

**PERCORSI ABILITANTI SPECIALI 2014**

**DIDATTICA DELL'ECONOMIA DEGLI  
INTERMEDIARI FINANZIARI**

**A cura**

**Dott.ssa Federica Miglietta**

**ESERCITAZIONE**

## CALCOLO FINANZIARIO:

Nel caso degli investimenti si parla genericamente di tempo, ma è indubbio che sia importante decidere a quale periodo riferirsi: tutti convengono che un investimento di 100 € che frutta 15 € in quattro mesi sia migliore di un investimento di 100 € che frutta gli stessi 15 €, ma in dodici mesi. Il primo investimento è migliore del secondo: ma come stimare “quanto” è migliore? Per risolvere questo dilemma, dobbiamo trasformare i due tassi in modo che si riferiscano allo stesso periodo, per esempio, un anno.

### **Esempio 1:** *tassi annui equivalenti*

Immaginiamo che il nostro amico Antonio possa scegliere tra quattro investimenti possibili:

- a) tasso di rendimento semestrale:  $i_2 = 4,16\%$
- b) tasso di rendimento quadrimestrale:  $i_3 = 2,70\%$
- c) tasso di rendimento trimestrale:  $i_4 = 2,0\%$
- d) tasso di rendimento biennale:  $i_{0,5} = 15,0\%$

Aiutate Antonio a scegliere tra le alternative proposte. Utilizzate il regime di capitalizzazione composto.

### **Soluzione**

Annualizziamo tutti e quattro i tassi in modo da renderli comparabili: utilizziamo la formula

$$1 + i_A = (1 + i_k)^K$$

Dove  $k$  rappresenta il numero di volte in cui l'interesse viene capitalizzato nel corso dell'anno e  $i_A$  rappresenta l'interesse annuale.

- a)  $1 + i_A = (1 + i_2)^2$       cioè  $i_A = (1+0,0416)^2 - 1 \rightarrow i_A = 8,49\%$
- b)  $1 + i_A = (1 + i_3)^3$       cioè  $i_A = (1+0,0270)^3 - 1 \rightarrow i_A = 8,32\%$
- c)  $1 + i_A = (1 + i_4)^4$       cioè  $i_A = (1+0,020)^4 - 1 \rightarrow i_A = 8,24\%$
- d)  $1 + i_A = (1 + i_{0,5})^{0,5}$       cioè  $i_A = (1+0,15)^{0,5} - 1 \rightarrow i_A = 7,24\%$

Il rendimento migliore è quello caratterizzato da tasso semestrale a). Antonio, dopo averli confrontati, sceglierà l'investimento a).

### ESERCIZIO ADDIZIONALE:

Ipotizziamo che Clara abbia 1000€ da investire. Le prospettano una serie di 3 investimenti. Aiutatela a scegliere l'opportunità migliore: per semplicità, ipotizzate che tutti gli investimenti prospettati siano caratterizzato dallo stesso livello di rischio ed utilizzate il regime di capitalizzazione composto.

- a) investimento con tasso di rendimento biennale:  $i_{0,5} = 10,50\%$
- b) investimento con tasso di rendimento semestrale:  $i_2 = 2,75\%$
- c) investimento con tasso di rendimento trimestrale:  $i_4 = 1,85\%$

### Soluzione:

Annualizziamo tutti e tre i tassi, in modo da renderli comparabili: utilizziamo la formula:

$$1 + i_A = (1 + i_k)^K$$

Dove  $k$  rappresenta il numero di volte in cui l'interesse viene capitalizzato nel corso dell'anno e  $i_A$  rappresenta l'interesse annuale.

- a)  $1 + i_A = (1 + i_{0,5})^{0,5}$       cioè  $i_A = (1 + 0,1050)^{0,5} - 1 \rightarrow i_A = 5,12\%$
- b)  $1 + i_A = (1 + i_2)^2$       cioè  $i_A = (1 + 0,0275)^2 - 1 \rightarrow i_A = 5,58\%$
- c)  $1 + i_A = (1 + i_4)^4$       cioè  $i_A = (1 + 0,0185)^4 - 1 \rightarrow i_A = 7,61\%$

Il rendimento migliore è quello caratterizzato da tasso trimestrale c). Clara, dopo averli confrontati, sceglierà l'investimento c).

## LE OBBLIGAZIONI - Il prezzo

### Esercizio 1

Il giorno 1 marzo un investitore acquista un BOT a 12 mesi (scadenza 1/3/n+1) il cui rendimento effettivo in regime di capitalizzazione semplice è pari al 3,61% annuo.

1. Qual è il prezzo pagato dall'investitore per l'acquisto del titolo?
2. Quale sarebbe il prezzo se il tasso di rendimento fosse del 3,61% annuo composto?
3. Quale sarebbe il prezzo del titolo in regime di capitalizzazione semplice e composta se, a parità di rendimento annuo (3,61%), la scadenza fosse di 24 mesi?

