di II tipo.

Il campionamento: il concetto di sottogruppo razionale

I campioni dovrebbero essere scelti in modo tale che ogni **singolo campione comprenda unità prodotte nelle stesse condizioni**.

Per tale motivo, si parla di **rational subgroups** (sottogruppi razionali).

L'elemento di razionalità sta nel fatto che la strategia di campionamento deve *minimizzare* la probabilità che lo *shift* intervenga fra unità **dentro** il campione e massimizzare la probabilità che lo *shift* intervenga **fra successivi** campioni.

In base a questo criterio, è opportuno che i sottogruppi razionali siano formati da unità prodotte in tempi vicini.

La dimensione campionaria: aspetti statistici

E' preferibile una dimensione adeguata perché:

- una ridotta numerosità campionaria determina un valore negativo per LCL nell' \bar{X} chart;
- grazie al teorema del limite centrale, la numerosità campionaria influisce sulla forma della distribuzione della statistica test qualora la variabile X non sia distribuita in modo normale
- la dimensione campionaria influisce sulla sensibilità del control chart a individuare *shift* nei parametri (potenza del test)

Dimensione campionaria e frequenza di campionamento

La scelta di n è connessa anche alla frequenza con cui si fanno i controlli.

In teoria sarebbe preferibile esaminare **di frequente grandi campioni** ma questa è una situazione poco accettabile dal punto di vista economico.

In generale si tende a campioni di piccole dimensioni con controlli frequenti (se il flusso della produzione lo consente).

I principali fattori da tener conto sono per la scelta di n , sono:

- il **costo** di campionamento legato alle procedure di scelta e *misura* delle grandezza di qualità (talvolta la misurazione comporta la distruzione dell'unità)

- la **perdita economica** dovuta al caso in cui il processo continui a funzionare per un certo arco di tempo in condizioni di fuori controllo (aumenta la quota di pezzi non conformi)

L'ipotesi di normalità

L'ipotesi di normalità guida nella determinazione dei limiti di controllo del control chart ma talvolta la normalità non c'è.

Dal punto di vista operativo tuttavia il control chart nella sua forma originale di Shewhart come qui è stata introdotta, rimane un efficace strumento per il controllo on-line.

Il control chart va considerato essenzialmente come un **metodo euristico** basato anche sull'esperienza e la conoscenza del funzionamento del processo produttivo.

Fine parte II

Competenze acquisite

- A impostare i control chart \bar{x} -bar e S chart nel caso in cui media e varianza sono note
- Ad usare i control chart riportando i valori campionari sul grafico
- A leggere i control chart
- Il concetto dei limiti di controllo come «limiti 3-sigma»
- Il concetto di «falso allarme» e la probabilità di falso allarme α
- Il campionamento nel controllo di qualità
- Il concetto di 'sotto controllo statistico'