Presentate ordinatamente il profilo finanziario dell'operazione e i conteggi effettuati. (utilizzate per i calcoli l'anno commerciale).

## LE OBBLIGAZIONI - Il prezzo

### Soluzione Esercizio 1

Il profilo finanziario del titolo è rappresentato nella figura sottostante.



Il prezzo del BOT è pari al valore attuale di 100 scontato per 360 giorni.

1. In regime di capitalizzazione semplice, il prezzo è calcolato in base alla seguente formula:

$$P = \frac{100}{1 + r \times \frac{gg}{360}}$$

dove  $r$  esprime il rendimento di periodo e  $gg$  sono i giorni che intercorrono dalla data di acquisto alla data di rimborso del titolo. Nell'esempio:

$$P = \frac{100}{1 + 3,61\% \times \frac{360}{360}} = 96,52$$

2. In regime di capitalizzazione composta, il prezzo è calcolato in base alla seguente formula:

$$P = \frac{100}{(1 + r)^{\frac{gg}{360}}} = \frac{100}{(1 + 3,61\%)^{\frac{360}{360}}} = 96,52$$

Dato un orizzonte temporale di 12 mesi, il risultato è il medesimo, ma cambia l'impostazione matematica.

3. Se la scadenza del titolo fosse pari a 24 mesi, il prezzo del BOT

- in regime di capitalizzazione semplice sarebbe pari:

$$P = \frac{100}{1 + 3,61\% \times \frac{720}{360}} = 93,27$$

- in regime di capitalizzazione composta sarebbe pari:

$$P = \frac{100}{(1 + 3,61\%)^{\frac{720}{360}}} = 93,15$$

Come si evince da tali risultati, a parità di rendimento annuo:

- per orizzonti temporali superiori all'anno il prezzo del titolo calcolato secondo il regime semplice è maggiore del prezzo calcolato secondo il regime composto;
- per orizzonti temporali inferiore ai 12 mesi, il prezzo calcolato applicando il regime semplice risulta inferiore al valore ottenuto utilizzando il regime composto.

### **LE OBBLIGAZIONI - Il prezzo**

#### *Esercizio 2*

Date le informazioni disponibili, quale dei seguenti titoli presenta una quotazione (prezzo) palesemente errata? Perché?

<b>Titolo</b>	<b>Cedola</b>	<b>Tres</b>	<b>Valore di rimborso</b>	<b>Quotazione</b>
A	5%	5%	100	100
B	4%	6%	100	105
C	3%	4%	100	97,6

### **LE OBBLIGAZIONI - Il prezzo**

#### *Soluzione Esercizio 2*

Date le informazioni disponibili, l'unico titolo a presentare una quotazione palesemente errata è il titolo B.

La quotazione del titolo B è infatti incoerente rispetto al valore assunto dalla cedola e dal Tres del titolo.

In particolare, il Tres esprime il tasso di rendimento effettivo a scadenza di un titolo, che tiene conto di tutte le componenti reddituali del titolo, cioè sia della componente interessi (cedole) che degli eventuali "frutti" relativi alla componente capitale (guadagno/perdita in

conto capitale derivante dalla differenza tra valore di rimborso e prezzo di acquisto del titolo).

Nell'esercizio:

1. il titolo A presenta una quotazione corretta; si tratta infatti di un titolo che quota necessariamente alla pari (prezzo = 100), dal momento che la cedola coincide con il Tres. Ciò significa che l'unica componente che rileva nella determinazione del rendimento effettivo a scadenza è legata ai frutti per interessi.
2. il titolo B presenta una quotazione errata; se infatti il Tres (6%) supera il valore della cedola (4%), come accade in questo caso, il rendimento effettivo del titolo deve necessariamente incorporare non solo la componente interessi, ma anche quella in conto capitale derivante da una differenza positiva tra prezzo di acquisto e valore di rimborso. Essendo il valore di rimborso sempre pari a 100, il titolo dovrebbe essere pertanto quotato sotto la pari ( $P < 100$ ). Solo in presenza di un Tres inferiore al valore della cedola sarebbe ragionevole attendersi una quotazione sopra la pari ( $P > 100$ )
3. il titolo C presenta una quotazione esatta; poiché, infatti, il Tres è maggiore del valore della cedola, alla redditività complessiva del titolo concorrono sia la componente interessi che il guadagno in conto capitale.

## LE OBBLIGAZIONI - Il Tres

### *Esercizio 3*

In data 1/09/200n un investitore acquista un BTP le cui caratteristiche sono riportate nella tabella sottostante. Si determini il rendimento effettivo a scadenza (Tres) del titolo.

Data di scadenza	1/09/200n+1
Prezzo di rimborso	100
Prezzo tel quel	98
Frequenza cedole	Semestrale
Cedola lorda semestrale	3

## LE OBBLIGAZIONI - Il Tres

### Soluzione Esercizio 3

Per calcolare il rendimento effettivo a scadenza (TRES) è necessario ricordare che il TRES è quel tasso di rendimento che, in un regime di capitalizzazione composta, rende uguale la somma del valore attuale di tutti i flussi di cassa generati dal titolo al prezzo *tel quel* dello stesso<sup>1</sup>. Quindi il TRES è il tasso interno di rendimento  $r$  che risolve la seguente equazione:

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k}$$

Dove  $P$  è il prezzo e  $\sum_{k=1}^n \frac{F_k}{(1+r)^k}$  è la sommatoria dei flussi di cassa attualizzati generati alle diverse scadenze ( $k$ ).

Sostituendo i simboli con i valori otteniamo:

$$98 = \frac{3}{(1+r)} + \frac{103}{(1+r)^2}$$

Risolvendo si ottiene:

$$98 \times (1+r)^2 - 3 \times (1+r) - 103 = 0$$

Ponendo  $x = 1+r$

$$98x^2 - 3x - 103 = 0$$

Si tratta di una equazione di secondo grado del tipo  $ax^2 + bx + c = 0$  la cui soluzione è data dalla formula:

---

<sup>1</sup> Se il titolo è acquistato al momento dello stacco della cedola o esattamente all'emissione, prezzo *tel quel* del titolo e corso secco coincidono. Se invece il titolo è acquistato in momenti diversi, il prezzo del titolo deve tenere conto del rateo interessi, cioè della porzione di cedola già maturata al momento dell'acquisto. Ipotizzando che un titolo obbligazionario abbia una cedola annua pari a  $C$  e che l'acquisto sia avvenuto  $x$  giorni dopo lo stacco dell'ultima cedola (o dopo l'emissione), il venditore del titolo avrà già maturato un rateo interessi pari a  $C \times \frac{x}{365}$ . Il prezzo di vendita

del titolo (prezzo *tel quel*) sarà perciò pari alla somma tra corso secco del titolo e rateo interessi:

$$\text{Prezzo tel quel} = \text{Corso secco} + \left( C \times \frac{x}{365} \right)$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nel nostro caso

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 98 \times (-103)}}{2 \times 98} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40376}}{196} = \frac{3 \pm 200,9602}{196}$$

Tra le due possibili soluzioni quella plausibile è

$$x = \frac{3 + 200,9602}{196} = 1,040613$$

Poiché  $x = 1 + r$

Si ha

$$1,040613 = 1 + r$$

Il TRES semestrale è quindi uguale a

$$r_s = 1,040613 - 1 = 4,0613\%$$

da cui si ricava che il TRES annuale è pari a

$$r_a = (1 + r_s)^2 - 1 = (1 + 4,0613\%)^2 - 1 = 8,29\%$$

## LE OBBLIGAZIONI - Il Tres

### *Esercizio e soluzione*

#### **ESERCIZIO**

Calcolate il rendimento semestrale a scadenza (TRES) di un titolo che scade tra un anno e paga cedole semestrali (la prima fra sei mesi e la seconda fra un anno) ad un tasso del 10,80% annuale. Prezzo del titolo = 104,98, rimborso a scadenza al valore nominale (VN = 100). Calcolatene, poi, il TRES annuale.

#### **Soluzione.**

Vediamo come calcolare questi tassi.

Partendo dalla formula 10 nel capitolo 3, impostiamo:

$$104,98 = \frac{5,40}{(1+TRES_s)^1} + \frac{5,40}{(1+TRES_s)^2} + \frac{100}{(1+TRES_s)^2}$$

Impostando una equazione di secondo grado e ponendo  $(1+TRES_s) = x$  otteniamo

$$104,98 x^2 - 5,40 x - 105,40 = 0 \text{ da cui calcoliamo } x = 1,028 \rightarrow TRES_s = 2,8\%$$

$$x = \frac{5,4 \pm \sqrt{-5,4^2 + (4 * 104,98 * 105,4)}}{2 * 104,98} = 1,028$$

Convertiamo ora questo TRES semestrale in un tasso annuale:

$$(1+TRES_s)^2 = (1+TRES_A)$$

$$\text{Da cui: } TRES_A = (1+0,028)^2 - 1 = 5,68\%$$

Avremmo potuto calcolare direttamente questo TRES annuale? Se si, come?

Impostiamo la formula come segue:

$$104,98 = \frac{5,40}{(1+TRES_A)^{1/2}} + \frac{5,40}{(1+TRES_A)^1} + \frac{100}{(1+TRES_A)^1}$$

Come potete notare la differenza sta nell'esponente. Se consideriamo un periodo annuale, il semestre deve essere calcolato come  $\frac{1}{2}$  mentre l'anno assume il valore 1. Nel caso precedente, invece, prendendo come riferimento il semestre, abbiamo considerato 1, all'esponente, per indicare il semestre, e 2 per indicare l'anno (composto, come si sa, da due semestri).